

異方弾塑性体としての砂の構成則

A CONSTITUTIVE EQUATION OF SAND AS ANISOTROPIC ELASTO-PLASTIC BODY

棚橋由彦*・落合英俊**・伊勢田哲也***

By Yoshihiko TANABASHI, Hidetoshi OCHIAI and Tetsuya ISEDA

A sand is a complicated material that is associated with dilatancy by loading and is also largely influenced by stress histories. In order to represent the characteristics of sand, subsequent anisotropy, which is induced by dilatancy accompanying plastic deformation, is evaluated on the basis of the results obtained from simple laboratory tests under axisymmetric stress conditions. Furthermore, an elasto-plastic stress-strain relation for sand is derived from considering a sand as a strain hardening material not only for shear but also for compression and adopting stress-dilatancy relation. From comparisons of the calculated results with the strains measured in the stress path tests with complex stress histories, it is shown that the proposed equation may be useful in prediction of the stress-strain behaviour of sands.

1. ま え が き

砂はその性質がきわめて複雑な材料であり、負荷に伴い生じるダイレタンスーとひずみの応力径路・履歴依存性の顕著な材料である。したがって実用的でしかも精度のよい変形・安定解析を行うためには、このような砂の特性を考慮し、かつ所要のパラメーターを簡単な室内試験で決定でき変形解析に適用可能な形式の応力ひずみ関係（構成則）を確立することが重要である。

連続体力学の立場から土のダイレタンスーを表現するには2つの方法がある。1つは塑性力学の立場からで、Druckerら¹⁾の指摘するように、塑性ポテンシャル関数に応力の一次不変量を含むことにより表現できる。もう1つは弾性力学の立場からで、土を異方性材料とみなすことにより表現できる。このことは、すでに岩崎²⁾や吉田³⁾により指摘され、それぞれの応力ひずみ関係が誘導されている。しかし岩崎のそれは応力の軸対称仮定を用いており、一般の三次元応力状態下における挙動は計算できない。また吉田のそれは三次元応力下における主応

力・主ひずみ関係を提示したが、変形解析に適用可能な形式にまで至っていない。またいずれも単調負荷のみで、除荷・再載荷過程を含む弾塑性挙動は表現できない。

本報告は、基本的には弾性力学の立場に立ち、弾塑性挙動が表現でき、しかも構成則としての資格を有する一般応力状態の砂の増分関係を提示するものである。まず、土の最も重要な特性の1つであるダイレタンスーは、負荷を受けて生じる後発異方性材料とみなすことにより表現できることを示す。ついで、土の応力・ひずみを球テンソルの一次不変量と偏差テンソルの二次不変量で評価する正八面体異方増分関係から、一般応力状態の異方増分関係を誘導する。さらにひずみを弾性成分と塑性成分に分け、土を圧縮とせん断に対するひずみ硬化体とみなして、それらに対する降伏条件式を別個に与え、異方弾塑性体としての一般土質材料の構成則を提示する。ついで、ストレス・ダイレタンスー関係⁴⁾をはじめ、既往の砂の変形特性の知見を導入し、具体的な砂の弾塑性構成モデルを提案し、豊浦砂を試料とし、簡単な室内三軸試験から、所要のパラメーターの具体的な決定方法を明示する。また、いくつかの複雑な履歴を経る径路試験を実施し、降伏条件式を負荷および除荷過程に対して任意に組み合わせれば、種々の応力履歴を有する任意応力径路下における砂の弾塑性挙動を、構成モデルが後述するよ

* 正会員 長崎大学助手 工学部土木工学科
(〒852 長崎市文教町1-14)

** 正会員 工博 九州大学助教授 工学部水工土木工学科
(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

*** 正会員 工博 長崎大学教授 工学部土木工学科

うな限界はあるものの、かなりの程度まで説明し得ることを明らかにした。

2. 異方性

(1) 初期異方性と後発異方性

砂のように堆積構造や粒子の配向性により、初期応力のもとで存在する異方性は初期異方性または構造異方性 (inherent anisotropy) といわれる。本報告では初期異方性に関しては考慮していない。本報告でいう異方性は、負荷を受ける土質材料がダイレタンシーを生じ、塑性変形することによりもたらされる異方性であり、この異方性を後発異方性 (subsequent anisotropy) と呼称する。

(2) 異方性とダイレタンシー

等方性材料の正八面体応力ひずみ増分関係は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} dv \\ d\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

式(1)中、 K 、 G はそれぞれ体積およびせん断変形係数である。ここに、

$$dv = 3 d\epsilon_{oct} = dI_1$$
$$d\gamma = d\gamma_{oct} = 2 d(I_2'/3)^{1/2}$$

はそれぞれ体積ひずみ、正八面体せん断ひずみ増分、

$$dp = d\sigma_{oct} = dJ_1/3$$
$$dq = d\tau_{oct} = d(2J_2'/3)^{1/2}$$

はそれぞれ平均有効主応力増分、正八面体せん断応力増分であり、サフィックスの繁雑さを避けるため上に表記する。ただし上式において J_1 、 I_1 は応力・ひずみテンソルの一次不変量、 J_2' 、 I_2' は偏差応力・偏差ひずみテンソルの二次不変量である。

なお、本報告では、応力はすべて有効応力を意味し、応力・ひずみともに圧縮を正と約束する。

式(1)から正八面体せん断応力増分 dq により生じる体積ひずみ、すなわちダイレタンシーはゼロとなり、等方性の増分関係ではダイレタンシーを表現できないことが明らかである。

一方、異方性材料の正八面体増分関係は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} dv \\ d\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c & S_a \\ S_{dis} & S_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 S_c 、 S_a 、 S_{dis} 、 S_s は正八面体異方変形係数であり、上式の第1式は体積ひずみの増分 dv には、平均主応力増分 dp と正八面体せん断ひずみ増分 dq が同時に寄与することを示しており、式(2)よりダイレタンシーを表現できることは明らかである。したがって本報告の主要な目的の1つは、式(2)から構成則の誘導方法を提示することと、正八面体異方変形係数の関数形を簡単な室内実験結果により決定する方法の確立にあ

る。

3. 一般土質材料の弾塑性構成則

(1) 正八面体増分関係

正八面体増分関係式(2)のひずみ増分をさらに弾・塑性成分に分けると体積ひずみ増分 dv 、正八面体せん断ひずみ増分 $d\gamma$ は次式で表わせる。

$$\begin{bmatrix} dv \\ d\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dv \\ d\gamma \end{bmatrix}^e + \begin{bmatrix} dv \\ d\gamma \end{bmatrix}^p$$
$$= \begin{bmatrix} dv_c \\ d\gamma_c \end{bmatrix}^e + \begin{bmatrix} dv_a \\ d\gamma_a \end{bmatrix}^e + \begin{bmatrix} dv_c \\ d\gamma_c \end{bmatrix}^p + \begin{bmatrix} dv_a \\ d\gamma_a \end{bmatrix}^p \dots\dots\dots (3)$$

式(3)の下サフィックス c 、 d はそれぞれ平均主応力増分 dp 、正八面体せん断応力増分 dq により生じるひずみ増分を意味し、上サフィックス e 、 p はひずみの弾・塑性成分を意味する。式(3)の中の $d\gamma_c$ は、平均主応力増分 dp により生じる正八面体せん断ひずみ増分を意味する。構造異方性を有する砂に関して、 γ_c^e の存在と γ_c^e がゼロであることは El-Sohby ら⁵⁾ により報告されている。一方、中井・松岡⁶⁾ は砂の初期構造が等方性であれば $\gamma_c^e = 0$ となることを実験により確かめている。著者らの砂供試体の作成方法は、中井・松岡と同様、突き棒により砂の構造を乱し、初期構造が等方性を示すよう努めているので $\gamma_c^e = 0$ とみなしてよいと考える。いずれにしろ、 $d\gamma_c^e$ がダイレタンシー dv_a^e より十分小さいとみなせるならば、後発異方性を考慮した正八面体増分関係は、式(4)で与えられる。

弾性ひずみの増分関係は

$$\begin{bmatrix} dv \\ d\gamma \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} S_c & S_a \\ 0 & S_s \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4\cdot a)$$

塑性ひずみの増分関係は

$$\begin{bmatrix} dv \\ d\gamma \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} S_c & S_a \\ 0 & S_s \end{bmatrix}^p \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4\cdot b)$$

全ひずみの増分関係は

$$\begin{bmatrix} dv \\ d\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c & S_a \\ 0 & S_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4\cdot c)$$

式(3)、(4)からただちに式(5)が導ける。

$$\begin{bmatrix} S_c & S_a \\ 0 & S_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c & S_a \\ 0 & S_s \end{bmatrix}^e + \begin{bmatrix} S_c & S_a \\ 0 & S_s \end{bmatrix}^p \dots\dots\dots (5)$$

ここに S_c 、 S_a 、 S_s はそれぞれ圧縮による体積ひずみ、ダイレタンシー、正八面体せん断ひずみ増分の生じやすさを示す変形係数であり、 S_c^e 、 S_c^p 、 S_j ($j=c, d, s$) はそれぞれ弾性ひずみ・塑性ひずみ・全ひずみ各増分に関する変形係数を意味している。

(2) 軸対称の増分関係

応力増分 dp 、 dq 、ひずみ増分 dv 、 $d\gamma$ は先に式示したように不変量であるから、式(4)から軸対称の2つ

の径路(圧縮・伸張)の増分関係が以下のように導ける.

a) 圧縮条件 ($d\sigma_1 > d\sigma_2 = d\sigma_3$, $d\varepsilon_1 > d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3$)

の場合

ここに, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ は最大・中間・最小主応力増分, $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ は最大・中間・最小主ひずみ増分である.

この場合, 正八面体応力・ひずみ増分と主応力・主ひずみ増分の関係は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} dv &= d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_3 \\ d\gamma &= 2\sqrt{2}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)/3 \\ dp &= (d\sigma_1 + 2d\sigma_3)/3 \\ dq &= \sqrt{2}(d\sigma_1 - d\sigma_3)/3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

式(6)を式(4)に代入し, $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_3$ に関して解くと, 軸対称圧縮条件の増分関係式(7)を得る.

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7\cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \{2(S_c + 3S_s) + 2\sqrt{2}S_d\}/18 \\ a_{12} &= \{2(2S_c - 3S_s) - 2\sqrt{2}S_d\}/18 \\ a_{21} &= \{2S_c - 3S_s + 2\sqrt{2}S_d\}/18 \\ a_{22} &= \{4S_c + 3S_s - 2\sqrt{2}S_d\}/18 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7\cdot b)$$

b) 伸張条件 ($d\sigma_1 = d\sigma_2 > d\sigma_3$, $d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 > d\varepsilon_3$)

の場合

$$\left. \begin{aligned} dv &= 2d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3 \\ d\gamma &= 2\sqrt{2}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)/3 \\ dp &= (2d\sigma_1 + d\sigma_3)/3 \\ dq &= \sqrt{2}(d\sigma_1 - d\sigma_3)/3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

式(8)を式(4)に代入し, $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_3$ で整理して, 軸対称伸張条件の増分関係式(9)を得る.

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9\cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= \{4S_c + 3S_s + 2\sqrt{2}S_d\}/18 \\ b_{12} &= \{2(2S_c - 3S_s) - 2\sqrt{2}S_d\}/18 \\ b_{21} &= \{2(2S_c - 3S_s) + 2\sqrt{2}S_d\}/18 \\ b_{22} &= \{2(S_c + 3S_s) - 2\sqrt{2}S_d\}/18 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9\cdot b)$$

式(7), (9)がそれぞれ軸対称圧縮・伸張条件の増分関係であり, a_{ij} , b_{ij} ($i, j=1-2$)は軸対称変形係数である.

(3) 主応力・主ひずみの増分関係

異方性の主軸と応力増分の主軸が一致する場合の最も一般的な主応力・主ひずみの異方増分関係は次式に示される.

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

上式は, 軸対称の2つの径路における増分関係式(7), (9)を包含していなければならない. この条件から係数等置によって c_{ij} ($i, j=1-3$)は a_{ij} , b_{ij} と, さらに式(7\cdot b), (9\cdot b)を介して, S_c , S_d , S_s と関係づけ

られる. 結局, 主応力・主ひずみの異方増分関係は次式で与えられる.

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{23} \\ c_{31} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{12} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11\cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= a_{11} = \{(S_c + 3S_s) + \sqrt{2}S_d\}/9 \\ c_{22} &= a_{22} - b_{12} = (S_c + 3S_s)/9 \\ c_{33} &= b_{22} = \{(S_c + 3S_s) - \sqrt{2}S_d\}/9 \\ c_{23} &= b_{12} = \{2S_c - 3S_s - 2\sqrt{2}S_d\}/18 \\ c_{31} &= a_{21} = \{2S_c - 3S_s + 2\sqrt{2}S_d\}/18 \\ c_{12} &= a_{12} - b_{12} = (2S_c - 3S_s)/18 \end{aligned} \right\} \dots\dots (11\cdot b)$$

ここに c_{ij} は主応力・主ひずみ増分の変形係数である.

式(11)からダイレタンシーが生じない応力域(弾性域)では $S_d=0$ を代入して,

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22} = c_{33} = (S_c + 3S_s)/9 \\ c_{23} &= c_{31} = c_{12} = (2S_c - 3S_s)/18 \end{aligned}$$

が導かれ, 等方弾性の増分関係となることがわかる.

(4) 一般応力状態の増分関係

a) 主応力軸が回転しない場合 テンソルの増分関係は, 厳密には次式

$$d\varepsilon_{ij} = A_{ijkl}d\sigma_{kl} \dots\dots\dots (12)$$

で与えられ, 4階のテンソル A_{ijkl} (総数81個)と, S_c , S_d , S_s との関係式を求めねばならないが, 応力・ひずみテンソルの対称性

$$d\sigma_{kl} = d\sigma_{lk}, d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ji} \dots\dots\dots (13)$$

から, 実際には, おのおの6個の座標応力・ひずみ増分間の係数行列を求めればよい.

軸対称の増分関係から一般応力状態の増分関係に拡張するにはせん断ひずみ増分の変形係数 c_{44} , c_{55} , c_{66} の関数形を Cole⁷⁾の行ったような単純せん断試験により, 実験的に定めねばならない. しかし本研究の主な目的の1つは, 特殊な試験装置を用いずに, 一般に普及している三軸試験機を用いた簡単な軸対称試験から, 一般応力状態の増分関係を得る方法を提示することにある. したがって本報告では, 線形異方弾性材料とのアナロジーを仮定し, 以下のように決定した.

たとえば, いま異方性の主軸と平行に $x'y'z'$ 座標を設けたとき, 三軸直交異方性材料 (orthotropic material) の増分関係から, z' 軸まわりの回転に対して変形の性質が不変であるとする二軸直交異方性材料 (cross anisotropic material) の増分関係が, 次式で与えられる.

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{x'} \\ d\varepsilon_{y'} \\ d\varepsilon_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{x'} \\ d\sigma_{y'} \\ d\sigma_{z'} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d\gamma_{y'z'} \\ d\gamma_{z'x'} \\ d\gamma_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 2(c_{11} - c_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\tau_{y'z'} \\ d\tau_{z'x'} \\ d\tau_{x'y'} \end{bmatrix}$$

$$\dots\dots\dots(14)$$

このとき (6, 6) 要素が独立な変形係数でなくなり、 $c_{66}=2(c_{11}-c_{12})$ なる関係が得られる。

$d\gamma'_{x'y'}=d\gamma'_{y'z'}$, ..., $d\tau'_{y'z'}=d\tau'_{z'x'}$ と書き改め、このことを一般化すると、次式を得る。

$$d\gamma'_{i'j'}=2(c_{ii}-c_{ij})d\tau'_{i'j'}(i \neq j) \dots\dots\dots(15)$$

上式を用いて c_{44} , c_{55} , c_{66} の関数形が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} c_{44} &= 2(c_{22} - c_{23}) = S_s + 2\sqrt{2} S_d/9 \\ c_{55} &= 2(c_{33} - c_{31}) = S_s - 4\sqrt{2} S_d/9 \\ c_{66} &= 2(c_{11} - c_{12}) = S_s + 2\sqrt{2} S_d/9 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

b) 主応力軸が回転する場合 空間に固定した位置座標 (x, y, z) における異方増分関係は、簡単な誘導の後、行列表示で次のように与えられる。

$$|d\epsilon|^t = \bar{D} |d\sigma|^t = L' C' L |d\sigma|^t \dots\dots\dots(17 \cdot a)$$

ここに t は転置行列を意味する。

$$\left. \begin{aligned} |d\epsilon|^t &= |d\epsilon_x \ d\epsilon_y \ d\epsilon_z \ d\gamma_{yz} \ d\gamma_{zx} \ d\gamma_{xy}| \\ |d\sigma|^t &= |d\sigma_x \ d\sigma_y \ d\sigma_z \ d\tau_{yz} \ d\tau_{zx} \ d\tau_{xy}| \end{aligned} \right\} \dots\dots(17 \cdot b)$$

$$C' = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{12} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(17 \cdot c)$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} l_{11} & l_{12} l_{12} & l_{13} l_{13} & 2 l_{12} l_{13} \\ l_{21} l_{21} & l_{22} l_{22} & l_{23} l_{23} & 2 l_{22} l_{23} \\ l_{31} l_{31} & l_{32} l_{32} & l_{33} l_{33} & 2 l_{32} l_{33} \\ l_{21} l_{31} & l_{22} l_{32} & l_{23} l_{33} & l_{22} l_{33} + l_{23} l_{32} \\ l_{31} l_{11} & l_{32} l_{12} & l_{33} l_{13} & l_{32} l_{13} + l_{33} l_{12} \\ l_{11} l_{12} & l_{12} l_{22} & l_{13} l_{23} & l_{12} l_{23} + l_{13} l_{22} \\ 2 l_{13} l_{11} & 2 l_{11} l_{12} \\ 2 l_{23} l_{21} & 2 l_{21} l_{22} \\ 2 l_{33} l_{31} & 2 l_{31} l_{32} \\ l_{23} l_{31} + l_{21} l_{33} & l_{21} l_{32} + l_{22} l_{31} \\ l_{33} l_{11} + l_{31} l_{13} & l_{31} l_{12} + l_{32} l_{11} \\ l_{13} l_{21} + l_{11} l_{23} & l_{11} l_{22} + l_{12} l_{21} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(17 \cdot d)$$

ここに l_{ij} は $|d\sigma_{ij} - d\sigma_i \delta_{ij}| = 0$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ) の固有ベクトルであり、固有値 (主応力増分) を $d\sigma_i$ ($i=1-3$) とすると次式で与えられる。

$$l_{ij} = \pm \kappa_{ij} / |\kappa_{i1}^2 + \kappa_{i2}^2 + \kappa_{i3}^2|^{1/2}$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{i1} &= \begin{vmatrix} d\tau_{xy} & d\tau_{zx} \\ d\sigma_y - d\sigma_i & d\tau_{yz} \end{vmatrix} \\ \kappa_{i2} &= \begin{vmatrix} d\tau_{zx} & d\sigma_x - d\sigma_i \\ d\tau_{yz} & d\tau_{xy} \end{vmatrix} \\ \kappa_{i3} &= \begin{vmatrix} d\sigma_x - d\sigma_i & d\tau_{xy} \\ d\tau_{xy} & d\sigma_y - d\sigma_i \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17 \cdot e)$$

式 (11 \cdot b), (16), (17) からわかるように、一般応力状態の増分関係の係数行列 c_{ij} は非対称であり式 (17) がひずみの径路依存性を表現できるのは明らかである。

また c_{ij} はすべて 3 個の独立な正八面体異方変形係数 S_c , S_d , S_s の一次式で表わされている。

なお主応力軸が回転する一般応力状態の場合、式 (17 \cdot a) の \bar{D} の成分を \bar{d}_{ij} とすると $\bar{d}_{ij} \neq 0$ ($i, j=1-6$) となる。したがって、たとえば単純せん断試験の軸応力方向を z 、せん断方向を x とすると軸応力作用方向のひずみ ϵ_z (ダイレタンス) は $d\epsilon_z = dv = \bar{d}_{33} d\tau_{zx}$ となり、単純せん断試験におけるダイレタンスが表現できることは、容易に想像できよう。なお、第一著者は本構成則を FEM に組み込み、有限砂層の部分載荷問題を解析し、単純せん断と等しい条件に位置するエレメントが、主応力軸の回転に伴い膨張のダイレタンスを生じる現象を説明し得ることをすでに明らかにしている⁸⁾。

さて、Cole⁷⁾ は各面上の応力計測を伴う砂の単純せん断試験を行い、主応力軸が回転する場合、応力増分・ひずみ増分の主軸は一致せず、ひずみが大きくなり塑性ひずみが卓越すると応力とひずみ増分の主軸が一致することを実験的に明らかにしている。

式 (17) は異方弾性理論に立脚するため、主応力軸が回転すると応力増分とひずみ増分の主軸は一致しないので定量的評価はともかく実験事実を一一応現できる。しかし塑性ひずみ増分と応力の主軸の一致は説明できない。以上のような制約はあるものの式 (17) はそのまま変形解析に適用可能な形式で提示されており、構成則としての資格を有している。

4. 応力履歴の考慮

一般に、ひずみ硬化体の応力空間における降伏曲面(降伏条件式)は次式で与えられる。

$$f(\sigma_{ij}) = f_c \dots\dots\dots(18)$$

ここに f は降伏関数であり、応力 σ_{ij} の関数で与えられる。 f_c は一般には応力 (またはひずみ) 履歴の影響を受け定数ではない。ひずみ硬化体では、降伏関数 f が、 $f = f_c$ 、かつ $df > 0$ を満足するとき、降伏が生じる。また f が $f < f_c$ 、または $df < 0$ を満足するとき、弾性ひずみのみ生じる。応力空間で現在の降伏曲面の外側の応力点には塑性ひずみを伴わなければ到達できず、その内側応力点には弾性ひずみのみで到達できる。

ここでは、圧縮とせん断に対する降伏条件式を別個に与える。5. で示すようにダイレタンス v_d 、正八面体せん断ひずみ γ_d ともに正八面体応力比 $\eta = q/p$ により規定されることから、せん断に対する降伏関数としては η を採用するのが妥当であろう。一方圧縮に対する降伏関数としては圧縮による体積ひずみ v_c が平均主応力 p により規定されるから、 p を採用する。なお η と同様無次元量で統一するため、 p を大気圧 $p_0 = 98 \text{ kPa}$ で除した値 $\xi = p/p_0$ を用いる。

塑性理論では加工硬化パラメーターを用いるとき、 f_c は塑性仕事 $\int dW^p$ の関数で与えられるが、本報告では異方増分関係を用いるため、一般には主応力軸と塑性主ひずみ増分軸が一致しないので塑性仕事の計算が困難である。したがって本報告では、 f_c は応力履歴のみの関数とし、次の降伏条件式を採用する。

$$\left. \begin{aligned} \text{圧縮に対する降伏条件式} & ; \xi = \xi_m \\ \text{せん断に対する降伏条件式} & ; \eta = \eta_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

ここに ξ_m, η_m は、応力履歴により ξ, η の現在までに経験した最大値である。

式(19)から明らかなように、採用したせん断に対する降伏規準は、拡張された Von Mises 則であり、主応力空間で空間対角線を軸とする円錐 ($\eta = \eta_m$) に直交するふたをした ($\xi = \xi_m$) 型であり、土の降伏規準として妥当と認められている松岡・中井⁹⁾、Lade¹⁰⁾ に代表されるいわゆる“おむすび型”の降伏規準を満足しない。

式(19)を (ξ, η) 平面を用いて模式的に示すと、図-1 のようである。

砂が初期の応力状態 $P_0(\xi_0, \eta_0)$ から、負荷を受けて図中 $P_0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow P$ なる径路をたどり、現在の応力状態 $P(\xi, \eta)$ になったとしよう。このとき ξ_m は点1で、 η_m は点2で経験しており、したがって現在の降伏曲面は (ξ, η) 平面上 $\square OASB$ で表わされる。ただし \overline{AS} ($\xi = \xi_m$) が圧縮に対する現在の降伏曲面である。現在の応力状態を示す点 $P(\xi, \eta)$ のとり得る範囲は、その定義から $\xi \leq \xi_m, \eta \leq \eta_m$ より i) 隅角 S と一致する場合、ii) \overline{AS} 上、iii) \overline{BS} 上、iv) $\square OASB$ の内部にある場合の4通りである。現在の応力状態を (ξ, η) とすると、圧縮に対しては $\xi = \xi_m$ かつ $d\xi > 0$ のとき降伏、すなわち、圧縮による塑性体積ひずみ増分 $dv_c^e = S_c^e dp$ が生じる。一方 $\xi < \xi_m$ または $d\xi < 0$ のときは降伏せず、 $dv_c^e = 0$ ($S_c^e = 0$) である。同様にしてせん断に対しては $\eta = \eta_m$ かつ $d\eta > 0$ のとき降伏、すなわち塑性ダイレタンシー増分 $d\gamma_s^e = S_s^e dq$ 、塑性正八面体せん断ひずみ増分 $d\gamma_s^e = S_s^e dq$ が生じる。一方 $\eta < \eta_m$ または $d\eta < 0$ のとき

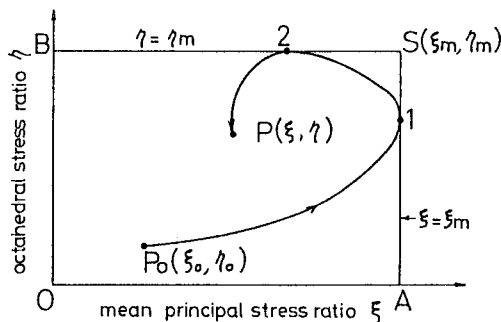


図-1 応力比平面 (ξ, η) における降伏曲面の概念図

$dv_s^e = d\gamma_s^e = 0$ ($S_s^e = S_s^e = 0$) となる。以上のように、現在の応力状態と過去の応力履歴および応力増分の負荷、除荷過程に応じて、適宜、 S_j^e ($j = c, d, s$) を取捨し、任意の応力履歴を有する任意の応力径路に沿う砂の弾塑性挙動を計算することができる。

5. 砂の具体的な所要パラメーターの決定方法

式(4), (11・b), (16), (17) に一般応力状態の増分関係が与えられたが、次にその変形係数の応力の関数形の具体的な決定方法を示さねばならない。工学的な見地からは、できるだけ簡単な試験機、数少ない径路で所要パラメーターが決定できることが望ましい。この観点に立って従来報告されている砂の変形特性を考慮して、変形係数の定式化および所要パラメーターの実験による決定方法について考察する。式(4)から明らかなように、除荷・再載荷過程を含む等方圧縮試験 ($dq = 0$; RC テストと呼称) から S_c^e, S_s^e, S_c が平均主応力一定試験 ($dp = 0$; RD テストと呼称) から S_a^e, S_a, S_a , および S_s^e, S_s, S_s が決定できる。

(1) 圧縮による体積ひずみ増分の変形係数

Hertz の理論的考察¹¹⁾をはじめ、砂の圧縮による体積ひずみ v_c は平均主応力 p の指数関数になることが認められているので RC テストの結果から、 $p-v_c$ 関係を両対数紙にプロットし、式(4・c)の S_c に用いる2つのパラメーターを図-2 のように決定する。

$$\left. \begin{aligned} v_c &= \nu_1 p^{\nu_2} \\ S_c &= dv_c/dp = \nu_1 \nu_2 p^{\nu_2-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20 \cdot a)$$

RC テストの除荷・再載荷過程において生じるヒステリシスループを1本の直線で近似し、 S_c^e に用いるパラメーター ν_3 を決定する (図省略)。

$$\left. \begin{aligned} v_c^e &= \nu_3 p \\ S_c^e &= dv_c^e/dp = \nu_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20 \cdot b)$$

式(5)と(20・a)(20・b)より

$$S_c^e = S_c - S_c^e = \nu_1 \nu_2 p^{\nu_2-1} - \nu_3 \dots\dots\dots(20 \cdot c)$$

(2) 正八面体せん断ひずみ増分の変形係数

正八面体せん断ひずみ γ_d は図-3(c)からも明らかな

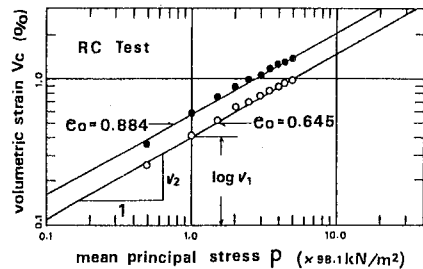


図-2 パラメーター ν_1, ν_2 の決定方法 (RC テストの実測値から)

ように η の双曲関数で近似できる。RD テストの結果から、 $\gamma_d/\eta \sim \gamma_a$ 関係をプロットし、 S_s に関する2つのパラメーター λ_1, λ_2 を図-3(a) に従い決定する。

$$\begin{aligned} \gamma_a &= \lambda_1 \eta / (1 - \lambda_2 \eta) \\ S_s &= d\gamma_a/dq = (d\gamma_a/d\eta)(d\eta/dq) \\ &= \lambda_1/p(1 - \lambda_2 \eta)^2 \dots \dots \dots (21 \cdot a) \end{aligned}$$

弾性正八面体せん断ひずみ γ_a^e は図-3(c) に示すように $\eta - \gamma_a$ 関係の初期立ち上がり勾配 $1/\lambda_1$ とヒステリシスループの中線との間に平行性が認められるので γ_a^e, S_s^e は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \gamma_a^e &= \lambda_1 \eta \\ S_s^e &= d\gamma_a^e/dq \\ &= (d\gamma_a^e/d\eta)(d\eta/dq) \\ &= \lambda_1/p \dots \dots \dots (21 \cdot b) \end{aligned}$$

式(5)と(21・a)(21・b)より

$$\begin{aligned} S_s^e &= d\gamma_a^e/dq = S_s - S_s^e \\ &= \lambda_1 \{ (1 - \lambda_2 \eta)^{-2} - 1 \} / p \dots \dots \dots (21 \cdot c) \end{aligned}$$

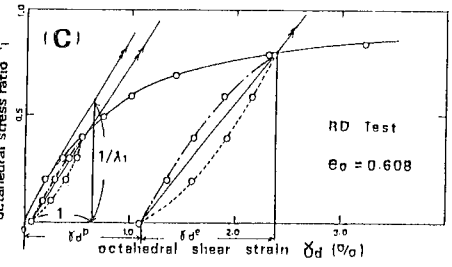
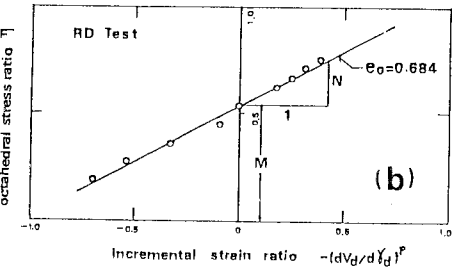
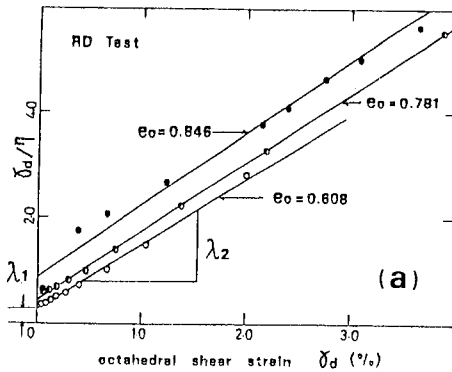


図-3 パラメーター $\lambda_1, \lambda_2, M, N$ の決定方法 (RD テストの実測値から)

(3) ダイレタンスー増分の変形係数

ダイレタンスーは本来土の非可逆的な変形に伴い生じるものとされている¹²⁾から、ダイレタンスーの弾性成分 v_a^e はゼロとみなしてよい。

$$\begin{cases} v_a^e = 0 \\ S_a^e = d v_a^e / dq = 0 \end{cases} \dots \dots \dots (22 \cdot a)$$

正八面体面上においてストレス・ダイレタンスー関係^{12), 13)}の成立を認め、RD テストの結果から $\eta - (dv_a/d\gamma_a)^p$ 関係をプロットし、直線近似から S_a に関する2つのパラメーター M, N を図-3(b) に従い決定する。

$$\begin{aligned} \eta &= M - N (dv_a/d\gamma_a)^p \text{ より} \\ d v_a^e &= \{ M - \eta \} / N \cdot d \gamma_a^e \\ &= \{ M - \eta \} / N \cdot S_s^e \cdot dq \end{aligned}$$

上式に式(21・c)を代入すると

$$\begin{aligned} d v_a^e &= \frac{\lambda_1 (M - \eta) \cdot \{ (1 - \lambda_2 \eta)^{-2} - 1 \}}{N \cdot p} \cdot dq \\ S_a^e &= S_a = d v_a^e / dq \\ &= \frac{\lambda_1 (M - \eta) \cdot \{ (1 - \lambda_2 \eta)^{-2} - 1 \}}{N \cdot p} \dots \dots \dots (22 \cdot b) \end{aligned}$$

以上、既往の砂の変形特性に関する知見として

- ① v_c は p の指数関数で近似可能
- ② γ_a は η の双曲関数で近似可能
- ③ 正八面体面上でのストレス・ダイレタンスー関係の成立

を認めて、砂の具体的な弾塑性正八面体変形係数の定式化を示したが、式(20)~(22)をまとめて行列表示すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} S_c & S_a \\ 0 & S_s \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \nu_3 & 0 \\ 0 & \lambda_1/p \end{bmatrix} \dots \dots \dots (23 \cdot a)$$

$$\begin{bmatrix} S_c & S_a \\ 0 & S_s \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} \nu_1 \nu_2 p^{\nu_2-1} - \nu_3 & \frac{\lambda_1 (M - \eta) \{ (1 - \lambda_2 \eta)^{-2} - 1 \}}{N \cdot p} \\ 0 & (\lambda_1/p) \cdot \{ (1 - \lambda_2 \eta)^{-2} - 1 \} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (23 \cdot b)$$

式(21・b)を認めると、平均主応力一定試験は、単調負荷Dテストのみでよくなり、所要試験がさらに簡単になり実用的である。すなわちRCテストとDテスト各1回で図-2, 3の整理方法により、構成モデルに所要の7個のパラメーターが決定できる。砂の具体的な構成モデルは結局、式(11・b), (16), (17), (23)と降伏条件式(19)より構成される。

6. 構成則の検証

(1) 試料、供試体作成および試験方法

試料は豊浦標準砂 ($G_s=2.65, U_c=1.46$) を用いた。供試体は直径5 cm, 高さ約12 cmの円柱, その作成方

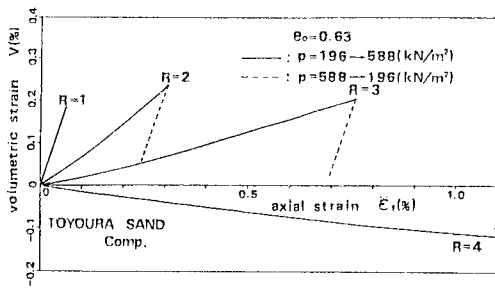
法は水中落下法により、6層各層ごとに突き棒で構造を乱し、初期構造ができるだけ等方性になるよう努めた。全試験を通じて応力制御・排水条件で行い、各荷重増分は、ひずみ増分速度が0.05%/minになるのを待って段階載荷した。軸変位は最小目盛1/100mmのダイヤルゲージ、体積変化量は供試体から排出または流入した水量をビュレット（容量5cm³、最小目盛0.05cm³）で読み取った。なお供試体とペDESTAL・キャップ間には、超真空用シリコングリースを塗布した2枚の有孔ゴムスリーブを挿入し、端面摩擦の軽減に努めている。

(2) 豊浦砂の所要パラメーターと初期間隙比の相関
豊浦砂の初期間隙比 e_0 を種々変えて、RC テスト、D テストを行い、7個の所要パラメーターと初期間隙比 e_0 との相関を求めた。各パラメーターは e_0 の一次式で近似できた。

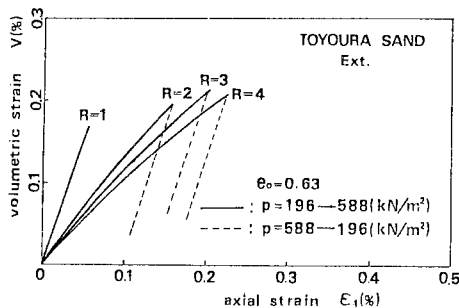
- $\mu_1 = 0.68 e_0 - 0.044$
- $\mu_2 = -0.022 e_0 + 0.59$
- $\mu_3 = 0.12$
- $\lambda_1 = 1.09$
- $\lambda_2 = 1.98 e_0 - 0.37$
- $M = 0.60$
- $N = 2.37 e_0 - 0.86$

(3) 計算値と実測値の比較および考察

a) 三軸等方および三軸異方圧縮・異方伸張試験



(a) 三軸異方圧縮経路



(b) 三軸異方伸張経路

図-4 等方および異方圧縮・異方伸張試験の計算値 ($\epsilon_1 \sim v$ 関係)

図-4(a), (b) にそれぞれ異方圧縮, 異方伸張試験の提案構成モデルによる軸ひずみ $\epsilon_1 \sim$ 体積ひずみ v 関係の計算値を示す。計算は (a), (b) 両図ともに密な砂 ($e_0 = 0.63$) を $p = 196 \text{ kN/m}^2$ をひずみ原点として、 $p = 588 \text{ kN/m}^2$ まで負荷した後 $p = 196 \text{ kN/m}^2$ まで除荷の条件で行っている。図-4(a) の異方圧縮の計算値は El-Sohby ら⁵⁾ により報告された、主応力比 $R (= \sigma_1 / \sigma_3)$ が大きくなるほど圧縮ひずみが小さくなり、ついには膨張のダイレタンスを生じる現象をよく表現している。また $\epsilon_1 \sim v$ 関係の計算値は、下に凸なわずかな湾曲を示しており、これは El-Sohby らの実測の傾向と一致しており興味深い。なお密な豊浦砂の場合 R の値が3から4の間で膨張に転ずるとの中井・松岡¹⁴⁾の報告ともよく一致している。

図-4(b) から異方伸張試験では、 $R = 4$ でまだ体積ひずみが圧縮側にあるという中井・松岡の実測の傾向を計算値が説明しているのが読み取れる。しかし、圧縮条件は、定量的にもかなり満足の数値であるのに対し伸張条件は、 $\epsilon_1 \sim v$ 関係が上に凸にかなり湾曲しており、 $R = 4$ の実測のダイレタンス¹⁴⁾を過小に評価している。

以下提案式に基づいて、異方圧縮試験における先述の実測の傾向の説明を試みる。

式 (11) に $d\sigma_2 = d\sigma_3 = d\sigma_1 / R$ を代入し、体積ひずみ・軸ひずみ増分比として式 (24) を得る。

$$\frac{dv}{d\epsilon_1} = \frac{3(S_c + S_a \cdot \eta)}{(S_c + S_a \cdot \eta) + 3 S_s \cdot \eta / \sqrt{2}} \dots (24)$$

ここに $\eta = \sqrt{2} (R - 1) / (R + 2)$ であり、等方圧縮 $R = 1$ ($\eta = 0$) のとき $dv/d\epsilon_1 = 3$ となる。異方圧縮 ($R > 1$) の場合、 R の値が大きくなるなど、式 (24) の分母第3項のせん断ひずみの変形係数 S_s が大きくなり (式 (21-a) 参照), $dv/d\epsilon_1 < 3$ となり、 $dv/d\epsilon_1$ は小さくなっていく。 $\eta > M$ を満足すると (図-3(b) 参照), 膨張のダイレタンスを生じるから $S_a < 0$ となる。したがって R の値が $S_c + S_a \cdot \eta < 0$ を満足するとき $dv/d\epsilon_1$ は負、すなわち膨張の体積ひずみを生じる。このように提案式によれば、異方圧縮試験における砂の変形特性を簡潔に説明づけることができる。

b) 多軸試験 正八面体面上で放射状の (p 一定, θ 一定) 径路を採用した。ただし θ と主応力間には次の関係式が成り立つ。

$$\tan \theta = \sqrt{3} \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3)} \dots (25)$$

$\theta = 0^\circ$ は三軸圧縮, $\theta = 30^\circ$ は中間主応力一定, $\theta = 60^\circ$ は三軸伸張試験に対応する。計算値を図-5(a)~(e) に実線で示す。計算は $p = 98 \text{ kN/m}^2$, $e_0 = 0.620$ の条件で行った。比較のため、図中には、宮森¹⁵⁾による豊浦砂の実測値もあわせ示している。 $\theta = 0^\circ$ で計算値が実測のひ

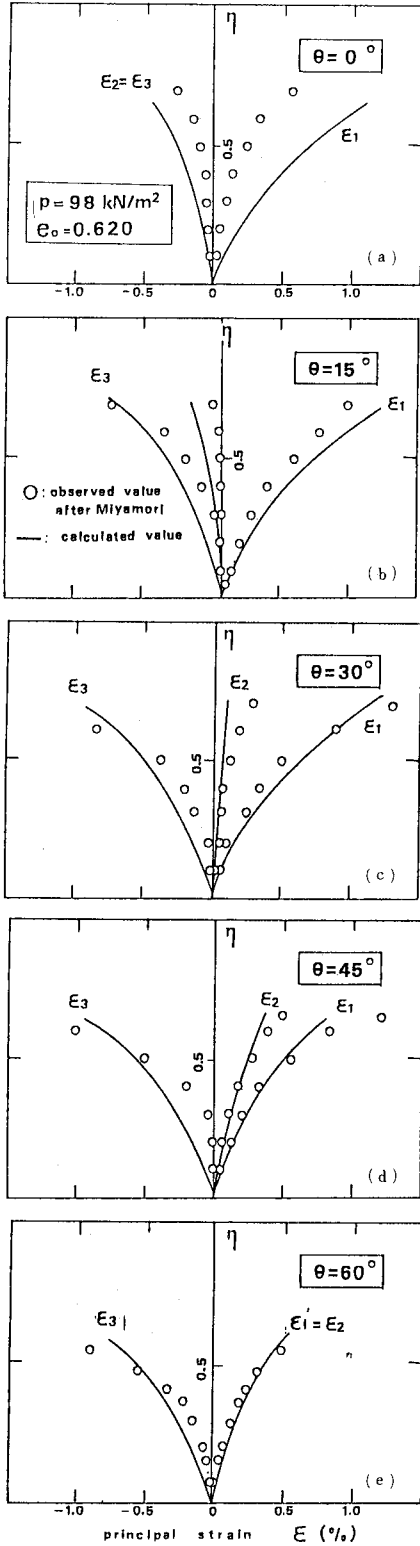


図-5 多軸試験 (p 一定, θ 一定) の主応力・主ひずみ関係 (プロット点は宮森¹⁵⁾による実測値)

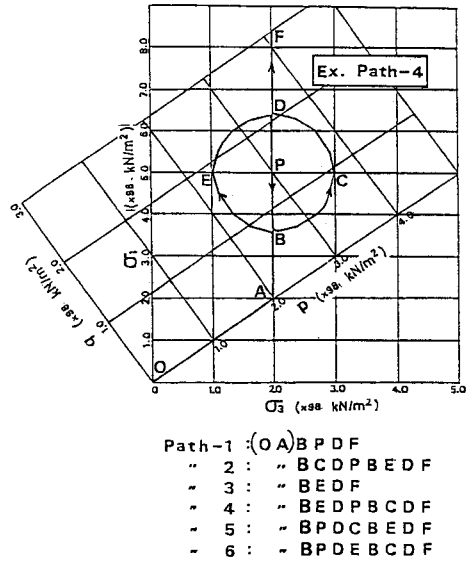


図-6 採用した ϕ 字形応力経路 (軸対称圧縮条件)

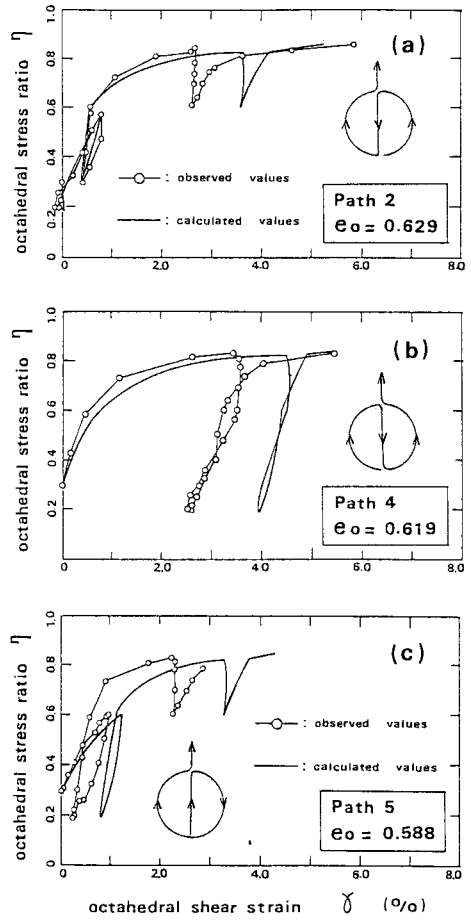


図-7 ϕ 字形経路試験の正八面体応力比 η ~せん断ひずみ γ 関係

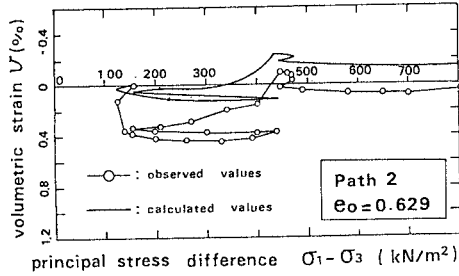


図-8 ϕ字形径路試験の軸差応力 (σ₁ - σ₃) ~ 体積ひずみ v 関係

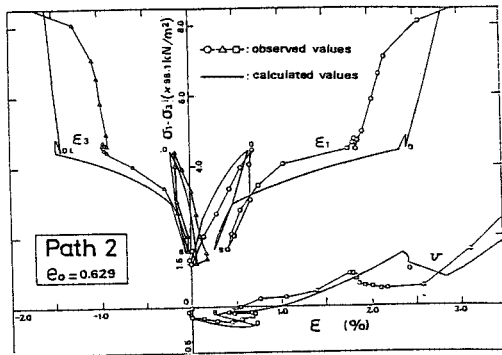


図-9 ϕ字形径路試験の軸差応力 (σ₁ - σ₃) ~ 軸ひずみ ε₁, ε₃ ~ 体積ひずみ v 関係

ずみを過大評価しているが、それ以外では比較的良好に砂の三次元挙動を説明し得ている。計算値は $\theta = 15^\circ$ では ϵ_2 は負、 $\theta = 30^\circ$ では正、したがって平面ひずみ状態は $\theta = 15^\circ \sim 30^\circ$ の間に存在することになり、市原ら¹⁶⁾の豊浦砂の平面ひずみ試験の実測結果や、中井・松岡⁶⁾の実測結果とも一致している。

c) ϕ字形径路試験 構成モデルが、砂の弾塑性挙動を説明し得るかを吟味するために、図-6に示す複雑な応力径路をたどる ϕ字形の径路試験を行った。なお図中 AF は側圧一定三軸圧縮の径路であり、B 点をひずみ原点としている。図-6の下段に示した6つの径路のうち、Path 2, 4, 5 についてせん断ひずみの挙動を γ - η 関係でプロットしたのが図-7(a)~(c)である。図中白丸を細実線で結んだのが実測値、太実線が計算値である。いずれもせん断ひずみの硬化・リバウンド特性を計算値がよく説明しているのが読み取れる。特に図-7(b)の Path 4 では実測のヒステリシスループがねじれる現象を計算値がよく説明しており興味深い。一例として、Path 2の軸差応力~体積ひずみ関係を図-8に、軸差応力~軸ひずみ~体積ひずみ関係を図-9に示す。両図から、軸対称圧縮条件に限れば、ϕ字形径路に沿って種々の複雑な応力履歴を受ける砂の弾塑性挙動を、提案構成モデルが的確に把握しているのがうかがえる。

(4) 問題点と今後の課題

提案構成モデルによる計算値は、異方圧縮試験におけるダイラタンシー特性、多軸応力下における中間主ひずみの挙動など、いずれも既の実測の傾向とよい対応を示した。また ϕ字形径路試験における砂の複雑な応力径路・履歴依存性や硬化・リバウンド特性をよく説明することを明らかにした。

しかし、松岡・中井⁶⁾により、砂の具体的な構成モデルの定式化にあたり採用した

② γ_d を η の双曲線で近似

③ 正八面体面上でのストレス・ダイラタンシーの成立を認めると、②、③ともに三軸圧縮試験結果と三軸伸張試験結果が同一曲線上にプロットされないことが指摘されている。このことは三軸圧縮試験結果により、パラメーターを決定する提案モデルでは、伸張側の実測の挙動が説明できないことを意味している。異方伸張試験の計算結果(図-4(b))にその傾向が認められるようである。これは、足立・龍岡¹⁷⁾による拡張された Von Mises 則は三軸圧縮に近い応力状態においてしか実験結果を説明できないとの指摘とも密接に関連している。

これらの指摘には、西・江刺¹⁸⁾の弾塑性モデルにならない、パラメーター M を b 値または θ (式 (25)) の関数とすることによりある程度解決できそうであるが、今後の課題としたい。

7. あとがき

本研究の目的は異方弾塑性理論に立脚して、できるだけ簡単な試験でできるだけ複雑な挙動を表現し得る構成則の確立にあった。簡単な2つの三軸試験で所要のパラメーターがすべて求まり、しかも砂のダイラタンシー特性や複雑な弾塑性挙動をよく説明しており、一応所期の目的は達成されたと考える。ただし提案式の真の意味での検証は、主応力軸の回転を伴う境界値問題の解析によりなされねばならず、先述した問題点も含め、機会を改めて、別途報告する予定である。

末筆ながら、本研究に際し実験・計算に多大な協力を頂いた長崎大学卒業生 内藤秀信氏(現・応用地質調査事務所(株))、また折りにふれ叱咤激励いただいている九州大学工学部 山内豊聡教授に深謝の意を表します。

なお本研究には、九州大学大型計算機センター FACOM-M 200 と長崎大学情報処理センター FACOM-M 180 II AD を使用したことを附記する。

参考文献

1) Drucker, D. C., Gibson, R. E. and Henkel, D. J. : Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity, Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., Vol. 122, pp. 338~346, 1957.

- 2) 岩崎肇夫：砂の応力-ひずみ関係についての一考察，土木学会論文報告集，第209号，pp.95~105，1973.
- 3) Yoshida, S. : Stress-strain relationship of soils as anisotropic bodies under three different principal stresses, *Soils and Foundations*, Vol.20, No.1, pp.1~11, 1980.
- 4) Rowe, P.W. : The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.269, pp.500~527, 1962.
- 5) El-Sohby, M.A. and Andrawes, K.Z. : Experimental examination of sand anisotropy, 8th ICSMFE, Vol.1, pp.103~109, Moscow, 1973.
- 6) 中井照夫・松岡 元：3主応力下の土のせん断挙動に関する統一的理解，土木学会論文報告集，第303号，pp.65~77，1980.
- 7) Cole, E.R.L. : The behaviour of soils in the simple shear apparatus, Ph. D Thesis, Cambridge University, 1967.
- 8) 棚橋由彦：土質材料のダイラタシー現象を考慮した有限要素解析，土木学会年次学術講演概要集，第Ⅲ部，pp.165~166，1977.
- 9) Mitsuoka, H. and Nakai, T. : Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stress, *Proc. of JSCE*, No.232, pp.59~70, 1974.
- 10) Lade, P.V. : Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces, *Int. J. Solids and Structures*, Vol.13, pp.1019~1035, 1977.
- 11) 最上武雄編著：土質力学，第8章，粒状体の力学，pp.940~945，技報堂，1969.
- 12) Frydman, S., Zeitlen, J.G. and Alpan, I. : The yielding behaviour of particulate media, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol.10, pp.341~362, 1973.
- 13) Ohta, H., Yoshitani, S. and Hata, S. : Anisotropic stress-strain relationship of clay and its application, *Soils and Foundations*, Vol.15, No.4, pp.61~79, 1975.
- 14) 中井照夫・松岡 元：任意応力径路下の土の変形挙動に関する統一的理解，土木学会論文報告集，第306号，1981.
- 15) 宮森建樹：多軸応力状態における砂のせん断強さと変形特性，土木学会論文報告集，第255号，pp.81~91，1976.
- 16) 市原松平・松澤 宏：平面ひずみ状態と軸対称ひずみ状態における乾燥砂のせん断特性，土木学会論文報告集，第173号，pp.47~59，1970.
- 17) 足立紀尚・龍岡文夫：新体系土工学，18，土の力学(Ⅲ)，技報堂，1981.
- 18) Nishi, K. and Esashi, Y. : Stress-strain relationships of sand based on elasto-plastic theory, *Proc. of JSCE*, No.280, pp.111~122, 1978.

(1984.6.8・受付)