【土木学会論文集　第353号／Ⅳ-2　1985年1月】

招待論文

都市内土地利用の均衡解および最適解の存在と一意性

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF URBAN LAND USE EQUILIBRIUM AND OPTIMUM

藤 田 昌 久*
By Masahisa FUJITA

1. はじめに

数理モデルを構成した場合，解の存在および一意性が常に重要な問題となる．都市内土地利用モデルにおける均衡解の存在に関しては，MacKinnon[1)]，Schweizer-Varaiya-Hartwick[2)]，King[3)]，Richter[4)]，Karmann[5)]，などによっていくつかの研究がなされてきたが，それらはすべて離散空間モデルにおけるものである．一方，都市内土地利用の理論研究においては，ほとんど常に連続空間モデルが用いられてきており，膨大な数の論文が発表されている．しかしながら，それらの連続空間モデルにおける解の存在と一意性に関する体系的な研究は，今までのところほとんどなされていない．これは，離散空間モデルにおける解の存在証明に用いられている方法（角谷の不動点定理あるいはそれに類似した定理）が，連続空間モデルに対して直接適用できないことに起因していると思われる．

本論文において，都市内土地利用の連続空間モデルにおける均衡解の存在と一意性について，2つのアプローチを試みる．また，それらの方法を最適解の存在と一意性についても適用する．まず本論文の前半において，ダイナミックプログラミングの逐次解法に類似した，構成的方法に基づく証明法を提示する．この方法は，境界地代曲線という幾何学的概念を利用するもので，解の計算用アルゴリズムもただちに得られる．しかしながら，この方法は1つの強い仮定を前提としており，ある部類の問題に対してのみ適用できる．理論研究において従来対象とされてきた多くの問題はこの部類に属していることが示される．

次に，本論文の後半において，Richter［4］によって得られた complementary problem の解の存在に関する数学的定理を応用した，より一般的なアプローチを提示する．Richter をはじめとする前述の離散空間モデルにおける均衡解の証明には，従来一般均衡分析において用いられてきた方法，つまり，財の価格空間を変域とする関数を利用する方法，が用いられている．しかし，連続空間モデルにおいては，財（各地点の土地を含む）の価格空間は無限次元となり，この方法はそのままでは適用できない．そこで，本論文においては，都市の家計タイプの有限性を仮定して，財の価格空間の代わりに家計の効用水準の空間を変域とする関数を利用する方法を採用する．これにより，従来の解の存在証明および解の数値計算の方法を連続空間モデルに適用することが可能となる．

* Associate Prof. Department of Regional Science University of Pennsylvania

なお，連続空間モデルにおける均衡解の存在に関する数少ない研究のうちで重要なものとして，安藤[6]によるものが挙げられる．それは，本研究における第1のアプローチが対象とする部類の問題とほぼ同様のものを取り扱っている．安藤の研究においては，最適解の存在を利用して均衡解の存在を証明するという，巧妙な方法が用いられている．この方法は，最適解の計算方法を均衡解の計算に適用することを可能にするという点において優れている．ただし，この方法は，均衡解が有効（efficient）なときにのみ適用できるという点において限界があると思える．この点を考慮して，本論文においては均衡解と最適解の存在はそれぞれ独立に取り扱われている．

2. 均衡問題の定式化

以下において，都市内土地利用の市場均衡問題が，付け値関数と敷地（面積）関数という2種類の関数を用いて定式化されるが，それらはあるなんらかの家計の住宅立地行動のモデルからすでに得られたものとして，外生的に取り扱う．しかしながら，議論を具体的にするために，住宅立地モデルの簡単な例を挙げておく（都市内土地利用の経済理論に関する一般的解説については，たとえば，藤田[7),8)]を参照されたい）．

単一中心都市を前提として，対数線形型の効用関数を用いた次の住宅立地モデルを考えてみよう．

$$\max_{r, z, s} \alpha \log z + \beta \log s, \text{ subject to}$$

$$z + R(r)s = Y - T(r) \quad \cdots (1)$$

ここに，r は都心（CBD）からの距離，z は合成財に対する支出，s は敷地の広さ，$R(r)$ は r における地代，Y は所得，$T(r)$ は r における交通費，また，α と β は正の定数（$\alpha+\beta=1$）とする．このモデルに基づき，付け値関数 $\Psi^0(r, u)$ を次のように定義する．

$$\Psi^0(r, u) = \max_{z, s}\left\{\frac{Y - T(r) - z}{s} \;\middle|\; \alpha \log z + \beta \log s = u,\ z \geqq 0,\ s \geqq 0\right\} \quad \cdots (2)$$

つまり，付け値 $\Psi^0(r, u)$ は，家計がある一定水準の効用 u を達成しながら地点 r で支払い得る最大の地代（面積当たり）を表わす．式（2）の右辺の最大化問題を解くことにより，

$$\Psi^0(r, u) = \alpha^{\alpha/\beta}\beta(Y - T(r))^{1/\beta} e^{-u/\beta} \quad \cdots (3)$$

また s の解として，次の敷地関数 $s^0(r, u)$ が得られる．

$$s^0(r, u) = \alpha^{-\alpha/\beta}(Y - T(r))^{-\alpha/\beta} e^{u/\beta} \quad \cdots (4)$$

明らかに，関数 $\Psi^0(r, u)$ と $s^0(r, u)$ は

$$D^0 = \{(r, u) | 0 \leqq r < \infty,\ T(r) < Y,\ -\infty < u < \infty\}$$

において定義されるが，D^0 を次の変域に拡張すると都合がよい．

$$D = \{(r, u) | 0 \leqq r < \infty,\ -\infty < u < \infty\} \quad \cdots (5)$$

つまり，変域 D の上に拡張された関数 $\Psi(r, u)$ と $s(r, u)$ を次のように定義する．

$$\Psi(r, u) = \Psi^0(r, u) \text{ for } (r, u) \in D^0, \quad = 0 \text{ for } (r, u) \notin D^0 \quad \cdots (6)$$

$$s(r, u) = s^0(r, u) \text{ for } (r, u) \in D^0, \quad = \infty \text{ for } (r, u) \notin D^0 \quad \cdots (7)$$

したがって，$\Psi: D \to [0, \infty)$，$s: D \to (0, \infty]$，なお，$\rho \equiv 1/s$ によって密度関数を定義すると，$\rho: D \to [0, \infty)$，となる．

次に，本論文において分析される問題を一般的に定式化しよう．都市は m タイプの家計から成っており，タイプ i の家計の数は外生的に $N_i^0(>0)$ で与えられているものとする（$i=1, 2, \cdots, m$）．タイプ i に属するすべての家計は同一の付け値関数 $\Psi_i(r, u)$ と敷地関数 $s_i(r, u)$ をもっているものとする．ここに Ψ_i と s_i は，

$$\Psi_i: D \to [0, \infty),\quad s_i: D \to (0, \infty],\quad i=1, 2, \cdots, m \quad \cdots (8)$$

なる外生的に与えられた関数であり，それらの変域 D は式（5）で与えられるものとする．都心から距離 r における利用可能な土地面積を $L(r)$ で表わす．もしそれらの土地が宅地に利用されない場合には，単位面積当たり $R_A \geqq 0$ の農業地代が得られるものとする．以上の前提のもとに，競争均衡を次のように定義する．

［定義1］ 効用水準 $u_i^*(i=1, 2, \cdots, m)$，非負の家計分布関数 $n_i(r)$（$0 \leqq r < \infty$，$i=1, 2, \cdots, m$）および地代曲線 $R(r)$ は，次の条件を満たすとき，均衡にあるという．

（a） 土地市場均衡条件：各 $r \in [0, \infty)$ において，

$$R(r) = \max\{\max_i \Psi_i(r, u_i^*),\ R_A\} \quad \cdots (9)$$

$$R(r) = \Psi_i(r, u_i^*) \text{ if } n_i(r) > 0 \quad \cdots (10)$$

$$\sum_{i=1}^{m} s_i(r, u_i^*) n_i(r) \leqq L(r) \quad \cdots (11)$$

$$\sum_{i=1}^{m} s_i(r, u_i^*) n_i(r) = L(r) \text{ if } R(r) > R_A \quad \cdots (12)$$

（b） 人口制約

$$\int_0^\infty n_i(r)\, dr = N_i^0,\quad i=1, 2, \cdots, m \quad \cdots (13)$$

条件（9）は，均衡地代曲線 $R(r)$ が，すべての均衡付け値曲線 $\Psi_i(r, u_i^*)$ と農業地代曲線の上部包絡線であることを表わす．条件（10）と（12）は，均衡地代が農業地代を越える地点における土地は，最大の均衡付け値をもつ家計によって利用されることを要求する．条件（11）は土地制約を表わし，条件（13）は人口制約を表わす．なお，本紙を通じて，$\int$ はリーマン積分を表わすものとし，各 $n_i(r)$ はほとんどいたるところ連続な関数とする．また，“ほとんどいたるところ”とは，“ルベーク測度ゼロなる点の集合を除いて”，ということを

意味するものとする．

3. 主要な仮定

次に，以下の分析において用いられる主要な仮定を述べる．まず，(3)～(7) で定義された付け値関数と敷地関数が所有している望ましい性質を一般化して，次のように定義する．

[定義 2 a] 関数 $\Psi_i: D\to[0,\infty)$ と $s_i: D\to(0,\infty]$ は，以下の条件を満たすとき，適切な形状をしているという．

(a) Ψ_i と $\rho_i\equiv 1/s_i$ は D において連続である．

(b) $\{(r, u)\in D\,|\,\Psi_i(r, u)>0\}=\{(r, u)\in D\,|\,\rho_i(r, u)>0\}\neq\emptyset$ で，この等しい領域を D_i^0 で表わす．

(c) D_i^0 は r に関して有界である．すなわち，$(r, u)\in D_i^0$ ならば常に $r<\bar{r}_i$ となるような $0<\bar{r}_i<\infty$ が存在する．

(d) D_i^0 において，Ψ_i と ρ_i は u の減少関数である．

(e) 次の条件を満たす距離 $0<\tilde{r}_i<\infty$ が存在する：任意の $r\in[0,\tilde{r}_i]$ に対して，$\lim_{u\to-\infty}\Psi_i(r, u)=\infty$, $\lim_{u\to-\infty}\rho_i(r, u)=\infty$.

(f) 任意の $r\geqq 0$ に対して，$\lim_{u\to\infty}\Psi_i(r, u)=0$, $\lim_{u\to\infty}\rho_i(r, u)=0$.

なお，本論文を通じて，“減少”，“増加”はそれぞれ“強く減少”，“強く増加”を意味するものとする．上の定義における条件をさらに強めて，次を得る．

[定義 2 b] 関数 $\Psi_i: D\to[0,\infty)$ と $s_i: D\to(0,\infty]$ が定義 2 a のすべての条件を満たし，さらに次の条件を満たすとき，単調で適切な形状をしているという．

(g) D_i^0 において，Ψ_i と ρ_i は r の減少関数である．

単一中心都市の仮定のもとに得られた付け値関数と敷地関数は，ほとんど常に定義 2 a あるいは 2 b を満たしている．たとえば，(3)～(7) で定義された Ψ と s が定義 2 b のすべての条件を満たしていることは容易にわかる．次のいずれかの仮定が，以下において用いられる．

[仮定 1 a] すべての関数 Ψ_i と s_i は，適切な形状をしている ($i=1, 2, \cdots, m$).

[仮定 1 b] すべての関数 Ψ_i と s_i は，単調で適切な形状をしている ($i=1, 2, \cdots, m$).

上のいずれかの仮定が満たされている場合，$\bar{r}$ と $\tilde{r}$ を次のように定義する．

$$\bar{r}=\max_i \bar{r}_i,\quad \tilde{r}=\min_i \tilde{r}_i \qquad (14)$$

そして，土地分布関数 $L(r)$ に関して，次のように仮定する．

[仮定 2] $L(r)$ は $[0,\infty)$ において非負かつほとんどいたるところで連続であり，$(0,\tilde{r})$ において正，$[0,\bar{r}]$ において有界である．

これは非常に弱い仮定であり，実際に用いられるほとんどすべての関数，たとえば $L(r)=\theta r^{\lambda}$ ($\theta>0$, $\lambda>-1$)，の場合に満たされている．本論文後半における第 2 のアプローチは仮定 1 a と仮定 2 が満たされている一般の場合を対象とするが，前半の第 1 のアプローチにおいては，仮定 1 b と仮定 2 に加えてもう 1 つの強い仮定（仮定 3）が満たされる場合を対象とする．その仮定を導入するにさしあたって，異なった付け値関数間の相対的勾配を次のように定義する．

[定義 3] r に関して減少で連続な 2 つの付け値関数 Ψ_i と Ψ_j が次の条件を満たすとき，Ψ_i は Ψ_j よりも急であるという：ある r, u_i, u_j に対して，$\Psi_i(r, u_i)=\Psi_j(r, u_j)>0$ であれば，常にすべての $x\in[0, r)$ に関して $\Psi_i(x, u_i)>\Psi_j(x, u_j)$ となっており，かつすべての $x\in\{x|x>r,\ \Psi_i(x, u_i)>0\}$ において $\Psi_i(x, u_i)<\Psi_j(x, u_j)$ となっている．

Ψ_i と Ψ_j が微分可能な場合には，上の定義は次のように表現しなおすことができる．

[定義 3′] 付け値関数 Ψ_i と Ψ_j は r に関して減少かつ微分可能とする．このとき，次の条件が満たされていれば，Ψ_i は Ψ_j よりも急であるという：ある r, u_i, u_j に対して

$$\Psi_i(r, u_i)=\Psi_j(r, u_j)>0$$

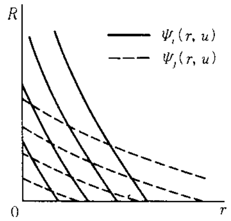
であれば，常に

$$\partial\Psi_i(x, u_i)/\partial x<\partial\Psi_j(x, u_j)/\partial x \text{ at } x=r.$$

つまり，図—1 に描かれているように，Ψ_i に属する付け値曲線と Ψ_j に属する付け値曲線の各交点において，前者が後者より常に急であるとき，Ψ_i は Ψ_j よりも急であるという．もし Ψ_i が Ψ_j よりも急であるならば，どんな 2 つの付け値曲線も（横軸に到達する前に）1 回より多くは交わらないことを確かめるのは容易である．上の定義に基づき，次の仮定を導入する．

[仮定 3] すべての付け値関数 Ψ_i ($i=1, 2, \cdots, m$) は勾配の程度に基づき順序づけることができる．便宜上，Ψ_1 が最も急，Ψ_2 が次に急，……，Ψ_m が最も緩やかとする．

5. において，上の仮定は多くの問題において満たされていることを示す．もし上の仮定が満たされているな



図—1 付け値関数の相対的勾配

らば，均衡においては，各タイプの家計は1つのゾーンを形成し，m 個のゾーンは内側から（つまり，r の小さい順に）Ψ_i の勾配の大きい順に位置している．さらに，容易に確かめられるように，仮定1bのもとでは，均衡において住宅地の内部に農地は存在し得ない．したがって，各タイプごとにゾーン J_i は次のように表わされる．$J_1=[0,\ r_1^*]$，$J_i=(r_{i-1}^*,\ r_i^*]$，$i=2,\ 3,\ \cdots,\ m$．ここに，$0<r_1^*<r_2^*<\cdots<r_m^*$．また，各家計分布関数 $n_i(r)$ は次のように表わされる．

$$n_i(r)=L(r)/s_i(r,\ u_i^*)\ \text{for}\ r\in J_i,$$
$$=0\ \text{for}\ r\notin J_i \cdots\cdots(15)$$

以上より，仮定1bおよび3のもとでは，競争均衡を次のように定義し直すことができる．

［定義1′］ 仮定1bおよび3が満たされているとする．このとき，一組の効用水準 u_i^* と境界点 $r_i^*(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ は，次の条件を満たすとき，均衡にあるという．

$$r_0^*\equiv 0<r_1^*<r_2^*<\cdots\cdots<r_m^* \cdots\cdots(16)$$
$$\Psi_i(r_i^*,\ u_i^*)=\Psi_{i+1}(r_i^*,\ u_{i+1}^*),\quad i=1,2,\cdots,m-1 \cdots\cdots(17)$$
$$\Psi_m(r_m^*,\ u_m^*)=R_A \cdots\cdots(18)$$
$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} L(r)/s_i(r,\ u_i^*)dr=N_i^0,\quad i=1,2,\cdots,m \cdots\cdots(19)$$

なお，均衡地代曲線 $R(r)$ は次のように与えられる．

$$R(r)=\Psi_i(r,\ u_i^*)\ \text{for}\ r_{i-1}^*\leqq r\leqq r_i^*(i=1,2,\cdots,m),$$
$$=R_A\ \text{for}\ r\geqq r_m^* \cdots\cdots(20)$$

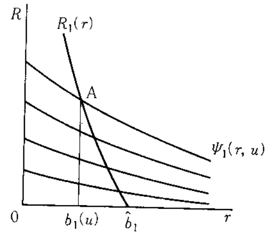
4. 均衡解の存在と一意性

本節において，仮定1b，2および3のもとに均衡解の存在と一意性を示す．定義1′より，そのためには，条件(16)～(19)を満たす組$(r_i^*,\ u_i^*)$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ の存在と一意性を示せば十分である．これは，境界地代曲線とよばれる一組の曲線 $R_i(r)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ を逐次的に得ることによって達成される．まず，概括的にその方法を説明する．

各 u のもとに，次の方程式

$$\int_0^b L(r)/s_1(r,\ u)dr=N_1^0 \cdots\cdots(21)$$

を b について解くことにより，ゾーン1の外側境界関数 $b_1(u)$ を得る．図―2の点Aで例示されているように，$b_1(u)$ は各効用水準 u に対応する付け値曲線 $\Psi_1(r,u)$ の上に1つの点を定める．したがって，図―2に描かれているように，u を変化させることにより1つの曲線，$R_1(r)$，が得られる．これを，ゾーン1と2の間の境界地代曲線とよぶことにする．正確には，$r=b_1(u)$ の逆関数を $u=U_1(r)$ で示すと，この境界地代曲線は次のように定義される．



図―2 ゾーン1と2の間の境界地代曲線 $R_1(r)$

$$R_1(r)=\Psi_1(r,\ U_1(r)) \cdots\cdots(22)$$

定義より，$R_1(r)$ はゾーン1と2の間の境界が r であると仮定した場合の，そこにおける均衡地代を表わす．定義2aの条件（d）より，曲線 $R_1(r)$ は r とともに減少することを容易に確かめることができる．次に，この $R_1(r)$ を用いて，各 u のもとに，次の方程式

$$\Psi_2(a,\ u)=R_1(a)$$

を a について解くことにより，ゾーン2の内側境界関数 $a_2(u)$ を得る．つまり，$a_2(u)$ は，付け値曲線 $\Psi_2(r,\ u)$ と境界地代曲線 $R_1(r)$ の交わる地点を示す．次に，この $a_2(u)$ を用いて，各 u のもとに，次の方程式

$$\int_{a_2(u)}^b L(r)/s_2(r,\ u)dr=N_2^0$$

を b について解くことにより，ゾーン2の外側境界関数 $b_2(u)$ を得る．そうすると，$r=b_2(u)$ の逆関数 $u=U_2(r)$ を用いて，ゾーン2と3の間の境界地代曲線 $R_2(r)$ が次のように定義される．

$$R_2(r)=\Psi_2(r,\ U_2(r))$$

前と同様に，$R_2(r)$ は r とともに減少することを確かめるのは容易である．

一般に，境界地代曲線 $R_{i-1}(r)$ $(i=2,\ 3,\ \cdots$，または $m)$ がすでに得られたものとしよう．そうすると，各 u のもとに，次の方程式

$$\Psi_i(a,\ u)=R_{i-1}(a) \cdots\cdots(23)$$

を a について解くことにより，ゾーン i の内側境界関数 $a_i(u)$ が得られる．次に，この $a_i(u)$ を用いて，各 u のもとに，次の方程式

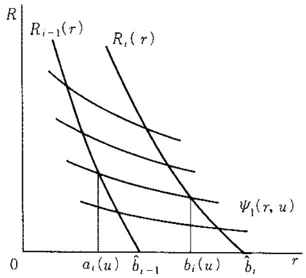
$$\int_{a_i(u)}^b L(r)/s_i(r,\ u)dr=N_i^0 \cdots\cdots(24)$$

を b について解くことにより，ゾーン i の外側境界関数 $b_i(u)$ が得られる．そうすると，$r=b_i(u)$ の逆関数 $u=U_i(r)$ を用いて，ゾーン i と $i+1$ の間の境界地代曲線 $R_i(r)$ が次のように定義される．

$$R_i(r)=\Psi_i(r,\ U_i(r)) \cdots\cdots(25)$$

与えられた $R_{i-1}(r)$ から $R_i(r)$ を得るプロセスが図―3に描かれている．

以上のようにして，一組の境界地代曲線 $R_i(r)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ が逐次的に定められる．定義より，$R_i(r)$



図—3 $R_{i-1}(r)$ から $R_i(r)$ を求めるプロセス

はゾーン i と $i+1$ の間の境界が r であると仮定した場合の，そこにおける均衡地代を表わす．これらの境界地代曲線に関して，次のことを確かめるのはさほど困難ではない（証明の詳細についてはFujita[9]を参照されたい）．

［補助定理4.1］ 仮定1b，2および3が満たされているものとすると，以上のようにして定められた境界地代曲線 $R_i(r)$（$i=1, 2, \cdots, m$）は，次の性質を有している．

（i） ある正の距離 $\hat{b}_i$ が存在して，$R_i(r)$ は $(0, \hat{b}_i)$ の上で定義されており，$\lim_{r\to 0}R_i(r)=\infty$，$\lim_{r\to \hat{b}_i}R_i(r)=0$．

（ii） $R_i(r)$ は $(0, \hat{b}_i)$ において連続であり，r とともに減少する．

（iii） $0<\hat{b}_1<\hat{b}_2<\cdots<\hat{b}_m$ であり，曲線 $R_{i+1}(r)$ は曲線 $R_i(r)$ の外側に位置する（$i=1, 2, \cdots, m-1$）．

（iv） 曲線 $R_i(r)$ はすべての Ψ_j，$j=i, i+1, \cdots, m$，よりも急である．つまり，ある r と u に対して $R_i(r)=\Psi_j(r, u)>0$ であれば，常にすべての $x<r$ において $R_i(x)>\Psi_j(x, u)$，かつ，すべての $x\in(r, \hat{b}_i)$ において $R_i(x)<\Psi_j(x, u)$ となっている．

以上より，m 個の境界地代曲線 $R_i(r)$（$i=1, 2, \cdots, m$）を図—4のように描くことができる．次に，これらの境界地代曲線を用いて，均衡解（r_i^*, u_i^*）（$i=1, 2, \cdots, m$）を，外側より逐次決定することができることを示そう（図—4参照）．まず，都市の外縁 r_m^* が次の関係により決定される．

$$R_m(r_m^*)=R_A \quad\cdots\cdots(26)$$

つまり，r_m^* は一番外側の境界地代曲線 $R_m(r)$ と農業地代曲線との交点として定まる．この r_m^* を用いて，タイプ m の家計の均衡効用水準 u_m^* が次の関係により決定される．

$$\Psi_m(r_m^*, u_m^*)=R_A \quad\cdots\cdots(27)$$

この u_m^* を用いて，ゾーン $m-1$ とゾーン m との境界点 r_{m-1}^* が次の関係により求まる．

$$\Psi_m(r_{m-1}^*, u_m^*)=R_{m-1}(r_{m-1}^*) \quad\cdots\cdots(28)$$

つまり，r_{m-1}^* は付け値曲線 $\Psi_m(r, u_m^*)$ と境界地代曲線 $R_{m-1}(r)$ の交点として定まる．この r_{m-1}^* を用いて，タイプ $m-1$ の家計の均衡効用水準 u_{m-1}^* が次の関係により決定される．

$$\Psi_{m-1}(r_{m-1}^*, u_{m-1}^*)=R_{m-1}(r_{m-1}^*) \quad\cdots\cdots(29)$$

一般に，u_i^*（$i=m, m-1, \cdots, 2$）がすでに求められたものとすると，境界点 r_{i-1}^* が次の関係より決定される．

$$\Psi_i(r_{i-1}^*, u_i^*)=R_{i-1}(r_{i-1}^*) \quad\cdots\cdots(30)$$

そうすると，均衡効用水準 u_{i-1}^* が次の関係により定まる．

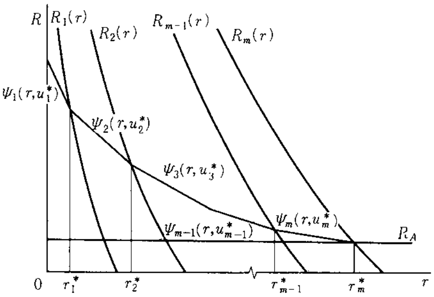
$$\Psi_{i-1}(r_{i-1}^*, u_{i-1}^*)=R_{i-1}(r_{i-1}^*) \quad\cdots\cdots(31)$$

この過程を続けることにより，結局すべての（r_i^*, u_i^*）（$i=1, 2, \cdots, m$）を定めることができる．

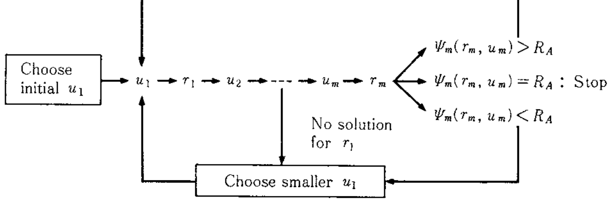
補助定理4.1を用いて，以上の過程は常にただ一組の（r_i^*, u_i^*）（$i=1, 2, \cdots, m$）を定めることを，容易に確かめることができる．また，そのようにして定められた（r_i^*, u_i^*）（$i=1, 2, \cdots, m$）が定義1′のすべての条件を満たすこと，したがってそれは1つの均衡解となっていることは，ただちにわかる．また，図—4を利用して，他には均衡解は存在し得ないことも容易に知ることができる（詳しくは文献9）を参照）．以上より，次の結論が得られる．

［定理1］ 仮定1b，2および3のもとでは，均衡解は常に一意に存在する．

なお，都市におけるすべての家計が同一タイプ（$m=1$）の場合には，上の定理において仮定3は不必要であることに注意しよう．



図—4 均衡解決定のための逐次過程



図—5 均衡解の計算アルゴリズム

最後に，以上の存在証明は，図—5に描かれているような均衡解を得るための計算アルゴリズムを示唆する．このアルゴリズムにおいて，ある $u_i(i=1, 2, \cdots, m)$ が得られたのち，r_i は方程式 $\int_{r_{i-1}}^{r_i} L(r)/s_i(r, u_i)dr=N_i^0$ を解くことにより決定される（ここに $r_0\equiv0$）．次に，u_{i+1} は，$\Psi_i(r_i, u_i)=\Psi_{i+1}(r_i, u_{i+1})$，なる関係によって定められる．容易にわかるように，もしも新しく u_1 を改訂する際の歩幅を適当に指定すれば，このアルゴリズムに基づく計算は常に均衡解に収束する．

5. 例と考察

住宅立地モデル（1）より導かれた付け値関数と敷地関数が単調で適切な形状（定義2b）をしていることは前に説明されたが，対数線形型の効用関数を一般の効用関数で置き換えて，次の例を得る．

［例1］ 次の住宅立地モデルを考えてみよう．

$$\max_{r,z,s} U(z, s),\ \text{subject to } z+R(r)s=Y-T(r) \quad\cdots\cdots(32)$$

ここに $U(z, s)$ は家計の効用関数であり，他の記号はすべて以前のモデル（1）と同一のものを表わすものとする．以下の仮定が満たされているものとしよう．

（i） U は，領域 $\{(z, s)|z>0,\ s>0\}$ において，微分可能な，強い準凹関数である．

（ii） U は z と s の増加関数であり，また U のどの無差別曲線も z 軸あるいは s 軸と交わらない．

（iii） s は正常財とする（つまり，土地に対する普通の需要関数が正の所得効果を有している）．

（iv） $T(r)$ は $[0, \infty)$ において連続，増加，微分可能であり，かつ，$T(0)<Y$，$\lim_{r\to\infty}T(r)>Y$．

また，効用関数は単調変換のもとに不変であるので，一般性を失うことなく，$\inf\{U(z, s)|z>0, s>0\}=-\infty$，$\sup\{U(z, s)|z>0,\ s>0\}=\infty$ と仮定できる．もとの付け値関数 Ψ^0 を次のように定義する．

$$\Psi^0(r, u)=\max_{z,s}\{(Y-T(r)-z)/s\,|\,U(z, s)=u\}$$
$$=\max_s(Y-T(r)-Z(s, u))/s \quad\cdots\cdots(33)$$

ここに，$Z(s, u)$ は $u=U(z, s)$ の z についての逆関数である．また，もとの敷地関数 $s^0(r, u)$ を，(33) における最大化問題の解となる s として定義する．Ψ^0 と s^0 の変域は $D^0=\{(r, u)|0\leq r<\bar{r}(u),\ -\infty<u<\infty\}$ となっている．ここに，$\bar{r}(u)$ は次のように定義される．もし $Y-T(0)\leq\lim_{s\to\infty}Z(s, u)$ ならば $\bar{r}(u)=0$，もし $Y-T(0)>\lim_{s\to\infty}Z(s, u)$ ならば $\bar{r}(u)$ は $Y-T(r)=\lim_{s\to\infty}Z(s, u)$ を満たす r として与えられる．拡張された付け値関数 Ψ と敷地関数 s を（6）と（7）によって定義する．そうすると，容易にわかるように，関数 Ψ と s は単調で適切な形状をしている．定義2aの条件 (c) は，$T(\bar{r})>Y$ なる任意の $\bar{r}$ によって満たされている．また，条件 (e) は $T(\bar{r})<Y$ なる任意の $\bar{r}>0$ によって満たされている．

上の例から，仮定1bは多くの問題において満たされていることがわかる．また，仮定2もほとんど常に満たされている．したがって，定理1を応用するにおいて，仮定3が満たされているかどうかが決定的に重要となる．この点を解明するにあたって便利な計算方式を以下に説明する．均衡問題が異なった付け値関数を含んでいる場合，それらはあるパラメーターによって規定されたより一般的な付け値関数から派生したものであることが多い．例として，一組の付け値関数が，一般付け値関数 $\Psi(r, u|\theta)$ においてパラメーター θ の値を適当に変えることによって得られたものとしよう（たとえば，$\theta=Y$）．関数 Ψ の相対的勾配が θ とともにどのように変化するかを調べるために，ある1つの付け値曲線 $\Psi(\cdot, u|\theta)$ を任意に選び，その曲線上に1つの点 $(r, \Psi(r, u|\theta))$ を任意に選ぶ．次に，付け値 $\Psi(r, u|\theta)$ の値を同一水準に固定したまま，その付け値曲線の勾配が θ とともに r においてどのように変化するかを調べる（図—6参照）．つまり，次の計算を行う．

$$-\frac{\partial\Psi_r(r, u|\theta)}{\partial\theta}\Bigg|\ \Psi(r, u|\theta)=\text{const.}\quad\cdots\cdots(34)$$

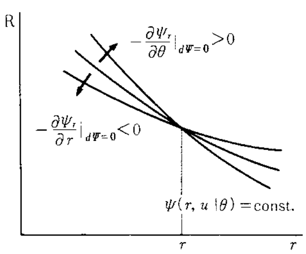
ここに，$\Psi_r(r, u|\theta)=\partial\Psi(r, u|\theta)/\partial r$．簡単のために，この計算を $-(\partial\Psi_r/\partial\theta)_{d\Psi=0}$ と略記することにしよう．定義3′を想記することにより，次のことがただちにいえる（図—6参照）．

［補助定理5.1］ $-(\partial\Psi_r/\partial\theta)_{d\Psi=0}$ が，$\Psi(r, u|\theta)>0$ なるすべての点において正（負）であれば，一般付け値関数は θ の増大とともにより急（より緩やか）になる．

この補助定理を用いて，仮定3は多くの問題（特に理論問題）において満たされていることを示すことができる．

［例2］（所得によるタイプ分けの場合） 都市の家計は m 個の所得クラスに分けられるものとしよう．所得クラス $i(i=1, 2, \cdots, m)$ に属する家計の住宅立地行動は，次のように表わされるものとする．

$\max_{r,z,s} U(z, s)$，subject to



図—6 一般付け値関数 Ψ の相対的勾配の変化

$z+R(r)s=Y_i-T(r)$ ……………………………………(35)

ここに，$Y_1<Y_2<\cdots<Y_m$ とする．各 $(U(\cdot),\ T(\cdot),\ Y_i)$ は例1における(ⅰ)〜(ⅳ)の仮定を満たすものとする($i=1, 2, \cdots, m$)．例1と同様にして，各クラスごとに付け値関数と敷地関数を求め，それらを $\Psi(r,\ u|Y_i)$ と $s(r,\ u|Y_i)$ で表わす．そうすると，補助定理5.1を用いて，付け値関数 $\Psi(r,\ u|Y_i)$ は所得 Y_i の増大とともにより緩やかとなることを示すことができる（実際の計算については文献9）または10）を参照).

賃金率，家族構成による家計タイプ分けを含む，他の多くの例については文献8)〜10）を参照されたい.

6. 最適解の存在と一意性

都市内土地利用の最適問題のうち，最も基本的なのは，Herbert-Stevens 問題（HS 問題）とよばれているものである[11),12)]．もともとの問題は離散空間におけるものであるが，本節では連続空間における問題として再定式化し，その解の存在と一意性を 4. と同様な方法で示す.

m タイプの家計からなっている単一中心都市を考えよう．タイプ i 家計の効用関数を $U_i(z,\ s)$ で表わす（$i=1, 2, \cdots, m$)．ここに，以前と同様，z は合成財の消費量，s は敷地の広さを表わす．外生的に与えられたタイプ i の家計ごとの交通費を $T_i(r)$，所得を Y_i で表わす．また，各タイプ i の家計数は，外生的に $N_i^0>0$ で与えられているものとする.

次に，各住宅立地配分を $(n_i(r),\ z_i(r),\ s_i(r);\ i=1, 2, \cdots, m,\ 0\leqq r\leqq r_f)$ で表わす．ここに，$n_i(r)$ は距離 r におけるタイプ i 家計の数，$z_i(r)$ と $s_i(r)$ はそれぞれ距離 r におけるタイプ i 家計ごとの合成財の消費量と敷地の広さ，また，r_f は都市の外縁を表わす．便宜上，各 $n_i(r)$ と $s_i(r)$ は $[0,\ r_f]$ において右側連続な関数とする.

任意に一組の効用水準，$(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)$，を選び，タイプ i のすべての家計はこの指定された効用水準 u_i を達成すべきであるとする（$i=1, 2, \cdots, m$)．このことは，各配分 $(n_i(r),\ z_i(r),\ s_i(r);\ i=1, 2, \cdots, m,\ 0\leqq r\leqq r_f)$ は次の条件を満たすべきであるとするに等しい.

$$z_i(r)=Z_i(s_i(r),\ u_i)\quad \text{if}\quad n_i(r)>0$$

ここに，$Z_i(s,\ u)$ は $u=U_i(z,\ s)$ の z についての逆関数である．また，各配分は，人口制約 $\int_0^{r_f} n_i(r)dr=N_i^0$ を満たす必要がある．したがって，目標効用水準 $(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)$ を満たしたうえで，住宅立地配分から社会にとって得られる余剰 S は次のように計算できる.

$$S=\text{総所得}-\text{総費用(交通費}+\text{合成財費}+\text{土地機会費用)}$$

$$=\sum_{i=1}^{m} N_i^0 Y_i-\int_0^{r_f}\sum_{i=1}^{m}(T_i(r)+Z_i(s_i(r),\ u_i)+R_A s_i(r))n_i(r)dr$$

$$=\int_0^{r_f}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-T_i(r)-Z_i(s_i(r),\ u_i)-R_A s_i(r))n_i(r)dr$$

ここに R_A は農業地代を表わす．また，以前と同様，$L(r)$ によって各距離 r における利用可能な土地の量を表わす．以上より，与えられた一組の目標効用水準，$u=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)$，に対応する HS-問題を次のように定式化する.

HS(u)：次で表わされる余剰

$$S=\int_0^{r_f}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-T_i(r)-Z_i(s_i(r),\ u_i)-R_A s_i(r))n_i(r)dr$$

を以下の制約に従って最大とする配分 $(n_i(r),\ s_i(r);\ 0\leqq r\leqq r_f,\ i=1, 2, \cdots, m)$ を求めよ.

(a) 土地制約 $\sum_{i=1}^{m} s_i(r)n_i(r)\leqq L(r)$ for $r\leqq r_f$

(b) 人口制約 $\int_0^{r_f} n_i(r)dr=N_i^0,\ i=1, 2, \cdots, m$

ここに，各点 $r\in[0,\ r_f]$ において，$n_i(r)\geqq 0,\ s_i(r)\geqq 0$.

前と同様に，一般性を失うことなく，$\inf\{U(z,\ s)|z>0,\ s>0\}=-\infty$，$\sup\{U_i(z,\ s)|z>0,\ s>0\}=\infty$，$i=1, 2, \cdots, m$，と仮定することができる．したがって，可能な目標効用水準ベクトル u の変域は次のように与えられる.

$$\Lambda=\{u=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)|-\infty<u_i<\infty,\ i=1, 2, \cdots, m\}$$

各 $u\in\Lambda$ に対応する HS-問題を HS(u) で表わすことにする．余剰 S の定義から容易にわかるように，任意の HS-問題の解は社会にとって効率的な配分を表わしている．また逆に，社会にとって効率的な任意の住宅立地配分は，適当な HS-問題を解くことによって得られる．以下の分析において，次のように仮定する.

［仮定4］ 各 $(U_i(\cdot),\ T_i(\cdot),\ Y_i)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ は例1における条件（ⅰ)〜(ⅳ）に加え，次の条件を満たす.

(ⅴ) 各無差別曲線 $u=U_i(z,\ s)$ 上において，$\lim_{z\to\infty}s=0$.

条件(ⅴ)は土地総計 $\int_0^{\infty} L(r)dr$ が有限の場合でも，最適解の存在を保証するために導入されている．もしも $\int_0^{\infty} L(r)dr=\infty$ であれば，条件（ⅴ）は不必要である.

以下において，任意に $u=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m)\in\Lambda$ を1つ選び，この固定された u に対応する HS(u)-問題の解の存在と一意性を示す．HS(u)-問題の最適条件は，付け値関数と敷地関数を用いるとうまくまとめられる．このために，一組のパラメーター，G_i，$i=1, 2, \cdots, m$,

を導入する．各 G_i は，タイプ i の各家計に対する所得税（$G_i<0$ ならば補助金）を表わしている．固定された $u=(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ のもとに，r と G をパラメーターとする付け値関数 Ψ_i^0 を次のように定義する（$i=1, 2, \cdots, m$）．

$$\Psi_i^0(r, G)=\max_s(Y-G-T_i(r)-Z_i(s, u_i))/s \cdots(36)$$

上の右辺における最適な s を $s_i^0(r, G)$ で表わすことにする．定義より，$\Psi_i^0(r, G)$ は，所得税 G が課せられたとき，タイプ i の家計が効用水準 u_i を達成しながら，地点 r で支払い得る最大の単位面積当たり地代を表わす．次に，関数 $\overline{r}_i(G)$ を次のように定義する（$i=1, 2, \cdots, m$）．もし $Y_i-G_i-T_i(0)\leq\lim_{s\to\infty}Z_i(s, u_i)$ ならば，$\overline{r}_i(G)=0$．もし $Y_i-G_i-T_i(0)>\lim_{s\to\infty}Z_i(s, u_i)$ ならば，$\overline{r}_i(G)$ は $Y_i-G_i-T_i(r)=\lim_{s\to\infty}Z_i(s, u_i)$ を満たす r として与えられる．仮定4のもとでは，関数 Ψ_i^0 と s_i^0 は変域 $D_i^0=\{(r, G)|0\leq r<\overline{r}_i(G), -\infty<G<Y_i-T_i(0)\}$ において定義されている．変域 $D=\{(r, G)|0\leq r<\infty, -\infty<G<\infty\}$ の上に拡張された付け値関数 $\Psi_i(r, u)$ と敷地関数 $s_i(r, u)$ とを次のように各 i について定義する．

$$\Psi_i(r, G)=\Psi_i^0(r, G) \text{ if } (r, G)\in D_i^0,$$
$$=0 \text{ if } (r, G)\notin D_i^0 \cdots\cdots(37)$$
$$s_i(r, G)=s_i^0(r, G) \text{ if } (r, G)\in D_i^0,$$
$$=\infty \text{ if } (r, G)\notin D_i^0 \cdots\cdots(38)$$

関数 $\Psi_i(r, G)$ と $s_i(r, G)$ が，定義2aと2bにおいて u を G で置き換えたとき，すべての条件（a)～(g）を満たしているとき，それらは単調で適切な形状をしているという．次のことが容易にわかる．

［補助定理 5.1］ 仮定4のもとでは，関数 $\Psi_i(r, G)$ と $s_i(r, G)$ は単調で適切な形状をしている（$i=1, 2, \cdots, m$）．

HS(u)-問題に対する最適条件は，最適制御理論における最大原理を用いて得ることができるが，それらの条件を関数 Ψ_i と s_i を用いることによって，次のようにまとめることができる（詳細については文献6）または10）を参照）．

［最適条件 OC(u)］ 仮定4が満たされているものとする．住宅立地配分（$n_i(r)$, $s_i(r)$; $0\leq r\leq r_f$, $i=1, 2, \cdots, m$）がHS(u)-問題の解であるためには，一組の乗数 $G_i^*(i=1, 2, \cdots, m)$ と補助関数 $R(r)$（$0\leq r\leq r_f$）が存在して，以下の条件が満たされることが必要十分である．

（a） 土地市場均衡条件

$$R(r)=\max_i \Psi_i(r, G_i^*) \text{ for } r\leq r_f, \ =R_A \text{ for } r\geq r_f,$$
$$R(r)=\Psi_i(r, G_i^*) \text{ if } n_i(r)>0,$$
$$\sum_{i=1}^m s_i(r)n_i(r)=L(r) \text{ for } r<r_f,$$
$$s_i(r)=s_i(r, G_i^*) \text{ if } n_i(r)>0$$

（b） 人口制約

$$\int_0^{r_f} n_i(r)dr=N_i^0, \quad i=1, 2, \cdots, m$$

ここに，各地点 $r\in[0, r_f]$ において，$n_i(r)\geq0$, $s_i(r)\geq0$.

乗数 G_i^* はタイプ i の各家計に対する（影の）所得税，また補助関数 $R(r)$ は各地点 r における（影の）地代を表わしている．定義1における均衡解のための条件と比較すれば容易にわかるように，上の最適条件は，最適住宅立地配分を所得税 $G_i(i=1, 2, \cdots, m)$ を適当に決めることにより競争土地市場を通じて実現しようとしたときの，市場均衡条件を表わしている．

仮定1bのもとでは，定義1における地代曲線 $R(r)$ は r とともに連続的に減少している．したがって，r_f を $R(r_f)=R_A$ によって定義すれば，定義1の条件と最適条件 OC(u)とは，u_i^* と G_i^* との記号の違いを除けば，完全に一致している．したがって，4. においてパラメーター u_i を $G_i(i=1, 2, \cdots, m)$ で置き換えれば，そこにおける分析と結果はすべてそのまま HS(u)-問題について当てはまる．

より正確には，定義3において u_i と u_j を G_i と G_j で置き換えることにより，2つの付け値関数 $\Psi_i(r, G)$ と $\Psi_j(r, G)$（$i, j=1, 2, \cdots, m$）の間の相対的勾配を定義しよう．そして，仮定3がそれらの付け値関数の間で満たされているものとすると，HS(u)-問題の解は定義1′のごとく書き直せる（ただし，そこにおけるすべての u_i^* は G_i^* で置き換える）．また，補助定理5.1より，仮定4のもとでは仮定1bが自動的に満たされている．したがって，4. と全く同じ分析を，パラメーター u_i を G_i で置き換えて繰り返せば，結局次の結論が得られる．

［定理2］ HS-問題に関して仮定2，3および4が満たされているものとすると，任意の $u\in\Lambda$ に対して，HS(u)-問題の解は一意に存在する．

前と同様に，$m=1$ の場合は，上の定理において仮定3は必要ではない．また，HS(u)-問題の解は，図―5のアルゴリズムにおいて u_i を G_i で置き換えたものを用いることによって計算できる．最後に，仮定3が最適問題において満たされている例を以下に示す．

［例3］（効用水準によるタイプ分け） 仮定4に加えて，さらに次のように仮定しよう．

$$U_i(z, s)=U(z, s),$$
$$T_i(r)=T(r) \text{ for all } i=1, 2, \cdots, m \cdots\cdots(39)$$

任意に一組の目標効用水準，$u=(u_1, u_2, \cdots, u_m)$，を選ぼう．もし $u_i=u_j$ であれば，i と j を同一のタイプにまとめることができる（Y_i は解に影響しないことに注意）．したがって，一般性を失うことなく，$u_1<u_2<\cdots<u_m$，と仮定できる．例2と同様にして（u_i を G_i, Y_i

を u_i で置き換えることにより)，付け値関数 $\Psi(r, G|u_i)$ と敷地関数 $s(r, G|u)$ を得る．補助定理5.1を一般付け値関数 $\Psi(r, G|u)$ に対して適用することにより，関数 $\Psi(r, G|u)$ は u の増大とともにより緩やかとなることを示すことができる（実際の計算については文献9）または10）を参照)．

7. より一般的なアプローチ

定理1と2はいずれも仮定3に強く依存している．この仮定は，均衡解あるいは最適解の一意性にとっては本質的に重要であり，それに代わる簡単な一意性のための条件をみつけることは容易ではない（この点に関しては文献9）を参照)．また，この仮定が満たされていれば，解の計算は容易であることも説明されたとおりである．しかしながら，この仮定が解の存在にとってはあまり重要でないことを察するのは難くない．

本節では，仮定3をそれよりずっと弱い，以下で述べられる，仮定5で置き換えて（また仮定1bをより一般的な仮定1aで置き換えて)，均衡解および最適解の存在を証明する．この一般化のためには，前よりずっと複雑な数学的分析を必要とする．しかしながら，このような一般化は，最後の節で述べられるようなさらに複雑な問題を取り扱うためには不可欠である．なお，以下において，実数の集合を $\boldsymbol{R}$，n 次元ユークリッド空間を $\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{R}^n$ の非負領域を $\boldsymbol{R}^n_+$ で表わす．

本節での，より一般的な均衡解の存在証明法においては，仮定3は次の仮定で置き換えられる．

［仮定5］ 任意の $i, j(i, j=1, 2, \cdots, m)$ に対して，次の条件を満たす関数 $\beta_{ij}(u_i, u_j)$ が存在する：距離 r のある集合 $X\subset\boldsymbol{R}_+$ において $\Psi_i(r, u_i)=\Psi_j(r, u_j)$ であれば，X のほとんどいたるところにおいて $s_i(r, u_i)=\beta_{ij}(u_i, u_j)s_j(r, u_j)$ となっている．

最適解の存在証明においては，上の仮定において u_i，u_j を G_i，G_j で置き換えたものを用いる．手短にいえば，仮定5は，もし2つの付け値曲線が正なる幅をもつ r の区域においておいて同一の値をとるときには，対応する2つの敷地関数もその上において比例的に同一の値をとる，ということを意味する．この仮定は，作為的に作られた例外的な場合を除いては，ほとんど常に満たされている．たとえば，任意の2つの付け値曲線が正の領域においてたかだか有限個の点においてしか交わらなければ，その交点の距離の集合 X はもともとルベーク測定ゼロである．したがって，この場合には，上の仮定は自動的に満たされている（仮定3はその場合に含まれていることに注意)．また，交点の距離の集合 X が正の測度をもつ場合には，$\beta_{ij}(u_i, u_j)$ は u_i，u_j と独立なある一定値となっていることが多い．たとえば，もともと同一のタイプに属する家計を不用意に2つのタイプ（i と j）に分けた場合，$\beta_{ij}(u_i, u_j)=1$ となる．

最初に，仮定1a，2および5のもとに均衡解の存在を証明しよう．以下 $i=m+1$ は農業活動を表わすものとする．任意の $u=(u_1, u_2, \cdots, u_m)\in\boldsymbol{R}^m$ に対して，$R(r, u)$，$X_i(u)$，$X_{m+1}(u)$ を次のように定義する．

$$R(r, u)=\max\{\max_i \Psi_i(r, u_i),\ R_A\}\ \text{at each}\ r\in\boldsymbol{R}_+,$$
$$X_i(u)=\{r\in\boldsymbol{R}_+|\Psi_i(r, u_i)=R(r, u)\},\quad i=1, 2, \cdots, m,$$
$$X_{m+1}(u)=\{r\in\boldsymbol{R}_+|R_A=R(r, u)\}$$

$R(r, u)$ は，均衡効用水準ベクトルが u であると仮定したときの，均衡地代曲線を表わしている．また，$X_i(u)$ は，その仮定のもとで，タイプ i が最大の付け値をもっている地点の集合を表わす（$i=1, 2, \cdots, m+1$)．次に，各地点 r において，タイプ i が占める土地の割合を $\alpha_i(r)$ で表わす（$i=1, 2, \cdots, m+1$)．定義より，$0\leqq\alpha_i(r)\leqq1$，$\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i(r)=1$ となっている．均衡においては，条件（10)～(12）より，$r\in X_i(u)$ のときにのみ $\alpha_i(r)>0$ となっている（$i=1, 2, \cdots, m+1$)．また，仮定1aのもとでは，定義2aの条件（b）および（c)，ならびに条件（11）より，$r>\bar{r}$ においてはすべての $i=1, 2, \cdots, m$ について $n_i(r)=0$ となっている．ここに，$\bar{r}$ は（14）により定義されている．したがって，各関数 $\alpha_i(\cdot)$ は $[0, \bar{r}]$ において考えれば十分である．次に，$[0, \bar{r}]$ においてほとんどいたるところ連続な関数の集合を $C_{a.e.}[0, \bar{r}]$ と表わす．$[0, \bar{r}]$ において定義されたある有界な関数がリーマン積分可能であるための必要十分条件は，それが $C_{a.e.}[0, \bar{r}]$ に属すことである．このことを考えて，$\alpha_i(\cdot)\in C_{a.e.}[0, \bar{r}]$，$i=1, 2, \cdots, m$，とする．以上より，任意の $u=(u_1, u_2, \cdots, u_m)\in\boldsymbol{R}^m$ が与えられたとき，それを均衡効用水準と仮定したときに可能な土地配分比率関数 $\alpha(\cdot)=(\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot), \cdots, \alpha_{m+1}(\cdot))$ の集合 $A(u)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}A(u)=\{&\alpha(\cdot)=(\alpha_1(\cdot), \cdots, \alpha_{m+1}(\cdot))|\alpha_i(\cdot)\in C_{a.e.}[0, \bar{r}],\\ &0\leqq\alpha_i(r)\leqq1\ \text{at each}\ r\in[0, \bar{r}],\ \text{and}\ \alpha_i(r)>0\\ &\text{only if}\ r\in X_i(u)\ (i=1, 2, \cdots, m+1),\\ &\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i(r)=1\ \text{at each}\ r\in[0, \bar{r}]\}\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

各 $\alpha(\cdot)=(\alpha_1(\cdot), \cdots, \alpha_{m+1}(\cdot))\in A(u)$ に対応して，タイプ i ごとの家計数は $N_i=\int_0^{\bar{r}}\alpha_i(r)L(r)/s_i(r, u_i)dr=\int_0^{\bar{r}}\alpha_i(r)\rho_i(r, u_i)L(r)dr$ と計算される．よって，各 $u=(u_1, u_2, \cdots, u_m)\in\boldsymbol{R}^m$ のもとにおける可能な家計数の組 $N=(N_1, N_2, \cdots, N_m)$ の集合 $M(u)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}M(u)=\{&N=(N_1, \cdots, N_m)|\exists\alpha(\cdot)=(\alpha_1(\cdot), \cdots,\\ &\alpha_{m+1}(\cdot))\in A(u),\\ &N_i=\int_0^{\bar{r}}\alpha_i(r)\rho_i(r, u_i)L(r)dr,\quad i=1, 2, \cdots, m\}\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

一般の経済学における需要関数に準じて，$M(u)$ を，u を変数とする人口需要関数とよぶことにする．定義1において外生的に与えられている家計数の組を $N^0=(N_1^0, N_2^0, \cdots, N_m^0)$ で表わす．そうすると，次のことを確かめるのは難しくない（文献13）を参照）．

［補助定理7.1］ 仮定1aおよび2のもとでは，$u^*=(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*)\in \boldsymbol{R}^m$ がある1つの均衡解に対応する効用水準ベクトルであるためには，$N^0\in M(u^*)$ となることが必要かつ十分である．

以上より，均衡解の存在を示すには，$N^0\in M(u^*)$ なる u^* の存在を示せばよい．以下において，付録に述べられている Richter の定理を用いて，これを達成する．このために，いくつかの用語を導入しよう．点から集合への関数を，点から点への関数と区別するために，対応とよぶことにする．$V\subset \boldsymbol{R}^m$ とし，F を V から $\boldsymbol{R}^m$ へのある1つの対応としよう（簡単に $F: V\to \boldsymbol{R}^m$ と記す）．ここに，任意の $v\in V$ に対して，$F(v)$ は空ではないものとする．F のグラフ，$\{(v, w)\in V\times \boldsymbol{R}^m | w\in F(v)\}$，が $V\times \boldsymbol{R}^m$ における閉集合であるとき，F は閉（closed）なる対応であるという．すなわち，$v_k\in V$，$w_k\in F(v_k)$ なる点列 $\{v_k\}$，$\{w_k\}$ がそれぞれ極限値 $v\in V$，w をもてば，$w\in F(v)$ となっている．次に，値域 $F(V)=\{w\in F(v)|v\in V\}$ が有界な集合であるとき，対応 F は有界であるという．また，任意の $v\in V$ に対して，像 $F(v)$ が凸集合であるとき，対応 F は凸であるという．

付録における Richter の定理はある単体を変域とする対応に関するものであるのに対して，(41) で定義された対応 M の変域は $\boldsymbol{R}^m$ 全体である．したがって，その定理を対応 M に適応するために，次の2段階の手続きを経ることにする．まず，$N^0\in M(u^*)$ なる u^* が存在するとすれば，そのような u^* はある単体 $K\subset \boldsymbol{R}^m$ の中になければならないことを示す．したがって，$N^0\in M(u^*)$ なる u^* を探すうえにおいて，対応 M の変域を K に制限してさしつかえない．次に，K を変域とする対応 M において，適当に記号を変更することにより，Richter の定理におけるすべての条件が満たされていることを示す．このことより，$N^0\in M(u^*)$ なる u^* の存在を導く．なお，以下の補助定理7.2～7.7の証明については文献13）を参照されたい．

まず，次のことは容易にわかる．

［補助定理7.2］ 仮定1aおよび2のもとでは，任意の $u\in \boldsymbol{R}^m$ に対して，$M(u)$ は空でない．

また，定義2aの条件（e）を利用して，次のことがいえる．

［補助定理7.3］ 仮定1aおよび2のもとでは，1組の効用水準の下限 $\underline{u}_i\in \boldsymbol{R}(i=1, 2, \cdots, m)$ とそれに対応する集合

$$B=\{(u_1, u_2, \cdots, u_m)\in \boldsymbol{R}^m | u_i>\underline{u}_i,\ i=1,2,\cdots,m\} \quad\cdots\cdots(42)$$

が存在して，次が成立する．

$$N\in M(u),\ u\notin B\Rightarrow \sum_{i=1}^{m}(N_i-N_i^0)>0 \quad\cdots\cdots(43)$$

上の補助定理は，$N^0\in M(u^*)$ なる u^* は (42) で定義される集合 B のほかには存在し得ないことを意味する．また，定義2aの条件（f）を利用して，次のことがいえる．

［補助定理7.4］ 仮定1aおよび2のもとでは，$\overline{u}_i>\underline{u}_i(i=1, 2, \cdots, m)$ なる一組の効用水準の上限 $\overline{u}_i\in \boldsymbol{R}$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ が存在して，次が成立する．

$$N\in M(u),\ u\in B,\ \sum_{i=1}^{m}u_i\geqq \sum_{i=1}^{m}\overline{u}_i\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m}(N_i-N_i^0)(u_i-\underline{u}_i)<0 \quad\cdots\cdots(44)$$

集合 B の定義より，$u\in B$ であれば，すべての i に対して $u_i-\underline{u}_i>0$ となっている．よって，(44) は，$u\in B$ で $\sum_{i=1}^{m}u_i\geqq \sum_{i=1}^{m}\overline{u}_i$ であれば，任意の $N\in M(u)$ において，いずれかの i につき $N_i<N_i^0$ となっていることを意味する．また，補助定理7.3より，もし $u\in \boldsymbol{R}^m$ においていずれかの i につき $u_i=\underline{u}_i$ であれば，任意の $N\in M(u)$ においていずれかの j につき $N_j-N_j^0>0$ となっていることがわかる．したがって，次のことがいえる．

［補助定理7.5］ 仮定1aおよび2のもとでは，$-\infty<\underline{u}_i<\overline{u}_i<\infty(i=1, 2, \cdots, m)$ なる一組の効用水準の下限 $\underline{u}_i(i=1, 2, \cdots, m)$ と上限 $\overline{u}_i(i=1, 2, \cdots, m)$ が存在して，

$$K=\{u\in \boldsymbol{R}^m | u_i\geqq \underline{u}_i,\ i=1,2,\cdots,m,\ \sum_{i=1}^{m}u_i\leqq \sum_{i=1}^{m}\overline{u}_i\} \quad\cdots\cdots(45)$$

と定義すると，以下のことが成立する．

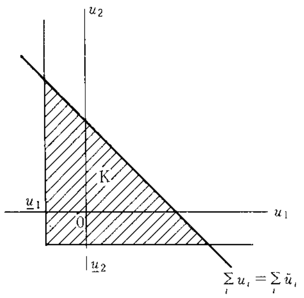
（i） $N^0\in M(u^*)$ とすれば，$u^*\in K$.

（ii） $u\in K$ で，いずれかの i について $u_i-\underline{u}_i=0$ となっていれば，任意の $N\in M(u)$ においていずれかの j について $N_j-N_j^0>0$ となっている．

上の（i）は，どんな均衡効用水準ベクトル u^* も単体 K のほかにはあり得ないことを意味する．よって，以下では，対応 M の変域を図—7に描かれている単体 K に制限する．M の変域を K に制限することによって得られる新たな対応を $\hat{M}$ で表わすことにする．この対応に関して次のことを確認するのは難しくない．

［補助定理7.6］ 仮定1aおよび2のもとでは，対応 $\hat{M}: K\to \boldsymbol{R}_+^m$ は以下の性質を有している．

（i） 任意の $u\in K$ に対して，$\hat{M}(u)$ は空でない．



図—7　単体 K

（ii）M は，有界で凸なる対応である．

以上までの諸結果は，仮定 5 と独立に得られた．付録における Richter の定理を用いるには，さらに $\hat{M}$ が閉なる対応であることを示す必要がある．それを示すのは，関数空間 $C_{a.e.}[0, \bar{r}]$ における（$\int_0^{\bar{r}} |f(r)| dr$ を距離とする）閉単位球がコンパクトでないことに起因して，容易ではない．しかしながら，仮定 5 を加えると，任意の $N \in M(u)$ に対応する土地配分比率関数 $\alpha(\cdot) \in A(u)$ を単関数（有限個の異なった値をとる関数）で表わすことができる．このことを利用して，少しめんどうな手続ののちに次のことが証明できる．

［補助定理 7.7］　仮定 1 a，2 および 5 のもとでは，$\hat{M} : K \to \boldsymbol{R}^m$ は閉なる対応である．

次に，以下のように記号を変更する．

$v_i = u_i - \underline{u}_i$,　$i = 1, 2, \cdots, m$,　$v = u - \underline{u} \in \boldsymbol{R}^m$,

$w_i = N_i - N_i^0$,　$i = 1, 2, \cdots, m$,　$w = N - N^0 \in \boldsymbol{R}^m$,

また，次のように定義する．

$$d = \sum_{i=1}^{m} (\bar{u}_i - \underline{u}_i), \quad V = \{v \in \boldsymbol{R}^m \mid v \geqq 0, \sum_{i=1}^{m} v_i \leqq d\} \qquad (46)$$

そして，新たな対応 $F : V \to \boldsymbol{R}^m$ を次のように定義する．

$$F(v) = \hat{M}(v + \underline{u}) - N^0 \text{ for each } v \in V \qquad (47)$$

対応 M を人口需要関数とよべば，対応 F は超過人口需要関数とでもよばれるべきものである．以下のことがただちにわかる．

［補助定理 7.8］　仮定 1 a，2 および 5 のもとでは，対応 $F : V \to \boldsymbol{R}^m$ は以下の性質を有している．

（i）各 $v \in V$ に対して，$F(v)$ は空ではない．

（ii）F は，有界，凸かつ閉なる対応である．

（iii）$\sum_{i=1}^m v_i = d$ を満たす任意の $v \in V$ および $w \in F(v)$ に対して，$\sum_{i=1}^m v_i w_i < 0$ となる．

（iv）$v \in V$ で，いずれかの i について $v_i = 0$ となっていれば，任意の $w \in F(v)$ において，いずれかの j につき $w_j > 0$ となっている．

上の補助定理において，（i）と（ii）は補助定理 7.6 と 7.7 より，（iii）は（44）より，また（iv）は補助定理 7.5 の（ii）よりただちに得られる．

最後に，付録における Richter の定理を適用しよう．(47) により定義された対応 F が，Richter の条件（i），（ii），（iii）を満たしていることは，補助定理 7.8 の（i），（ii），（iii）より明らかである（Richter の条件（iii）は，$a = v$ と置くことにより，補助定理 7.8 の（iii）より満たされる）．したがって，Richter の定理より，$w^* \in F(v^*)$ で $\sum_{i=1}^m v_i^* w_i^* = 0$ となるような $v^* \in V$ と $w^* \leqq 0$ が存在する．補助定理 7.8 の（iv）より，そのような v^* においては，どの v_i^* もゼロではあり得ない．つまり，すべての i について $v_i^* > 0$ でなければならない．よって，すべての i について $w_i^* = 0$ でなければならない．つまり，$0 \in F(v^*)$ なる $v^* \in V$ が存在する．$v^* + \underline{u} = u^*$ と置けば，このことは，$N^0 \in M(u^*)$ なる $u^* \in \boldsymbol{R}^m$ が存在することを意味する．したがって，補助定理 7.1 より，次のことが結論できる．

［定理 3］　仮定 1 a，2 および 5 のもとでは，均衡解は常に存在する．

また，以上の議論において，すべての u_i，u_j を G_i，G_j で，またすべてのベクトル u をベクトル G で置き換えれば，定理 2 のときと同様にして，次のことが結論できる．

［定理 4］　仮定 2，3 および 5 のもとでは，任意の $u \in A$ に対して，HS(u)-問題の解は常に存在する．

なお，均衡解（つまり $N^0 \in M(u^*)$ なる u^*）および最適解（つまり $N^0 \in M(G^*)$ なる G^*）の数値計算は，Scarf[14] のアルゴリズムを用いて行うことができる．この点については，文献 1)，3) および 4) を参照されたい．

8.　今後の課題

本論文において，都市内土地利用の連続空間モデルにおける均衡解および最適解の存在証明，ならびにそれらの数値計算法について，2 つのアプローチを試みた．しかしながら，本論文での試みは，この重要な問題の研究に関して端緒を提示したにすぎない．一連の重要な課題が今後に残されている．

まず，仮定 3 に代わる，より一般的な一意性のための条件を得ることが望ましい．次に，本論文の第 2 のアプローチにおいて仮定 5 を用いているが，この仮定がなくても解の存在は成立するのではないかと推察される．つまり，仮定 1 a と 2 のみを用いて解の存在を示すことができるのではないかと思われる．また，本論文は，都市空間が 1 つのパラメーター r を用いて表わされる場合のみを対象としている．単一中心都市の場合における多くの問題はこの場合に属するが，都心を中心とする等交

通費線が家計タイプにより異なる場合には，二次元空間を明示的に用いる必要がある．本論文における第2のアプローチをそのような二次元空間モデルの場合に拡張することは，さほど困難ではないと推察される．

次に，本論文は，付け値関数および敷地関数があらかじめ確定されている場合，つまりそれらの関数が未知変数を含まない場合を対象としているが，より一般的な問題においてはそれらの関数は未知変数をパラメーターとして含んでいる（たとえば，所得，税率など）．この場合には，本論文における第2のアプローチを次のように拡張する必要がある．それらの未知パラメーターが，n 次元のベクトル θ で表わされるものとしよう．この場合には，付け値関数および敷地関数はそれぞれ $\Psi_i(r, u, \theta)$，$s_i(r, u, \theta)$ と表わされる．したがって，(41) の対応 $M(u)$ は $M(u, \theta)$ となる．ここに，$M: \boldsymbol{R}^{m+n} \to \boldsymbol{R}^{m+n}$ で，$(N, \lambda) \in M(u, \theta)$ とすると，θ は想定されたパラメーター値，λ は結果として得られるパラメーター値である．よって，均衡解の存在を示すことは，$(N^0, \theta^*) \in M(u^*, \theta^*)$ となる (u^*, θ^*) の存在を示すことに等しくなる．この一般化はさほど困難ではないと思われる．

より困難な問題は，付け値関数および敷地関数が未知関数を含む場合である．たとえば，交通混雑を明示的に考慮した場合には交通費関数 $T(r)$ が，また家計タイプ間の外部効果（たとえば人種偏見）が存在する場合には家計分布関数 $n_i(r)$ が，未知関数として付け値関数および敷地関数に含まれることになる．それらの未知関数を関数ベクトル f で表わすことにすると，均衡解の存在を示すことは，$(N^0, f^*) \in M(u^*, f^*)$ なる (u^*, f^*) の存在を示すことに等しくなる．しかしながら，この場合には M は関数空間から関数空間への対応となり，分析ははるかに困難になると予想される．1つのアプローチとして，逐次近似法あるいは縮小写像の方法を用いることが考えられる．たとえば，交通混雑の場合を例にとると，まず交通混雑がないと想定された場合の交通費関数 $T_0(r)$ を用いて均衡解を求める．次に，その均衡解における土地利用のもとで実際に計算される交通費関数 $T_1(r)$ を用いて，次の均衡解を求める．この過程が収束すれば，もともとの問題の均衡解の存在が示されたことになる．

次に，本論文は単一中心都市における宅地利用のみを対象としているが，より一般的な都市内土地利用の問題に研究を拡張することが望ましい．あらかじめ，各中心の位置が決定されている，複数中心都市の場合に本論文の分析を拡張することは，それほど困難でないと推察される．より困難な課題は，都市における家計および企業（ビジネスオフィス，工場，商店など）の配置を同時決定する，一般均衡問題における均衡土地利用の存在と一意性に関する研究である．ごく単純化されたモデルを用いての研究はいくつかあるが[15)~17)]，この問題は大部分将来に残された重要な課題である．最後に，以上ではすべて静学モデルが対象とされているが，より野心的な課題は，動学モデルにおける均衡径路および最適径路の存在と一意性に関する研究である．これは，全く未開拓の分野である．

もちろん，連続空間を離散空間で置きなおせば，未知数は有限次元ベクトルとなり，すべての問題はずっとやさしくなる．しかしながら，連続空間における数学的優美さを保持しようとすれば，それから引き起こる数学的困難を避けるわけにはいかない（自縄自縛！）．

謝　辞：本論文を書くうえにおいて，河上省吾，黒田勝彦および森杉寿芳氏より多大なる激励を受けた．また，本論文における第1のアプローチを発展させるうえにおいて，安田八十五，森杉寿芳，柏谷増男および安藤朝夫氏との討論が非常に有益であった．一方，本論文の第2のアプローチを発展させるうえにおいて，Tony Smith より有益な助言を受けた．また，本論文の編集に際して，小出博之および豊間根則道氏より多大なる助力を受けた．以上の方々に対して，心より感謝の意を表する次第である．

付　録

次の定理は Richter[4)] からのものである．

［定理（Richter, 1980）］　$d>0$，$V=\{v \in \boldsymbol{R}^m \mid v \geqq 0, \sum_{i=1}^m v_i \leqq d\}$ としよう．このとき，$F: V \to \boldsymbol{R}^m$ なる対応が以下の条件を満たすものとする：

（ⅰ）　各 $v \in V$ において，$F(v)$ は空ではない．

（ⅱ）　F は，有界，凸かつ閉なる対応である．

（ⅲ）　$\sum_{i=1}^m v_i = d$ なる各 $v \in V$ に対して，次の条件を満たす非負のベクトル $a=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ が存在する．すべての $w \in F(v)$ に対して $\sum_{i=1}^m a_i w_i \leqq 0$ であり，かつ $v_i>0$ のときにのみ $a_i>0$ である．

そうすると，$w^* \in F(v^*)$ で $\sum_{i=1}^m v_i^* w_i^* = 0$ となるようなベクトル $w^* \leqq 0$ と $v^* \in V$ が存在する．

参考文献

1) MacKinnon, J. G.：Urban general equilibrium models and simplical search algorithms, Journal of Urban Economics, 1, pp. 161～183, 1974.

2) Schweizer, U., Varaiya, P. and Hartwick, J.：General equilibrium and location theory, Journal of Urban Economics, 3, pp. 285～303, 1976.

3) King, A. T.：General equilibrium with externalities：a

computational method and urban applications, Journal of Urban Economics, 1, pp. 84～101, 1980.

4) Richter, D. K. : A computational approach to resource allocation in spatial urban models, Regional Science and Urban Economics, 10, pp. 17～42, 1980.

5) Karmann, A. : Spatial barter economics under locational choice, Journal of Mathematical Economics, 9, pp. 259～274, 1982.

6) Ando, A. : Development of a Unified Theory of Urban Land Use, Ph. D. dissertation, University of Pennsylvania, 1981.

7) 藤田昌久：都市空間構造の理論分析，都市経済学（山田浩之編），第4章，有斐閣，1978.

8) Fujita, M. : Urban land use theory, a paper for Fundamentals of Pure and Applied Economics, and for Encyclopedia of Economics, Harwood Academic Publishers, forthcoming.

9) Fujita, M. : Existence and uniqueness of equilibrium and optimal land use-boundary revt curve approach, Working Papers in Regional Science and Transportation, No. 89, University of Pennsylvania, 1984.

10) Fujita, M. : Urban Spatial Theory——Residential Land Use, Cambridge University Press, forthcoming.

11) Herberts, J. and Stevens, B. : A model of the distribution of residential activity in urban areas, Journal of Regional Science, 2, pp. 21～36, 1960.

12) 藤田昌久・柏谷増男：住宅立地論へのプログラミングアプローチ，地域学研究5，pp. 107～134, 1976.

13) Fujita, M. and Smith, T. : Existence of continuous urban spatial equilibrium, forthcoming.

14) Scarf, H. E. : The Computation of Economic Equilibria, Yale University Press, 1973.

15) Ogawa, H. and Fujita, M. : Equilibrium land use patterns in a nonmonocentric city, Journal of Regional Science, 20, pp. 455～475, 1980.

16) Fujita, M. and Ogawa, H. : Multiple equilibria and structural transition of non-monocentric urban configurations, Regional Science and Urban Economics, 2, pp. 161～196, 1982.

17) Imai, H. : CBD hypothesis and economies of agglomeration, Journal of Economic Theory, 28, pp. 275～299, 1982.

(1984. 10. 18・受付)