

# Legendre 多項式展開による平板理論の定式化と動的問題への適用

## FORMULATION OF PLATE THEORY BY EXPANDING THE DISPLACEMENTS DUE TO LEGENDRE POLYNOMIALS AND THE APPLICATION TO DYNAMIC LOADING PROBLEM OF PLATES

平島健一\*・根岸嘉和\*\*

By Ken-ichi HIRASHIMA and Yoshikazu NEGISHI

The present paper proposes the general higher-order theory of plates by using of Legendre polynomial expansion along the plate thickness. This theory has some simpler form than the other approximate theories such as expansions by Power series, Fourier series and Chebyshev polynomials along the thickness. Particularly, the components of dynamic inertia terms have no coupling with each other for the case of homogeneous plates of the present theory. The other theories cited above can not separate from the components of dynamic terms.

In the paper, lower-order theories due to these approximations are summarized for the cases of bending behaviours as well as stretching ones. At last, some numerical examples for dynamic loading with step time function are shown for the case of simply supported, isotropic plate.

### 1. 緒言

三次元変位成分  $u_j$  を板厚方向座標  $x_3$  に関して展開して平板理論を構成する、いわゆる変位仮定型の高次平板理論の定式化が、著者らによってすでになされている<sup>1)~4)</sup>。ここでは  $x_3$  に関してベキ級数あるいは Fourier 級数の展開法を用いて、採用項数に何らの制限を設けない最も一般的な高次平板理論として提案され、それらの理論の静的および動的な精度特性についていくつかの基本的項目に対し詳細な検討もなされている。ここで考えようとするものも、そのような拡張理論の定式化の流れに沿ういま1つの一般化平板理論の構築を目指そうとするもので、一定厚の平板の、厚さ方向座標  $x_3$  に関する Legendre 多項式級数を用いて変位成分  $u_j$  を展開し、基礎式を誘導しようとするものである。この展開級数を採用するのは、この級数展開による結果は、数値計算に際して、採用する有限項の項数(の次数)が同じであれば、本質的にベキ展開法ないし Chebyshev 展開法によるそれらと全く同一の結果を与えるものであるが、等質性の

場合あるいは層状性のような厚さ方向に非均質な場合でも、対象とする材料密度が板厚方向に関して一定であれば、動的な項において(後出の)相異なる変位係数同士に連成が生じず、またおのおのの空間座標に関する項も比較的すっきりした項からなる理論式が得られることの利点があるためである。したがって、本論文ではその利点が有効に生かされる動的な問題の数値例も理論式の提案とともに示す。なお、Legendre 多項式の有限項を採用して定式化したものとして Mindlin & Medick<sup>7)</sup>、Medick & Pao<sup>8)</sup>、Moon<sup>9)</sup> 等の論文が列举できるが、ここではそれらの理論式を統一的に誘導するとともに、付録において、Chebyshev 多項式展開を実施した結果についても提示する。なお、平板は一定の厚さの等質ないし層状性であると仮定する。

### 2. 理論式の誘導

まず、Fig.1 に示すように、一定厚さ  $2b(=h)$  の平板中央面が  $x_1-x_2$  平面となるような直交デカルト座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  を採用し、三次元変位  $u_j = u_j(x_1, x_2, x_3; t)$  を板厚方向の座標  $x_3$  に関して、次式のように Legendre 多項式級数に展開できるものと仮定する。

$$u_j = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi) \cdot u_j^{(n)} \dots \dots \dots (1)$$

\* 正会員 工博 山梨大学助教授 工学部土木工学科  
(〒400 甲府市武田 4-3-11)

\*\* 正会員 工修 福島工業高等専門学校講師 土木工学科  
(〒970 いわき市平上荒川字長尾 30)

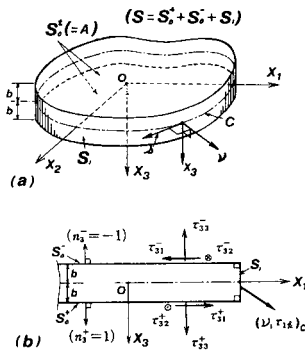


Fig. 1 Geometry of plate and surface tractions.

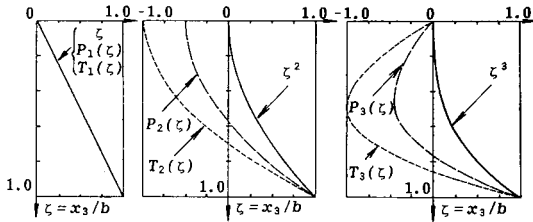


Fig. 2 Distributions along the thickness of Power series  $\zeta^n$ , Legendre  $P_n(\zeta)$  and Chebyshev  $T_n(\zeta)$  polynomials expansions.

ここに、 $\zeta = x_3/b$  であり、 $u_j^{(n)}$  は平板面内の座標  $x_1, x_2$  および時間  $t$  の関数で、一般に変位係数とよばれる。また、 $P_n(\zeta)$  は  $n$  次の Legendre 多項式で次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_0(\zeta) &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2 - 1)^n; P_0(\zeta) = 1, P_1(\zeta) = \zeta, \\ P_2(\zeta) &= \frac{1}{2} (3\zeta^2 - 1), P_3(\zeta) = \frac{1}{2} (5\zeta^3 - 3\zeta), \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

変位係数  $u_j^{(n)}$  の幾何学的内容 (板厚方向の変位モード) の一部が Fig. 2 に示されている。

同図中には、参考のため (板厚方向に基準化した座標  $\zeta = x_3/b$  に関して) ベキ展開, Chebyshev 展開した場合の結果も示されている。式 (1) を線形弾性論の幾何学的関係式に代入整理するとひずみテンソル  $\epsilon_{ij}$  が次式のように求められる。

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N P_n(\zeta) \left\{ (\delta_{i\alpha} u_{j,\alpha}^{(n)} + \delta_{j\alpha} u_{i,\alpha}^{(n)}) + \frac{2n+1}{b} \sum_{m=1}^{N-n} \delta_m (\delta_{i3} u_j^{(m+n)} + \delta_{j3} u_i^{(m+n)}) \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

$$\delta_m = \frac{1}{2} \{ 1 - (-1)^m \} \dots\dots\dots (4)$$

上式中の  $\delta_{ij}$  は Kronecker の delta であり、添字のうちギリシア文字は面内座標に關与するもので 1, 2 を、ラ

テン文字は 1, 2, 3 をとり、テンソルの和の規約が採用されている。また、コンマの後の記号は、その記号の座標に關する偏微分を意味するものとする。

次に構成方程式として一般化 Hooke の法則が成立するものとするれば、応力テンソル  $\tau_{ij}$  は次式で表わされる。

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \dots\dots\dots (5)$$

上式中の  $C_{ijkl}$  は弾性定数であり、一般的には 21 個の独立な定数となる。等方性材料の場合には次式のように 2 個の Lamé 定数  $\lambda$  および  $G$  のみで表示される。

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) \dots\dots\dots (6)$$

なお、上式の  $\lambda, G$  は弾性係数  $E$ , ポアソン比  $\nu$  を用いて次のように表わされる。

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, G = \frac{E}{2(1+\nu)} \dots\dots\dots (7)$$

式 (5) に式 (3) の関係式を代入すれば応力  $\tau_{ij}$  が変位係数  $u_j^{(n)}$  を用いて次式のように求められる。

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N P_n(\zeta) \left\{ (C_{ijka} u_{k,a}^{(n)} + C_{ijla} u_{l,a}^{(n)}) + \frac{2n+1}{b} \sum_{m=1}^{N-n} \delta_m (C_{ijka} u_k^{(m+n)} + C_{ijls} u_s^{(m+n)}) \right\} \dots\dots\dots (8)$$

さて、二次元化平板理論の支配方程式を求めるために次式の一般化 Hamilton 原理を考える。

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V (T - U) dV + \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \int_S t_j \delta u_j dS + \int_V f_j \delta u_j dV \right] = 0 \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $t_j (= \tau_{ij} n_i)$  は表面力、 $f_j$  は単位体積当たりの物体力であり、 $T$  および  $U$  は運動エネルギーおよびひずみエネルギーであって、それぞれ次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j, U = \frac{1}{2} \tau_{ij} \epsilon_{ij} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\rho$  は密度を表わす。

いま、式 (9) に式 (1)~(4) および式 (8) を代入し、変分を実行して式を整理すると最終的に次式が求められる。

(支配方程式) :

$$\tau_{\alpha j, \alpha}^{(n)} - \frac{1}{b} \sum_{m=1}^n \delta_m \{ 2(n-m) + 1 \} \tau_{3j}^{(n-m)} + \frac{1}{b} (F_j^{(n)} + f_j^{(n)}) = \sum_{m=0}^n \rho^{(m,n)} \cdot \ddot{u}_j^{(m)} \dots\dots\dots (11)$$

(境界条件式) :

$$\dot{T}_j^{(n)} = b n_\alpha \tau_{\alpha j}^{(n)} \text{ or } \bar{u}_j^{(n)} = u_j^{(n)} \text{ on } C \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $\bar{u}_j^{(n)}$  は平板の側面 (端面) 境界  $C$  で与えられた表面変位  $\bar{u}_j$  の Legendre 級数展開に対する第  $n$  次成分であり次式の関係式で与えられる。

$$\bar{u}_j = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\zeta) \cdot \bar{u}_j^{(n)} \dots\dots\dots (13)$$

また、式 (11), (12) 中の他の記号は次のように定義さ

れる。

$$\left. \begin{aligned} F_j^{(m)} &= [\tau_{3j} \cdot P_n(\xi)]_{\xi=-1}^{\xi=1}, \quad f_j^{(m)} = b \int_{-1}^1 f_j \cdot P_n(\xi) d\xi, \\ \dot{T}_j^{(m)} &= b \int_{-1}^1 (n \alpha \tau_{\alpha})_c \cdot P_n(\xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{(m)} &= \int_{-1}^1 \tau_{ij} \cdot P_n(\xi) d\xi \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ C_{ij\alpha}^{(m,n)} u_{i,\alpha}^{(m)} + \frac{2m+1}{b} C_{ij\beta}^{(m,n)} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k u_i^{(m+k)} \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots(15)$$

$$[C_{ijkl}^{(m,n)}, \rho^{(m,n)}] = \int_{-1}^1 [C_{ijkl}, \rho] \cdot P_m(\xi) \cdot P_n(\xi) d\xi. \dots(16)$$

なお、板厚方向に一定な  $C_{ijkl}$  あるいは  $\rho$  の場合、すなわち  $x_3$  に独立な場合(たとえば等質平板の場合)には、上式は次のように直交条件を満たし、簡単になる。

$$[C_{ijkl}^{(m,n)}, \rho^{(m,n)}] = \delta_{mn} \cdot \frac{2}{2n+1} [C_{ijkl}, \rho]. \dots\dots\dots(16)'$$

したがって、支配方程式 (11) に上式までの関係式を代入し、整理すると変位係数  $u_i^{(m)}$  で示した平板の運動方程式が次のように求められる。

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} C_{\alpha\beta\delta i} u_{i,\alpha\beta}^{(m)} + \frac{2m+1}{b} C_{\alpha\beta\delta i} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k u_{i,\alpha}^{(m+k)} \\ & - \sum_{p=1}^n \delta_p \frac{2(n-p)+1}{b} \left\{ C_{3\beta\alpha i}^{(m,n-p)} u_{i,\alpha}^{(m)} \right. \\ & \left. + \frac{2m+1}{b} C_{3\beta\delta i}^{(m,n-p)} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k u_i^{(m+k)} \right\} + \frac{1}{b} (F_j^{(m)} + f_j^{(n)}) \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{(m,n)} \ddot{u}_j^{(m)}. \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

等質性平板の場合、上式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n+1} C_{\alpha\beta\delta i} u_{i,\alpha\beta}^{(n)} + \frac{1}{b} C_{\alpha\beta\delta i} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k u_{i,\alpha}^{(n+k)} \\ & - \frac{1}{b} C_{3\beta\alpha i} \sum_{k=1}^n \delta_k u_{i,\alpha}^{(n-k)} \\ & - C_{3\beta\delta i} \sum_{p=1}^n \delta_p \frac{2(n-p)+1}{b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k u_i^{(n-p+k)} \\ & + \frac{1}{2b} (F_j^{(n)} + f_j^{(n)}) = \frac{\rho}{2n+1} \ddot{u}_j^{(n)}. \dots\dots\dots(17)' \end{aligned}$$

特に、等質等方性の平板の場合\*、上式の  $C_{ijkl}$  に式(6)を代入し整理すれば、最終的に次のような運動方程式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2n+1} |G \nabla^2 u_{\alpha}^{(m)} + (\lambda + G) e_{\alpha}^{(m)}| + \frac{\lambda}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k u_{3,\alpha}^{(m+k)} \\ & - \frac{G}{b} \sum_{k=1}^n \delta_k u_{3,\alpha}^{(n-k)} - \frac{G}{b^2} \sum_{p=1}^n \delta_p |2(n-p)+1| \\ & \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k u_{\alpha}^{(n-p+k)} + \frac{1}{2b} (F_{\alpha}^{(m)} + f_{\alpha}^{(n)}) = \frac{\rho}{2n+1} \ddot{u}_{\alpha}^{(m)}. \end{aligned} \right\}$$

\* 一般的な関係式として等方性の場合、式 (17)' に現われる量は以下に示すような等式により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} C_{\alpha\beta\delta i} u_{i,\alpha\beta}^{(m)} &= \delta_{j\gamma} |G \nabla^2 u_j^{(m)} + (\lambda + G) e_j^{(m)}| + \delta_{j\beta} G \nabla^2 u_3^{(m)}, \\ C_{\alpha\beta\delta i} u_{i,\alpha}^{(m)} &= \delta_{j\beta} \lambda u_{3,\alpha}^{(m)} + \delta_{j\beta} G e_j^{(m)}, \\ C_{3\alpha i} u_{i,\alpha}^{(m)} &= \delta_{j\beta} G u_{3,\beta}^{(m)} + \delta_{j\beta} \lambda e_j^{(m)}, \\ C_{3\beta\delta i} u_i^{(m)} &= \delta_{j\beta} G u_{\beta}^{(m)} + \delta_{j\beta} (\lambda + G) u_3^{(m)}. \end{aligned} \right\}$$

ここに、 $e^{(m)}$ 、 $\nabla^2$  はそれぞれ式 (18) に与えられている。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{G}{2n+1} \nabla^2 u_3^{(m)} + \frac{G}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k e^{(m+k)} - \frac{\lambda}{b} \sum_{k=1}^n \delta_k e^{(m-k)} \\ & - \frac{\lambda + 2G}{b^2} \sum_{p=1}^n \delta_p |2(n-p)+1| \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k u_3^{(n-p+k)} \\ & + \frac{1}{2b} (F_3^{(m)} + f_3^{(n)}) = \frac{\rho}{2n+1} \ddot{u}_3^{(m)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)''$$

ここに、

$$e^{(m)} = u_{\alpha,\alpha}^{(m)}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \dots\dots\dots(18)$$

上式 (17)' および (17)'' にみるように、対象とする平板の材料密度  $\rho$  が  $x_3$  に関して独立である場合には(たとえ非均質ないし層状性の場合であっても)、 $m$  次と  $n$  次 ( $m \neq n$  とする) の変位係数に関する慣性項は連成しないことになる。このことは次節で取り扱うような一般的な振動や波動問題では取り扱いが簡便となる利点を有することになる。なお、付録Aには Chebyshev 展開を実施した同種の結果の式が要約して示されている。これらの式 (17)~(17)'' は著者らの以前に求めたベキ展開による場合を取り扱った論文の式 (16)、(17) および Fourier 展開による場合を取り扱った論文の式 (16) に対応するものである。これらの式は打切り項に何らの制限も設けられていない一般的な高次平板理論の支配方程式をなすものである。なお、変位仮定をここで行ったように Legendre 展開としても、その他のベキ展開、Chebyshev 展開としても、その式構造は多少異なるものの同一次数までの有限項採用によって与えられた問題を解けば必ず同一の結果が求められることが保証されるが、先にも述べたように、個々の問題への適用の難易はその支配式の複雑さに影響されることになり、一般に本論文で取り上げた Legendre 展開法のものが一番簡単で、特に、動的問題への適用性に勝っていることが指摘できよう<sup>7)</sup>。Fourier 展開のものは同一次数まで採用しても、その他の展開法の結果と必ずしも一致しないとともに変位係数の個数が増大し、また一般に式構造も他のものに比較してやや複雑となるのは前論文<sup>4)</sup>でも実証したとおりである。

### 3. 各種の一般化高次理論における項数の打切り

前節および付録Aならびに以前に提案した合計、4種類一般化高次理論の低次打切りに対する支配方程式を一覧表として以下に列記しよう。ここでは等質等方性に限定し、まず、1st-order の曲げおよび伸縮の運動方程式を示す。その際、Mindlin<sup>6)</sup> が実施したように二次の慣性項  $\rho \dot{u}_i^2$  は無視するが、左辺に現われる  $u_3^2$  の項は残置させることにする。

(曲げ挙動：1st-order)

(a) ベキ級数展開：

$$\left. \begin{aligned} G(\nabla^2 u_3^{(0)} + e^{(1)}) + \frac{1}{2b} (F_3^{(0)} + f_3^{(0)}) &= \rho \dot{u}_3^{(0)}, \\ G \nabla^2 u_a^{(1)} + (\lambda + G) e_a^{(1)} + \frac{2\lambda u_{3,a}^{(2)}}{b} - \frac{3}{b^2} G(u_{3,\alpha}^{(0)} + u_a^{(1)}) \\ &+ \frac{3}{2b^3} (F_a^{(1)} + f_a^{(1)}) = \rho \dot{u}_a^{(1)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)_P$$

(b) Legendre 多項式展開：

$$\left. \begin{aligned} G(\nabla^2 u_3^{(0)} + \frac{1}{b} e^{(1)}) + \frac{1}{2b} (F_3^{(0)} + f_3^{(0)}) &= \rho \dot{u}_3^{(0)}, \\ G \nabla^2 u_a^{(1)} + (\lambda + G) e_a^{(1)} + \frac{3}{b} \lambda u_{3,\alpha}^{(2)} - \frac{3}{b} G(u_{3,\alpha}^{(0)} + \frac{1}{b} u_a^{(1)}) \\ &+ \frac{3}{2b} (F_a^{(1)} + f_a^{(1)}) = \rho \dot{u}_a^{(1)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)_L$$

(c) Chebyshev 多項式展開：

$$\left. \begin{aligned} G(\nabla^2 u_3^{(0)} + \frac{1}{b} e^{(1)}) + \frac{1}{2b} (F_3^{(0)} + f_3^{(0)}) &= \rho \dot{u}_3^{(0)}, \\ G \nabla^2 u_a^{(1)} + (\lambda + G) e_a^{(1)} + \frac{4}{b} \lambda u_{3,\alpha}^{(2)} - \frac{3}{b} G(u_{3,\alpha}^{(0)} + \frac{1}{b} u_a^{(1)}) \\ &+ \frac{3}{2b} (F_a^{(1)} + f_a^{(1)}) = \rho \dot{u}_a^{(1)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)_C$$

(d) Fourier-cosine 展開：

$$\left. \begin{aligned} G(\nabla^2 u_3^{(0)} + \frac{1}{b} e^{(1)}) + \frac{1}{2b} (F_3^{(0)} + f_3^{(0)}) &= \rho \dot{u}_3^{(0)}, \\ G \nabla^2 u_a^{(1)} + (\lambda + G) e_a^{(1)} - \frac{2}{b} G(u_{3,\alpha}^{(0)} + \frac{\pi^2}{8b} u_a^{(1)}) \\ &+ \frac{1}{b} (F_a^{(1)} + f_a^{(1)}) = \rho \dot{u}_a^{(1)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)_F$$

上式で下線を施した項を Mindlin<sup>6)</sup> に従って、面外方向 ( $x_3$  方向) の直応力の一次モーメントの和  $\tau_{33}^{(1)}$  の式から決定することにすれば、たとえば、ベキ展開に対しては

$$u_3^{(2)} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + 2G)} e^{(1)} + \frac{3}{4b^3} \frac{\tau_{33}^{(1)}}{\lambda + 2G} \dots\dots\dots (20)_P$$

Legendre 展開に対しては

$$u_3^{(2)} = -\frac{b\lambda}{3(\lambda + 2G)} e^{(1)} + \frac{b\tau_{33}^{(1)}}{2(\lambda + 2G)} \dots\dots\dots (20)_L$$

とそれぞれ求められる\*。これらの式を先の諸式に代入すれば、補正を行った 1st-order の曲げ挙動の支配式が次のように求められる。

(a) ベキ級数展開：

$$\chi^2 G(\nabla^2 u_3^{(0)} + e^{(1)}) + \frac{1}{2b} (F_3^{(0)} + f_3^{(0)}) = \rho \dot{u}_3^{(0)},$$

$$\left. \begin{aligned} G(\nabla^2 u_a^{(1)} + \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + 2G} e_a^{(1)}) - \frac{3}{b^2} \chi^2 G(u_{3,\alpha}^{(0)} + u_a^{(1)}) \\ + \frac{3}{2b^3} \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \tau_{33,\alpha}^{(1)} + F_a^{(1)} + f_a^{(1)} \right\} = \rho \dot{u}_a^{(1)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)_P$$

(b)' Legendre 多項式展開：

$$\left. \begin{aligned} G(\nabla^2 u_3^{(0)} + \frac{1}{b} e^{(1)}) + \frac{1}{2b} (F_3^{(0)} + f_3^{(0)}) &= \rho \dot{u}_3^{(0)}, \\ G(\nabla^2 u_a^{(1)} + \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + 2G} e_a^{(1)}) - \frac{3}{b} G(u_{3,\alpha}^{(0)} + u_a^{(1)}) \\ &+ \frac{3}{2} \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \tau_{33,\alpha}^{(1)} + F_a^{(1)} + f_a^{(1)} \right\} = \rho \dot{u}_a^{(1)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)_L$$

式 (21)<sub>P</sub> の  $\chi^2 (= \pi^2/10)$  は Mindlin 論文<sup>6)</sup> において thickness-stretch の cutoff frequency が三次元解と一致するように導入された補正係数である。 $\chi^2$  を単位にとればベキ展開、Legendre 展開はともに本質的に同一の式となる。

次に伸縮挙動に関して低次項を採用した 1st-order の平板理論式を提示すると以下のようなのである。

(伸縮挙動：1st-order)

(a) ベキ級数展開：

$$\left. \begin{aligned} G \nabla^2 u_a^{(0)} + (\lambda + G) e_a^{(0)} + \lambda \chi u_{3,\alpha}^{(1)} + \frac{1}{2b} (F_a^{(0)} + f_a^{(0)}) &= \rho \dot{u}_a^{(0)}, \\ \frac{1}{3} G \nabla^2 u_3^{(1)} - \frac{\lambda \chi}{b^2} e^{(0)} - \frac{\chi^2}{b^2} (\lambda + 2G) u_3^{(1)} \\ &+ \frac{1}{2b^3} (F_3^{(1)} + f_3^{(1)}) = \frac{1}{3} \rho \dot{u}_3^{(1)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)_P$$

(b), (c) Legendre 多項式, Chebyshev 多項式展開：

$$\left. \begin{aligned} G \nabla^2 u_a^{(0)} + (\lambda + G) e_a^{(0)} + \frac{\lambda}{b} u_{3,\alpha}^{(1)} + \frac{1}{2b} (F_a^{(0)} + f_a^{(0)}) &= \rho \dot{u}_a^{(0)}, \\ \frac{1}{3} G \nabla^2 u_3^{(1)} - \frac{\lambda}{b} e^{(0)} - \frac{1}{b^2} (\lambda + 2G) u_3^{(1)} \\ &+ \frac{1}{2b} (F_3^{(1)} + f_3^{(1)}) = \frac{1}{3} \rho \dot{u}_3^{(1)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)_{L,C}$$

(d) Fourier-cosine 展開：

$$\left. \begin{aligned} G \nabla^2 u_a^{(0)} + (\lambda + G) e_a^{(0)} + \frac{\lambda \alpha_1}{b} u_{3,\alpha}^{(1)} + \frac{1}{2b} (F_a^{(0)} + f_a^{(0)}) \\ = \rho \dot{u}_a^{(0)}, \\ \frac{\alpha_2}{3} G \nabla^2 u_3^{(1)} - \frac{2\lambda \alpha_1}{3b} e^{(0)} - \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{2b} \right)^2 (\lambda + 2G) u_3^{(1)} \\ + \frac{1}{3b} (F_3^{(1)} + f_3^{(1)}) = \frac{1}{3} \rho \dot{u}_3^{(1)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)_F$$

上記の式 (22)<sub>P</sub> の補正係数  $\chi^2 (= \pi^2/12)$  は Kane & Mindlin 論文<sup>10)</sup> で、また式 (22)<sub>F</sub> に導入した  $\alpha_1 (= \pi/\sqrt{8})$ ,  $\alpha_2$  (これはポアソン比に依存する) は Lee & Nikodem 論文<sup>11)</sup> で導入されている補正係数である。これらも三次

\* ここでは、 $\tau_{33}^{(1)} \neq 0$  とした式として表示した。この値は板厚方向直応力  $\tau_{33}$  の板厚にわたる一次モーメントで定義されるもので、表面に鉛直荷重  $p$  が作用する場合には一般に零ではなく、有限値として存在する。これについての二、三の考察が文献<sup>5)</sup> に与えられている。

元解とのよりよい接合を計るために導入されたものである。式 (22)<sub>Lc</sub> は式 (22)<sub>p</sub> での補正係数  $x^2$  を単位にとつたものと全く同一となる。言い換えればこの order ではベキ展開, Legendre 展開および Chebyshev 展開は補正係数を導入しなければ同じ支配式となることを意味している。

次に 2nd-order の曲げ挙動の場合についてベキ展開および Legendre 展開の結果を示せば次のようである。

(曲げ挙動: 2nd-order)

(a) ベキ級数展開:

$$\left. \begin{aligned} & G(\nabla^2 u_3^{(0)} + e^{(1)}) + \frac{b^2}{3} G \nabla^2 u_3^{(2)} + \frac{1}{2b} (F_3^{(0)} + f_3^{(0)}) \\ & \qquad \qquad \qquad = \rho \ddot{u}_3^{(0)} + \frac{b^2}{3} \rho \ddot{u}_3^{(2)}, \\ & \frac{1}{3} |G \nabla^2 u_\alpha^{(1)} + (\lambda + G)e_\alpha^{(1)} + (2\lambda G)u_{3,\alpha}^{(1)}| - \frac{G}{b^2} u_{3,\alpha}^{(0)} \\ & \qquad \qquad \qquad - \frac{G}{b^2} u_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2b^3} (F_\alpha^{(1)} + f_\alpha^{(1)}) = \frac{1}{3} \rho \ddot{u}_\alpha^{(1)}, \\ & \frac{1}{3} |G \nabla^2 u_3^{(0)} - (2\lambda - G)e^{(1)}| + \frac{b^2}{5} G \nabla^2 u_3^{(2)} \\ & \qquad \qquad \qquad - \frac{4}{3} (\lambda + 2G)u_3^{(2)} + \frac{1}{2b^3} (F_3^{(2)} + f_3^{(2)}) \\ & \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{3} \rho \ddot{u}_3^{(0)} + \frac{b^2}{5} \rho \ddot{u}_3^{(2)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)_p$$

(b) Legendre 多項式展開:

$$\left. \begin{aligned} & G\left(\nabla^2 u_3^{(0)} + \frac{1}{b} e^{(1)}\right) + \frac{1}{2b} (F_3^{(0)} + f_3^{(0)}) = \rho \ddot{u}_3^{(0)}, \\ & \frac{1}{3} |G \nabla^2 u_\alpha^{(1)} + (\lambda + G)e_\alpha^{(1)} + \frac{\lambda}{b} u_{3,\alpha}^{(2)} - \frac{G}{b} (u_{3,\alpha}^{(0)} + \frac{1}{b} u_\alpha^{(1)}) \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2b} (F_\alpha^{(1)} + f_\alpha^{(1)}) = \frac{1}{3} \rho \ddot{u}_\alpha^{(1)}, \\ & \frac{1}{5} G \nabla^2 u_3^{(2)} - \frac{\lambda}{b} e^{(1)} - \frac{3}{b^2} (\lambda + 2G)u_3^{(2)} \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2b} (F_3^{(2)} + f_3^{(2)}) = \frac{1}{5} \rho \ddot{u}_3^{(2)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)_L$$

続いて 2nd-order の伸縮挙動に対するベキ展開および Legendre 展開の結果はそれぞれ次のようになる。

(伸縮挙動: 2nd-order)

(a) ベキ級数展開:

$$\left. \begin{aligned} & G \nabla^2 u_\alpha^{(0)} + (\lambda + G)e_\alpha^{(0)} + \lambda u_{3,\alpha}^{(1)} + \frac{b^2}{3} |G \nabla^2 u_\alpha^{(2)} \\ & \qquad \qquad \qquad + (\lambda + G)e_\alpha^{(2)} + \frac{1}{2b} (F_\alpha^{(0)} + f_\alpha^{(0)}) = \rho \ddot{u}_\alpha^{(0)} + \frac{b^2}{3} \rho \ddot{u}_\alpha^{(2)}, \\ & \frac{1}{3} |G \nabla^2 u_3^{(1)} - (\lambda - 2G)e^{(2)}| - \frac{\lambda}{b^2} e^{(0)} - \frac{1}{b^2} (\lambda + 2G) \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2b^3} (F_3^{(1)} + f_3^{(1)}) = \frac{1}{3} \rho \ddot{u}_3^{(1)}, \\ & \frac{1}{3} |G \nabla^2 u_\alpha^{(0)} + (\lambda + G)e_\alpha^{(0)} + (\lambda - 2G)u_{3,\alpha}^{(1)}| \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{b^2}{5} |G \nabla^2 u_\alpha^{(2)} + (\lambda + G)e_\alpha^{(2)} - \frac{4}{3} G u_\alpha^{(2)} \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2b^3} (F_\alpha^{(2)} + f_\alpha^{(2)}) = \frac{1}{3} \rho \ddot{u}_\alpha^{(0)} + \frac{b^2}{5} \rho \ddot{u}_\alpha^{(2)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)_p$$

(b) Legendre 多項式展開:

$$\left. \begin{aligned} & G \nabla^2 u_\alpha^{(0)} + (\lambda + G)e_\alpha^{(0)} + \frac{\lambda}{b} x_1 u_{3,\alpha}^{(1)} + \frac{1}{2b} (F_\alpha^{(0)} + f_\alpha^{(0)}) \\ & \qquad \qquad \qquad = \rho \ddot{u}_\alpha^{(0)}, \\ & \frac{1}{3} G x_3^2 \nabla^2 u_3^{(1)} + \frac{G x_3^2}{3} e^{(2)} - \frac{\lambda}{b} x_1 e^{(0)} - \frac{x_1^2}{b^2} (\lambda + 2G)u_3^{(1)} \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2b} (F_3^{(1)} + f_3^{(1)}) = \frac{x_3^2}{3} \rho \ddot{u}_3^{(1)}, \\ & \frac{1}{5} |G \nabla^2 u_\alpha^{(2)} + (\lambda + G)e_\alpha^{(2)} - \frac{G}{b} x_2 u_{3,\alpha}^{(1)} - \frac{3}{b^2} G x_2^2 u_\alpha^{(2)} \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2b} (F_\alpha^{(2)} + f_\alpha^{(2)}) = \frac{x_2^2}{5} \rho \ddot{u}_\alpha^{(2)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)_L$$

式 (24)<sub>L</sub> の  $x_i$  ( $i=1\sim 4$ ) は Mindlin & Medick<sup>7)</sup> によって導入された補正係数であり,  $x_1/x_3 = \pi/\sqrt{12}$ ,  $x_2/x_4 = \pi/\sqrt{15}$  のような値をとることが彼らの論文の中で指摘されている。もともとの Legendre 展開ではこれらの  $x_i$  をすべて 1.0 と置いてやればよい。

4. 動的応答解析のための計算手法

本節では, 前節に示した Legendre 展開による支配式を用いて動的応答解析を行う場合の具体的な計算手法の概要を述べる。なお, ここでは端面での境界条件が

$$\left. \begin{aligned} & u_2^{(m)} = u_3^{(m)} = 0, \quad \tau_{11}^{(m)} = \int_{-1}^1 \tau_{11} \cdot P_m(\xi) d\xi = 0 \text{ at } x_1 = 0, l_1 \\ & u_1^{(m)} = u_3^{(m)} = 0, \quad \tau_{22}^{(m)} = \int_{-1}^1 \tau_{22} \cdot P_m(\xi) d\xi = 0 \text{ at } x_2 = 0, l_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

で与えられるような四辺単純支持の矩形板 ( $l_1 \times l_2 \times 2b$ ) を対象とする。したがって, これらの境界条件のもとで平板の上表面に載荷する動的荷重および変位係数の解を  $x_1 - x_2$  座標に関し, 2重三角級数で展開して次の形におくことができる。

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2; t) &= T(t) \cdot p(x_1, x_2) \\ &= T(t) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \alpha_m \xi \cdot \sin \beta_n \eta. \end{aligned} \dots\dots\dots (26)$$

$$\left. \begin{aligned} & u_1^{(n)} = A_\lambda(t) \cdot \sum_m \sum_n \cos \alpha_m \xi \cdot \sin \beta_n \eta, \\ & u_2^{(n)} = B_\lambda(t) \cdot \sum_m \sum_n \sin \alpha_m \xi \cdot \cos \beta_n \eta, \\ & u_3^{(n)} = C_\lambda(t) \cdot \sum_m \sum_n \sin \alpha_m \xi \cdot \sin \beta_n \eta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

$$\left. \begin{aligned} & a_{mn} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p(x_1, x_2) \sin \alpha_m \xi \cdot \sin \beta_n \eta \cdot d\xi d\eta \\ & \alpha_m = (2m-1)\pi/2, \quad \beta_n = (2n-1)\pi/2, \\ & \xi = x_1/l_1, \quad \eta = x_2/l_2. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

まず、支配方程式 (17) を  $n$  の低次のいくつかに打ち切り、有限項として具体的に展開する。ここでは、時間関数  $T(t)$  が階段関数  $H(t)$  である場合、すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{31} = \tau_{32} = 0, \quad \tau_{33} = -H(t) \cdot p(x_1, x_2) \text{ at } x_3 = -b, \\ \tau_{31} = \tau_{32} = \tau_{33} = 0 \text{ at } x_3 = b. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

で与えられる場合について、有限項で打切った支配式に Laplace 変換を施し、初期条件として

$$u_j^{(m)}(x_1, x_2; 0) = \dot{u}_j^{(m)}(x_1, x_2; 0) = 0 \dots\dots\dots(30)$$

を設定すれば、たとえば、変位係数として  $u_1^{(0)} \sim u_7^{(3)}$ ,  $u_2^{(0)} \sim u_2^{(3)}$ ,  $u_3^{(0)} \sim u_3^{(3)}$  の 11 個を採用した場合の曲げ挙動の支配式 (2nd order 理論) を Laplace 変換したものは次式となる。

$$s[\underline{d}][\underline{X}] = -\frac{a_{mn}}{2b} \{F\} \dots\dots\dots(31)$$

ここに、 $[\underline{X}]$ ,  $\{F\}$  はそれぞれ Laplace 変換された変位係数ベクトル、一般化荷重ベクトルでそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} [\underline{X}] &= [\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_0, \bar{A}_3, \bar{B}_3, \bar{C}_2]^T, \\ \{F\} &= \{0, 0, 1, 0, 0, 1\}^T. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

また  $[\underline{d}]$  は対称な係数マトリックスで各要素は次のようになる。

$$[\underline{d}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \bar{D}_1 - \frac{C_{55}}{b^2} & -\frac{(C_{12} + C_{66})}{3} \hat{\alpha}_m \hat{\beta}_n & -\frac{C_{55}}{b} \hat{\alpha}_m \\ & \frac{1}{3} \bar{D}_2 - \frac{C_{44}}{b^2} & -\frac{C_{44}}{b} \hat{\beta}_n \\ & & \bar{D}_3 \\ \text{(Sym.)} & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{C_{55}}{b^2} & 0 & \frac{C_{13}}{b} \hat{\alpha}_m \\ 0 & -\frac{C_{44}}{b^2} & \frac{C_{23}}{b} \hat{\beta}_n \\ -\frac{C_{55}}{b} \hat{\alpha}_m & -\frac{C_{44}}{b} \hat{\beta}_n & 0 \\ \frac{1}{7} \bar{D}_1 - \frac{6}{b^2} C_{55} & -\frac{(C_{12} + C_{66})}{7} \hat{\alpha}_m \hat{\beta}_n & -\frac{C_{55}}{b} \hat{\alpha}_m \\ \text{(Sym.)} & \frac{1}{7} \bar{D}_2 - \frac{6}{b^2} C_{44} & -\frac{C_{44}}{b} \hat{\beta}_n \\ & & \frac{1}{5} \bar{D}_3 - \frac{3}{b^2} C_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(33)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{D}_1 &= -|\rho s^2 + C_{11} \hat{\alpha}_m^2 + C_{66} \hat{\beta}_n^2|, \quad \bar{D}_2 = -|\rho s^2 + C_{66} \hat{\alpha}_m^2 \\ &\quad + C_{33} \hat{\beta}_n^2|, \quad \bar{D}_3 = -|\rho s^2 + C_{55} \hat{\alpha}_m^2 + C_{44} \hat{\beta}_n^2|, \\ \hat{\alpha}_m &= \alpha_m / l_1, \quad \hat{\beta}_n = \beta_n / l_2, \quad C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2G, \\ C_{12} &= C_{23} = C_{13} = \lambda, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = G. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

上式にみるように本文中で示した Legendre 展開の平板理論によれば各変位係数の慣性項には互いに連成はなく、したがって対角項  $d_{kk}$  にのみ Laplace 変換の助変数  $s$  が含まれる。これ以降は次のような手順に従って解析を進めればよい。

① まず、上記の係数行列の行列式に関して  $|\underline{d}| = 0$  を満足する根  $s_j (j=1 \sim 12)$  を求める ( $s|\underline{d}| = 0$  の根は  $s_j (j=1 \sim 12)$  および  $s_{13} = 0$  となる)。

② 式 (31) を解いて次式が得られる。

$$\bar{X}_j = -\frac{\Delta_j}{s|\underline{d}|} \cdot \frac{a_{mn}}{2b}, \quad (j=1, 2, \dots, 6) \dots\dots\dots(35)$$

ここに、 $\Delta_j$  は行列  $[\underline{d}]$  の  $j$  列目の要素  $d_{ij} (i=1, \dots, 6)$  の代わりに列ベクトル  $\{F\}$  を代入したものの行列式の値である。

③ 次に有理多項式の留数計算により Laplace 逆変換を行って次式が求められる。

$$\begin{aligned} X_j &= -\frac{a_{mn}}{2b} \cdot \sum_{k=1}^{13} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{\Delta_j}{\frac{d}{ds}(s|\underline{d}|)} e^{s_k t} \\ &= -\frac{a_{mn}}{2b} \sum_{k=1}^{13} \frac{\Delta_j(s_k)}{|\underline{d}(s_k)| - 2\rho s_k^2 \sum_i A_i(s_k)} e^{s_k t} \\ &\equiv -\frac{a_{mn}}{2b} \sum_{k=1}^{13} \Delta_{j(k)} \cdot e^{s_k t}. \end{aligned} \dots\dots\dots(36)$$

ここに、 $A_i^j$  は行列式  $|\underline{d}|$  の要素  $d_{ij}$  の余因子である。

④ ③の演算の結果、実領域での変位係数が次のように求められる。たとえば、次のようである。

$$\begin{aligned} u_1^{(j)}(x_1, x_2; t) &= -\frac{1}{2b} \sum_m \sum_n \left\{ \sum_{k=1}^{13} \Delta_{j(k)} \exp(s_k t) \right\} \\ &\quad \times a_{mn} \cos \alpha_m \xi \cdot \sin \beta_n \eta. \end{aligned} \dots\dots\dots(37)$$

ここに、 $j = (3\hat{j} - 1)/2$ 。

⑤ これらの変位係数から、式 (3), (8) によって変位  $u_j$ , 応力  $\tau_{ij}$  を求められる。

以上計算過程の概要を 2nd order 理論の曲げ挙動に対して示したが、その他の order の理論ならびに伸縮挙動に関しても全く同様な手法により計算可能である。なお、これらの解は具体的には静的荷重に対する解 ( $s=0$  における留数) と固有モードの重ね合わせによる動的な解 ( $s=s_k, k=1 \sim 12$  における留数) との和となっている。

### 5. 数値計算例

前節までに述べた理論の支配式ならびに計算手法を用い、基本的な解析方法の確認を主目的として、ここでは四辺単純支持の等方性の正方形板 ( $l_1 = l_2 = l$ ) を対象とし、 $p = T(t) \cdot p_0 \sin \frac{\pi x_1}{l} \cdot \sin \frac{\pi x_2}{l}$  なる正弦波分布荷重 (式 (26) の荷重係数が  $a_{mn} = p_0 \cdot \delta_{m1} \delta_{n1}$  の場合) が板上表面に作用した場合の解析を行う。まず、荷重が静的に作用した場合 ( $T(t) = \text{const.}$ ) の結果を示し、次に

この荷重が、時間的に階段関数形の動的荷重として作用した場合 ( $T(t)=H(t)$ ) についての応答解析結果を例示する。なお、ここでは前節で示した次の各次数の変位係数を採用した理論について比較を行う。まず、1st 理論は変位係数として  $u_a^{(0)}, u_a^{(1)}, u_s^{(0)}$  ( $a=1, 2$ ) の 5 つを採用したもので、等質性板の場合には前節までに述べたように、面外曲げ挙動と面内伸縮挙動との支配式は連成せず互いに独立な方程式系を構成することから結果的には  $u_a^{(0)}=0$  となって  $u_a^{(1)}, u_s^{(0)}$  の 3 つの変位係数のみが有効となり、結局、最低次の面外曲げ挙動のみを採用したものとなる。この理論は、せん断変形と回転慣性を考慮した Mindlin の平板理論<sup>6)</sup>に対応し、Mindlin の補正係数  $\kappa^2$  を単位 (i.e.  $\kappa^2=1.0$ ) としたものになっている。2nd 理論は  $u_a^{(0)} \sim u_a^{(3)}, u_s^{(0)} \sim u_s^{(2)}$  の計 11 個の変位係数を、また、3rd 理論は  $u_a^{(0)} \sim u_a^{(5)}, u_s^{(0)} \sim u_s^{(4)}$  の計 17 個をそれぞれ採用したものであり、両者とも曲げ挙動と伸縮挙動が分離した形で解かれ、それらの重ね合わせとして応答値が計算される。なお、ここで面外成分の変位係数  $u_s^{(0)}$  を面内成分  $u_a^{(0)}$  に比して一次だけ低次のものまでを採用した理由は、面外せん断応力の次数を面内成分によるものと面外成分によるものとで一致させるためである。このような変位係数の採用方式をとった結果、前述のように 1st 理論には面内伸縮挙動の効果が入らないため、ここでは新たに  $\hat{1st}$  理論として  $u_a^{(0)}, u_a^{(1)}, u_s^{(0)}$  に  $u_s^{(1)}$  を加えた 6 個の変位係数を採用して最低次の伸縮挙動の影響についても検討することとした。

(A) 正弦分布の静的荷重を受ける場合

前述の正弦分布荷重が上面に静的に作用した場合の変位と応力の板厚方向分布の解析結果を  $2b/l=0.5$  を例にとって示したものが Fig. 3 と Fig. 4 である。まず Fig. 3 は板中央位置での面外方向変位の分布を示したものである。古典理論、1st 理論による値は板厚方向に一定値をとることから板厚方向の直ひずみを表現し得ないことがわかる。 $\hat{1st}$  理論ではこれに最低次の面内挙動が重ね合わさっているため、板厚方向に直線変化の面外変位がさらに加わった分布となる。それ以上の高次の理論では次数が上がることにより、高次の曲げおよび伸縮挙動が考慮されており、順次厳密解に近付いてゆく傾向を示す。次に、Fig. 4 は板中央位置での曲げ応力の板厚方向分布を示したものであるが、古典理論と 1st 理論とは曲げ挙動のみ考慮しているため中央面 ( $x_3=0$  の面) の位置で零となる直線分布を与え、 $\hat{1st}$  理論がこれに板厚方向に一定の伸びが加わった分だけずれた直線分布を示す。また、2nd 理論と 3rd 理論とは非線形となり、順次高次の分布を示すが、3rd 理論は厳密解<sup>12)</sup>に一致している。

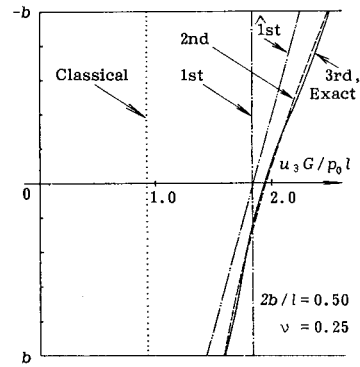


Fig. 3 Distributions along the thickness of vertical displacement (deflection)  $u_3$  for various order theories under the static load ( $2b/l=0.5, \nu=0.25$ ).

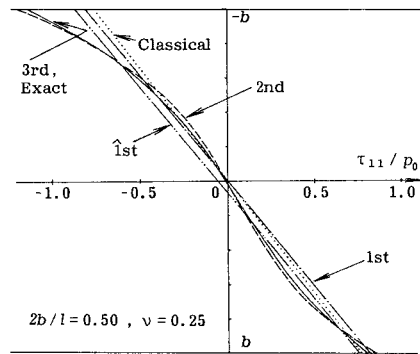


Fig. 4 Distributions along the thickness of bending stress for various order theories under the static load ( $2b/l=0.5, \nu=0.25$ ).

(B) 正弦状分布の動的荷重を受ける場合

ここでは、標題の分布形で時間的に階段関数状の動的荷重が作用した場合の応答解析の結果を示す。まず、 $2b/l=0.1$  の場合の板中央位置の  $x_3=0$  での面外方向変位  $u_3$  (すなわち、たわみ  $w$ ) の時間変化を Fig. 5 に、同じく板中央の上端点 ( $x_1=x_2=l/2, x_3=-b$ ) における曲げ応力  $\tau_{11}$  の時間変化を Fig. 6 に示すが、これらより次のようなことがいえる。1st 理論と  $\hat{1st}$  理論とは同一の結果を与えており、もちろん静的載荷時の値も一致している。このことは、この程度の板厚において面内の伸縮挙動は非常に小さく、無視し得る程度であることを示している。さらに、2nd 理論と 3rd 理論とがすべて同一の結果を与えており、これより本手法による解析結果は 2nd 理論において収束値に達していることを示している。また、これらの波形がほぼ正弦波形に近いことから、この程度の板厚では最低次の面外曲げ振動モードの卓越した応答をすることがわかる。一方、このモードの固有振動数が 1st 理論と  $\hat{1st}$  理論とで全く一致

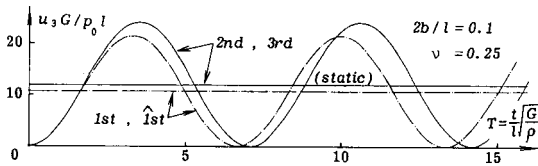


Fig. 5 Time response of deflection  $w = u_3|_{x_2=0}$  at middle plane of central point of the plate for various order theories under the dynamic load with time step function ( $2b/l=0.1$ ,  $\nu=0.25$ ).

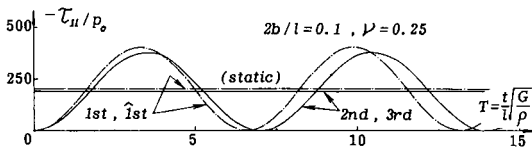


Fig. 6 Time response of bending stress  $\tau_{11}$  at upper surface of central point of the plate for various order theories under the dynamic load with time step function ( $2b/l=0.1$ ,  $\nu=0.25$ ).

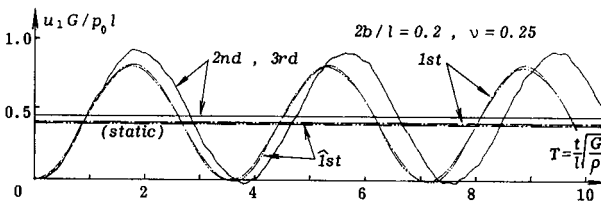


Fig. 7 Time response of in-plane displacement  $u_1$  at upper surface of  $x_1/l = 0.0$ ,  $x_2/l = 1/2$  of the plate for various order theories under the dynamic load with time step function ( $2b/l=0.2$ ,  $\nu=0.25$ ).

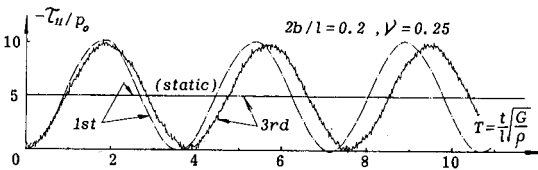


Fig. 8 Same as Fig. 6 for the case of  $2b/l=0.2$ .

することは面内挙動と面外挙動との非連成性から当然であるが、他方、2nd理論と3rd理論とが一致し、これらは1st理論のものより多少小さい値になっているため波形が長周期なものとなり、図上において右側へ位相がずれた波形となっている。

前例と全く同様の計算を  $2b/l=0.2$  の場合について行った結果を示したものが Fig. 7~8 である。Fig. 7 に示す面内変位  $u_1$  の応答値については、たわみ  $w$  の場合とは異なり 1st理論と  $\hat{1}st$ 理論との差が生じ動的応答値、静的計算値ともに  $\hat{1}st$ 理論の方が小さめの値を示している。これは、この程度の板厚比になると面内伸縮挙

動の影響が必ずしも無視し得ない値になり、これを考慮した  $\hat{1}st$ 理論での波形が、これを無視した 1st理論での正弦波形から多少ずれたものとなることを示している。一方、2ndと3rdの理論による応答波形は、微細な点を除けば両者はほぼ等しく、これらの静的応答値が大きくなった分だけ 1stならびに  $\hat{1}st$ の両理論より振幅が大きく、低次の固有振動数が小さくなった分だけ周期が長くなり、さらに高次振動の効果が入った分だけ複雑な波形を呈している。なお、ここでも 2ndと3rdの理論による結果が一致することから、この程度の板厚における変位の応答値についてもほぼ 2nd理論のレベルで最終的な収束値に達していることが推察される。次に、Fig. 8 に示す曲げ応力  $\tau_{11}$  の応答値についてみると静的な応答値は各理論とも互いに近い値を示しているが、動的な応答値においては互いにその性状を異にしている。まず、1st理論はほぼ正弦波形に近い応答を示し、同図中には示さないが  $\hat{1}st$ 理論での値は、これに面内伸縮の細かい振動が重なり合った応答となるが、両者はやはり互いに近い値を示す。また、2nd理論（図中には示されていない）と 3rd理論とはここでも近い値を示し、かつ前述の 2者より長い周期の波形となる。3rd理論の結果はかなり高次の振動の影響が入っており、非常に高周波の波形が重なって小さきみな時間変動をしている。

最後に  $2b/l=0.5$  の場合の応答解析結果を Fig. 9~11 に示す。Fig. 9 はたわみの応答値で、前述の  $2b/l=0.1$  および  $0.2$  の場合には、同一の結果を与えていた 2nd理論と 3rd理論とがこの程度の厚さになると多少の差異を生ずるようになることがわかる。なお、図中に示した静的な値に関しては両者が等しい値を与えていることを考えると、この差異は 3rd理論で新たに考慮された四次の Legendre 多項式  $P_4(\xi)$  の面外変位成分による高周波振動がこの程度の厚板においては無視できない大きさになるためである。次に、Fig. 10 の面内変位  $u_1$  については、静的な値の差異に比べ、動的な応答値の差異の大きいことを示している。全体的にはやはり、1stと  $\hat{1}st$ 理論とが近く、2ndと 3rd理論とが近い値を示しているといえるが、それらは  $2b/l=0.1$ ,  $0.2$  の場合に比べ時間の経過に伴い、かなり複雑な波形を呈している。次に、Fig. 11 に示す曲げ応力については面内変位について指摘した傾向がさらに顕著に現われており、3rd理論による値もかなり大振幅の高次振動成分をもつことから、さらに高次項を採用した理論による解析が必要であることを示唆している。



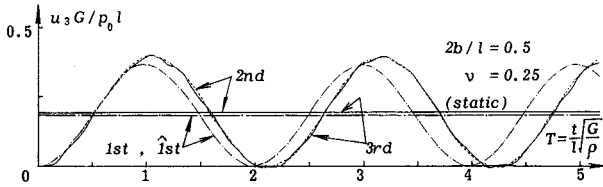


Fig. 9 Same as Fig. 5 for the case of  $2b/l=0.5$ .

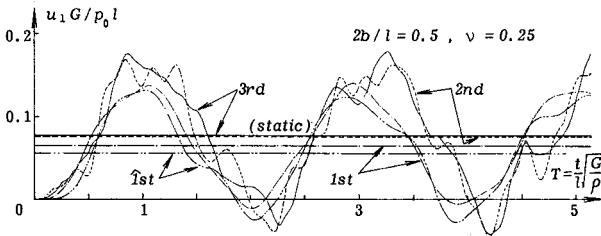


Fig. 10 Same as Fig. 7 for the case of  $2b/l=0.5$ .

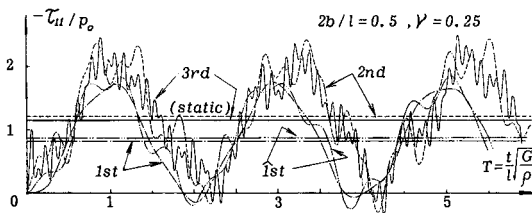


Fig. 11 Same as Fig. 6 for the case of  $2b/l=0.5$ .

以上を総合して全般的傾向としていえることは静的荷重に対する値を中心に、その2倍の値と零との間を振動する応答値を示すが、これは応答値を成分に分解すると静的応答値と各固有振動数に対応する固有振動モードの動的応答値とになることに起因し、このうち動的応答値の方は板厚が薄い場合は低次モードの振動のみが卓越した応答を示すが、板厚の増大に伴い高次モードの振動の寄与が増大することから応答波形も古典理論が与える正弦波形がくずれて複雑化してくる。一方、静的応答値に関しては、板厚と荷重の特性長との比の増大に伴い、せん断変形をはじめとする板厚方向成分の影響が増し、古典理論の立脚点である Kirchhoff-Love の仮定から離れてくる。以上静、動両面にわたって板厚および板厚と荷重の特性長との比の増大に伴い、古典理論をはじめとする低次理論による解析精度が低下してくることからこのような衝撃的な荷重や強制振動の応答値の計算については静的荷重に対する解析および自由振動解析に比して高次近似理論の必要性がより増大するといえよう。

なお、ここで示した 1st と  $\hat{1}st$  理論とでは前者には面内伸縮挙動が入らないのに対し、後者では最低次の面内伸縮挙動が考慮されているという点で本質的な差異があり、またこの定性的な合理性だけでなく、厚板の静的計

算結果に顕著に現われているように、解析精度的にも後者の方が厳密な挙動により近づく傾向を示し、計算量は倍になるものの改良の成果が明確に確認できる。一方、それより高次の理論における  $n$  次と  $\hat{n}$  次の理論の差異は単に一次分だけ高次の面外変位成分のみが入るだけで計算量ならびに精度的にもそれほど大きな差異はないといえる。

### 6. 結 言

変位仮定型の平板理論として Legendre 多項式展開ならびに Chebyshev 多項式展開によるものを定式化し、これらの理論と先に発表したベキ級数、Fourier 級数展開による高次平板理論の間の定性的な関係を、具体的に低次項を採用した理論式を列挙して比較したが、Mindlin<sup>7)</sup> もかつて指摘したように、ここで示した Legendre 展開によるものは等質性の平板の場合、変位係数の各慣性項間に連成がなく動的な問題の解析には大きな利点となる。したがって、ここでは、簡単な例として四辺単純支持の等方性正方形板を取り上げ、上表面に正弦分布の時間的な階段関数の荷重が作用する場合に対し、数種類の低次近似理論による結果を Laplace 変換法を用いて解析解を求め、それら

の各次数の理論の精度特性について数値例を通していくつかの考察を行った。

ここでは、基本的な解法の確認を主目的としたことから作用荷重の分布形と時間依存性は最も基本的なものに限定したが、有限幅の分布荷重、集中荷重あるいは移動荷重等の問題へ容易に拡張が可能であり、今後厳密解との比較をも含めてより一般的な例題によってその特性を検証してゆきたい。

### 付録 A Chebyshev 多項式展開による平板理論の支配方程式

まず、三次元変位  $u_j$  が本文の式 (1) と類似な Chebyshev 多項式で次のように展開されるものとする。

$$u_j = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\xi) \cdot u_j^{(n)} \dots \dots \dots (A.1)$$

ここに、 $\xi = x_3/b$  であり、また

$$\left. \begin{aligned} T_n(\xi) &= \frac{(-2)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot \frac{d^n}{d\xi^2} (1-\xi^2)^{n-1/2}, \\ T_0(\xi) &= 1, T_1(\xi) = \xi, T_2(\xi) = 2\xi^2 - 1, \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (A.2)$$

したがって、ひずみ成分  $\epsilon_{ij}$  は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} = & \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ T_n(\zeta) \cdot (\delta_{i\alpha} u_{j,\alpha}^{(n)} + \delta_{j\alpha} u_{i,\alpha}^{(n)}) \right. \\ & \left. + \frac{n}{b} \sum_{m=0}^{n-1} \delta_{m+n}^{\circ} (2 - \delta_{m0}) T_m(\zeta) \cdot (\delta_{i3} u_j^{(m)} + \delta_{j3} u_i^{(m)}) \right\} \\ & \dots\dots\dots (A \cdot 3) \end{aligned}$$

次に応力成分  $\tau_{ij}$  を構成方程式を用いて変位係数  $u_j^{(m)}$  で表示すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ T_n(\zeta) \cdot (C_{ijka} u_{i,\alpha}^{(n)} + C_{ijla} u_{k,\alpha}^{(n)}) \right. \\ & \left. + \frac{n}{b} \sum_{m=0}^{n-1} \delta_{m+n}^{\circ} (2 - \delta_{m0}) T_m(\zeta) \cdot (C_{ijks} u_l^{(m)} + C_{ijls} u_k^{(m)}) \right\}. \\ & \dots\dots\dots (A \cdot 4) \end{aligned}$$

以上の式を式(9)に代入整理すれば、最終的に以下のように支配方程式および境界条件式が求められる。

(支配方程式)：

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha j,\alpha}^{(m)} - \frac{n}{b} \sum_{m=0}^{n-1} \delta_{m+n}^{\circ} (2 - \delta_{m0}) \tau_{3j}^{(m)} + \frac{1}{b} (F_j^{(m)} + f_j^{(m)}) \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{(m,n)} \ddot{u}_j^{(m)}. \dots\dots\dots (A \cdot 5) \end{aligned}$$

(境界条件式)：

$$\dot{T}_j^{(m)} = bn_{\alpha} \tau_{\alpha j}^{(m)} \text{ or } \bar{u}_j^{(m)} = u_j^{(m)} \text{ on } C \dots\dots\dots (A \cdot 6)$$

上式中の  $\bar{u}_j^{(m)}$  は境界  $C$  で、与えられた変位  $\bar{u}_j$  の Chebyshev 展開係数で次式のように表示される。

$$\bar{u}_j = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_j^{(n)} T_n(\zeta) \dots\dots\dots (A \cdot 7)$$

その他の記号は次のように定義された量である。

$$\begin{aligned} F_j^{(m)} = & [\tau_{3j} \cdot T_n(\zeta)]_{-1}, \quad f_j^{(m)} = b \int_{-1}^1 f_j \cdot T_n(\zeta) d\zeta, \\ \dot{T}_j^{(m)} = & b \int_{-1}^1 (n_{\alpha} \tau_{\alpha j}) \cdot T_n(\zeta) d\zeta. \dots\dots\dots (A \cdot 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{(m)} = & \int_{-1}^1 \tau_{ij} T_n(\zeta) d\zeta \\ = & \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ C_{ij\alpha}^{(m,n)} u_{i,\alpha}^{(m)} + \frac{m}{b} \sum_{\rho=0}^{m-1} \delta_{\rho+m}^{\circ} (2 - \delta_{\rho0}) \cdot C_{ij3s}^{(m,n)} \cdot u_s^{(m)} \right\}. \\ & \dots\dots\dots (A \cdot 9) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} [C_{ijkl}^{(m,n)}, \rho^{(m,n)}] = & \int_{-1}^1 [C_{ijkl}, \rho] T_m(\zeta) \cdot T_n(\zeta) d\zeta \dots (A \cdot 10) \\ = & A_{mn} [C_{ijkl}, \rho]. \text{ (for } x_3\text{-independency)} \\ & \dots\dots\dots (A \cdot 10)' \end{aligned}$$

$$A_{mn} = \delta_{m+n+1}^{\circ} \left[ \frac{1}{1+(m+n)^2} + \frac{1}{1-(m+n)^2} \right] \dots (A \cdot 11)$$

支配方程式 (A・5) に式 (A・9) を代入すれば、変位係数  $u_j^{(m)}$  で表示した運動方程式が次のように求められる。

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ C_{\alpha j\beta i}^{(m,n)} u_{i,\alpha\beta}^{(m)} + \frac{m}{b} C_{\alpha j31}^{(m,n)} u_{i,\alpha}^{(m)} \right\} - \frac{n}{b} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k+n}^{\circ} (2 - \delta_{k0}) \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ C_{3j\alpha i}^{(m,n)} u_{i,\alpha}^{(m)} + \frac{m}{b} C_{3j31}^{(m,n)} u_i^{(m)} \right\} + \frac{1}{b} (F_j^{(m)} + f_j^{(m)}) \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{(m,n)} \ddot{u}_j^{(m)}. \dots\dots\dots (A \cdot 12) \end{aligned}$$

等質性の平板の場合には、上式の  $C_{ijkl}^{(m,n)}, \rho^{(m,n)}$  の代わりに式 (A・10)' を代入してやればよい。ここでは等質等

方性平板に対する結果を示せば以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_{mn} [G \nabla^2 u_{3,\alpha}^{(m)} + (\lambda + G) e_{\alpha}^{(m)}] + \frac{m}{b} \Gamma_{\rho n}^m \lambda u_{3,\alpha}^{(m)} \right. \\ \left. - \frac{n}{b} \Gamma_{\rho m}^n G u_{3,\alpha}^{(m)} - \frac{mn}{b^2} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{n+k}^{\circ} (2 - \delta_{k0}) \Gamma_{\rho k}^m G u_{3,\alpha}^{(m)} \right\} \\ - \frac{1}{b} (F_{\alpha}^{(m)} + f_{\alpha}^{(m)}) = \rho \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} \ddot{u}_{\alpha}^{(m)}, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_{mn} G \nabla^2 u_3^{(m)} + \frac{m}{b} \Gamma_{\rho n}^m G e^{(m)} - \frac{n}{b} \Gamma_{\rho m}^n \lambda e^{(m)} \right. \\ \left. - \frac{mn}{b^2} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{n+k}^{\circ} (2 - \delta_{k0}) \Gamma_{\rho k}^m (\lambda + 2G) u_3^{(m)} \right\} \\ - \frac{1}{b} (F_3^{(m)} + f_3^{(m)}) = \rho \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} \ddot{u}_3^{(m)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A \cdot 13)$$

ここに、

$$\Gamma_{\rho n}^m = \sum_{\rho=0}^{m-1} \delta_{\rho+m}^{\circ} (2 - \delta_{\rho0}) A_{n\rho} \dots\dots\dots (A \cdot 14)$$

参 考 文 献

- 1) 平島・根岸：板厚方向の成分を考慮した代表的な2次元化平板理論の精度に関する考察，土木学会論文報告集，No. 330，pp. 1~14，1983.
- 2) 平島・根岸：数種の平板理論の動特性（自由振動と分散特性）に関する研究，土木学会論文集，No. 333，pp. 21~34，1983.
- 3) 平島・根岸：幾何学的非線形性を考慮した等質ならびに層状性平板の解析理論，土木学会論文報告集，No. 336，pp. 9~20，1983.
- 4) 平島・根岸：板厚方向にフーリエ級数展開した高次平板理論，土木学会論文報告集，No. 341，pp. 163~172，1984.
- 5) 平島・根岸：弾性平板の静的・動的解析理論に関する二、三の考察——Reissner 理論および Mindlin 理論の修正——，山梨大学工学部研究報告，No. 32，pp. 18~27，1981.
- 6) Mindlin, R. D. : Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31~38, 1951.
- 7) Mindlin, R. D. and Medick, M. A. : Extensional vibrations of elastic plates, J. Appl. Mech., Vol. 26, pp. 561~569, 1959.
- 8) Medick, M. A. and Pao, Y. H. : Extensional vibrations of thin rectangular plates, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 137, pp. 59~65, 1965.
- 9) Moon, F. C. : Wave surfaces due to impact on anisotropic plates, J. Comp. Mat., Vol. 6, pp. 62~79, 1972; One dimensional transient waves in anisotropic plates, J. Appl. Mech., Vol. 40, pp. 485~490, 1973.
- 10) Kane, T. R. and Mindlin, R. D. : High-frequency extensional vibrations of plates, J. Appl. Mech., Vol. 23, pp. 277~283, 1956.
- 11) Lee, P. C. Y. and Nikodem, Z. : An approximate theory for high-frequency vibrations of elastic plates, Int. J. Solids Struct., Vol. 8, pp. 581~612, 1972.
- 12) Pagano, N. J. : Exact solution for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, J. Comp. Mat., Vol. 4, pp. 20~34, 1970.

(1984. 3. 29・受付)