

## エネルギー関係からみた掃流砂現象の特性

ON THE CHARACTERISTICS OF BED-LOAD PHENOMENON FROM  
THE ASPECT OF ENERGY BALANCE

関根 正人\*・吉川 秀夫\*\*

By Masato SEKINE and Hideo KIKKAWA

The sediment laden flow is classified into the states of equilibrium and nonequilibrium. In the former case, sediment particles exchange the energy with water and as a whole the energy level of flow is constant. On the other hand, sediment particles and water dissipate the constant energy per unit length in the latter. Authors study the characteristics of bed-load phenomenon from the view point of energy balance by using the numerical simulation and experimental results.

## 1. はじめに

掃流砂を伴う流れについて考えると、これも他の諸現象と同様に非平衡状態と平衡状態とに分けられる。前者は、固定床上の流砂を伴わない流れが移動床上へ流入し、河床土砂粒子の離脱・流送・停止の各過程を経て、エネルギー的に平衡な状態に達するまでの過渡的な流れや、水深その他の流れ自身の水理量変動する移動床上の不等流などに相当する。こうした流れでは、流水と流砂とは絶えずエネルギーの交換を行い、流れ全体の系ではエネルギーのつり合いがとれているものの、おのおのエネルギー状態は変化していくと考えられる。一方、後者では、個々の粒子の停止および離脱による粒子の交換はあるものの、流砂全体がもつエネルギーおよび流水がもつエネルギーは、それぞれ平衡状態での一定の値をとると考えられる。これまで、このような非平衡・平衡の掃流現象については、step-length を考えることにより説明されてきたが、本論では、前報<sup>1)</sup>で示したシミュレーションの結果と実測結果とをもとに、それぞれの状態に

ついてエネルギーのバランスを考えることにより現象の解明を試みる。

## 2. 非平衡状態でのエネルギー・バランス

Fig.1のように固定床から移動床へ入る流れ、あるいはある断面の上流側からは土砂が供給されない流れに対して、この流れが平衡状態に達するまでの過程についてエネルギーの面から考えることにする。ここで、上記の境界断面を断面Ⅰ、平衡状態に達した断面を断面Ⅱとすると、両断面間では、流れは不等流で、流砂は非平衡状態にあり、その結果、流速分布、抵抗および流砂量は変化するのに対し、断面Ⅱより下流では、流れは等流で、流砂は平衡状態にあると考えられる。そこで、まず、流水について考えると、断面Ⅰでもっている河床を基準としたエネルギー  $E_{w1}$  および両断面間のポテンシャル差  $\phi_w$  の和のうち、大半は断面Ⅱでもっているエネルギー  $E_{w2}$  と底面せん断力<sup>2)</sup>の形で系外へ逸散するエネルギー  $W_T$  に変わるが、一部はエネルギーの内的消費  $E_{in}$  として抗力の形で粒子に供給され、結果としてエネルギーのつり合いがとれていると考えられる。一方、粒子についてみると、断面Ⅰでは河床を基準とした土砂粒子のエネルギーは0であるが、ある距離だけ流下する間にポテンシャル差  $\phi_s$  と流水から供給されるエネルギー  $E_{in}$  を受

\* 学生会員 早稲田大学大学院理工学研究科  
(〒160 新宿区大久保3-4-1)

\*\* 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科  
(同上)

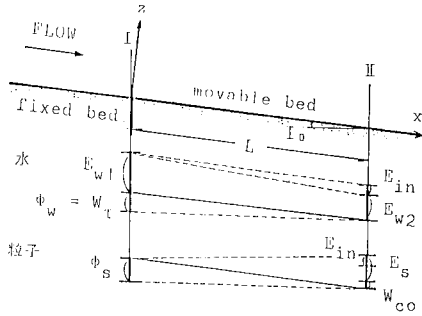


Fig. 1 Definition.

け、同時に河床との衝突によりエネルギー  $W_{co}$  を系外へ逸散しながら、断面Ⅱで平衡状態にある掃流粒子のもつエネルギー状態  $E_s$  に達すると考えられる。このことから、次のつり合い式が成り立つ。

$$\text{流水に対して：} E_{w1} + \phi_w = E_{w2} + W_r + E_{in} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{粒子に対して：} 0 + \phi_s + E_{in} = E_s + W_{co} \dots\dots\dots (2)$$

式(2)より、掃流粒子が平衡状態に達するのに要する距離  $L_r$  の算出を試みる。算出にあたっては、まず1つの典型的な状態として、河床を離脱した粒子のすべてが Fig. 1 の区間内を停止することなく移動し続けると仮定し、しかも平衡状態にある断面Ⅱの河床単位面積上方に移動状態で存在する粒子は、この区間から均等に供給されると考えることにする。このような仮定のもとにエネルギー諸量を考えると、ポテンシャル差  $\phi_s$  は、移動状態にある全粒子の平均として次式で表わされる。

$$\phi_s = (\rho_s - \rho_f) \cdot N \cdot k_3 d^3 \cdot g \cdot I_0 \cdot \frac{L}{2} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\rho_s$ 、 $\rho_f$  は粒子および水の密度、 $d$  は粒径、 $N$  は平衡状態にある河床の単位面積上方に移動状態で存在する粒子数、 $k_3$  は体積に関する係数、 $I_0$  は河床勾配であり、 $L$  は上記の仮定のもとで流れが等流状態に達するのに要する距離(すなわち、流砂が平衡状態に達して、流れの確立(flow establishment)に必要な距離)である。エネルギーの内的供給  $E_{in}$  は、流速  $u_f(z)$  と粒子速度  $u_s(z)$  の相対速度差の2乗に比例し、この平均を  $(u_f - u_s)^2$  とすれば、次式で表わされる。

$$E_{in} = \frac{N}{2} \cdot \rho_f \cdot C_D \cdot k_2 d^2 \cdot \overline{(u_f - u_s)^2} \cdot \frac{L}{2} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $C_D$  は抗力係数、 $k_2$  は面積に関する係数である。また、粒子の平衡状態でのエネルギー  $E_s$  は、次式で表わされる。

$$E_s = (\rho_s - \rho_f) \cdot N \cdot k_3 d^3 \cdot \left[ g \cdot \overline{h_s} + \frac{\overline{u_s^2}}{2} \right] \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\overline{h_s}$ 、 $\overline{u_s^2}$  は粒子の平均跳躍高さ、および移動速度の断面内2乗平均値である。なお、式(5)から  $E_s$  を算出するにあたっては、実測により得られた流砂の平

衡状態における各値を用いた。また、粒子の移動に伴い、粒子が河床との衝突により逸散するエネルギー  $W_{co}$  は、単位距離区間当たり  $N/L$  個の粒子が河床を離脱するとし、そこから距離  $x$  までの逸散エネルギーの総和を  $\epsilon(x)$  とすれば、次式で表わされる。

$$W_{co} = \int_0^L \epsilon(x) dx = \frac{\rho_s - \rho_f}{2} \cdot k_3 d^3 \cdot \frac{N}{L} \int_0^L \xi(x) dx$$

$$\approx \frac{N}{2} (\rho_s - \rho_f) \cdot k_3 d^3 \cdot \frac{\xi(L)}{2} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$\xi(x) = \int_0^x (1 - e^2) U_f^2 dx \dots\dots\dots (7)$$

であり、 $e$  は反発係数、 $U_f$  は移動粒子が河床と衝突する際の最終落下速度であり、 $\xi(x)$  は距離  $x$  までに生じた衝突による  $\{(1 - e^2) U_f^2\}$  の累加量である。以上により、式(2)中のエネルギー諸量を式(3)~(7)で表わすことにし、つり合いが成立する条件を考えれば、距離  $L$  が求まる。なお、具体的に  $L$  を算定する際には、移動距離の制限を設けずにシミュレーションを行い、移動距離  $x$  とその点までの相対速度差の2乗平均  $(u_f - u_s)^2$  および  $\xi(x)$  との関係を知ったうえで、式(2)を満たす距離  $L$  を求めた。

次に実現象をみると、河床を離脱した粒子の一部が今考えている区間内で停止することが考えられるので、実質上の距離  $L_r$  を知るには上記の  $L$  を補正する必要がある。河床を離脱した粒子が移動し得る距離の頻度分布が指数分布であるとすれば<sup>2)</sup>、粒子がその平均の距離以上移動する確率  $p_1$  とそれ以下で停止する確率  $p_2$  は、

$$p_1 = \exp(-1), \quad p_2 = 1 - \exp(-1)$$

となる。したがって、停止してしまう粒子の存在を考慮した距離  $L_r$  は、近似的に次式で与えられる。

$$L_r = \frac{\exp(-1) + |1 - \exp(-1)|}{\exp(-1)} \times L = \exp(1) \times L \dots\dots\dots (8)$$

このことは、次のように説明される。平衡となった断面の河床単位面積上方に移動状態で存在する  $N$  個の粒子のうち  $|1 - \exp(-1)| \times N$  個の粒子は、離脱後この断面まで到達し得ないはずであるが、実際に平衡状態で  $N$  個の粒子が存在しなければならないから、残りの  $\exp(-1) \times N$  個が実際の  $N$  個に対応する距離まで、 $L$  を拡張すべきであると考えられる。したがって、粒子1個について単位距離当たりに供給し得るエネルギーに限りがある以上、流下距離が長くならざるを得ず、式(8)が導かれる。

式(8)により得られた  $L_r$  と無次元せん断力  $\tau_* (= u_*^2 / sgd, u_*$  : 摩擦速度、 $s$  : 粒子の水中比重)との関係を示したのが Fig. 2 であり、縦軸は  $L_r$  を粒径  $d$  で除して無次元化してある。また、図中には辻本ら<sup>2)</sup>の

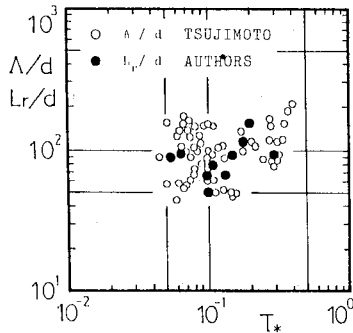


Fig.2  $L_r/d$  and  $\Lambda/d$  vs.  $\tau_*$ .

step-length  $\Lambda$  のデータをも示し、 $L_r$  と  $\Lambda$  の比較を試みた。同図より、両者はよい対応関係にあり、それゆえ、step-length が従来とは異なったエネルギーの面から決まってくる量であることがわかる。このことから、①  $\tau_*$  の大きな場合に測定が困難な step-length は、この方法により実測を行わなくても容易に求められる、②従来の考え方では流砂量を決定するものは  $L_r$  と pick-up-rate  $P_s$  であるが、上記の計算では  $N$  は式(2)中で消去されてしまうため、この考え方によれば  $L_r$  が  $N$  (あるいは流砂量) によらずに決まってくる。③この考え方を応用すれば、ある流れに対して平衡状態にあった掃流砂が、水量の異なった流れに移移する場合に、どのように変化するかを知ることができ、いわゆる不等流の場合の掃流砂を推定することができる(ただし、不等流に伴う底面せん断力の推定を精度よく行わなければならないが、この点については今後さらに研究の必要がある)、などの結論が得られた。

### 3. 平衡状態でのエネルギー・バランス

土砂粒子の掃流状態での移動を伴う流れの平衡状態でのエネルギー・バランスについて考える。前章で考えた非平衡から平衡への過程を経て、流れ全体はある平衡状態に達する。この状態では、流水は移動粒子の存在による抵抗の増大に応じたエネルギー状態を保ち、粒子もその流れに応じたエネルギー状態を保つと考えられる。

まず、流水については、河床に沿って流下するにつれて底面せん断力によりエネルギーを逸散するほか、流速より遅い速度で移動する粒子に抗力の形でエネルギーを与える。つまり、流水は粒子の存在によりこの分だけ大きな抵抗を受ける結果となる。したがって、見掛け上、相当粗度  $k_s$  が増大した流れとして平衡な状態を保っていると考えられる。また、粒子については、各跳躍中に流水によるエネルギーの供給を受けるが、反面、各跳躍が終わるごとに河床と衝突をしてそのエネルギーを系外へ逸散してしまうため、平衡なエネルギー状態を保つこ

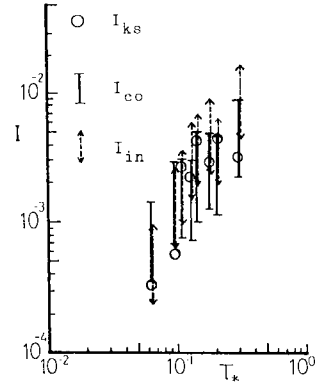


Fig.3  $I_{ks}$ ,  $I_{co}$  and  $I_{in}$  vs.  $\tau_*$ .

とができると考えられる。

このことを説明するために Fig.3 を示す。まず、実測による流速分布、特に相当粗度  $k_s$  の変化から算出した粒子の存在に伴うエネルギー損失勾配を  $I_{ks}$  とすると、

$$I_{ks} = \frac{\bar{u}^2}{gh} \left[ \left( A_r - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln \frac{h}{k_s + \Delta k_s} \right)^{-2} - \left( A_r - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln \frac{h}{k_s} \right)^{-2} \right] \dots \dots \dots (9)$$

のように表わされる。ここに、 $\bar{u}$  は平均流速、 $h$  は水深、 $x$  はカルマン定数、 $A_r$  は定数である。実測結果をもとに式(9)から求めた  $I_{ks}$  を Fig.3 中に○印で示した。また、流水と粒子との相対速度差が原因となる抗力によって流水から粒子に与えられるエネルギーを勾配の形に直したのが  $I_{in}$  であり、次のように表わされる。

$$I_{in} = \frac{N}{2gh} \cdot \frac{\rho_f}{\rho'} \cdot C_D \cdot k_s d^2 \cdot \overline{(u_f - u_s)^2} \dots \dots \dots (10)$$

ここに、 $\rho'$  は流砂を含んだ流れの密度である。一方、粒子が各跳躍後の衝突により逸散するエネルギーについては、単位距離当たりの平均の逸散エネルギーという意味で同じく勾配の形で表わすことにすると、

$$I_{co} = \frac{N}{2gh} \cdot \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho'} \cdot k_s d^3 \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} (1 - e^2) U_f^2 dx \dots \dots \dots (11)$$

のようになる(ただし、 $x_1, x_2 > L_r$ )。式(10)、(11)中の  $N$  は、掃流砂が平衡状態に達するのに要する時間  $t^*$  (すなわち、現象を Euler 的にみた場合に、個々の粒子の現象の集積により濃度が定常化するのに要する時間) に関係する量であるため、上式から各勾配を求めるに際しては先の結果<sup>3)</sup>に基づき  $t^*$  を 0.5~2.0 秒として幅をもたせることにする(なお、実測により直接  $N$  を知れば  $t^*$  が決まるが、本論では  $t^*$  の値を知ることが目的ではない)。  $I_{in}$  については、実測およびシミュレーションの結果から式(10)により求め、両者がほぼ一致

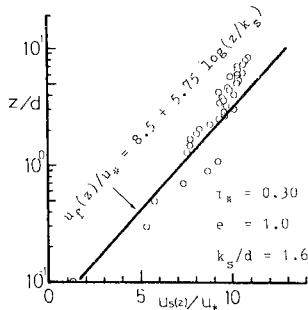


Fig. 4 Velocity distribution of particles.

することを確かめようとして図中に破線でその範囲を示した。 $I_{co}$ については、シミュレーションの結果から式(11)より求め、図中に実線で示した。Fig. 3より、 $I_{ks}$ 、 $I_{in}$ 、 $I_{co}$ が比較的良好に一致することがわかり、前記のことが確かめられた。なお、全般的に $I_{in}$ が $I_{co}$ より大きいのは、サンプリングの周期 $\Delta T$ にわたって、その当初の抗力が持続すると仮定したことによると考えられる。

また、極端なケースとして反発係数 $e$ が1.0である場合についてシミュレーションを行い、前記の結果の検討を行う。この $e=1.0$ とは粒子が河床構成材料と完全弾性衝突を起こすことを意味し、この場合には $I_{co}$ は0となる。シミュレーションによる粒子の移動速度分布の結果をFig. 4に示す(図中の直線は固定床での流速分布を表す)。Fig. 4より粒子の移動速度 $u_s(z)$ が流速 $u_r(z)$ とほぼ一致することがわかる。このことは、両者の相対速度差が平均的には0であり、それゆえ $I_{in}$ も0であることを意味する。したがって、この場合には粒子は流水にとって抵抗としては働かず、結果として、

$$I_{ks} = I_{in} = I_{co}$$

が成り立つと考えられる。また、同図より、これまでいわれてきたように、粒子の存在のためにカルマン定数 $\alpha$ が見掛け上減少することが考えられる。なお、参考のため、 $e=1.0$ の場合の平衡状態での粒子の存在確率密度分布 $f(z)$ をFig. 5に示す。これより、 $e=0.7$ とした場合よりも最高跳躍高さ $h_B$ が大きくなり、 $z$ 方向に広範囲に分布することがわかる。

掃流砂を伴う流れでは、流水は流砂の存在により抵抗が増大し、その流速分布のうえでは見掛け上相当粗度の増大となって現われ、流砂の存在しない流れよりも遅い流れとなる。一方、粒子については、平衡状態に達した後に個々の粒子の交換はあるものの、全体としては流水から受けたエネルギーを河床との衝突により系外へ逸散し、その結果、エネルギーの平衡を保っていると考えら

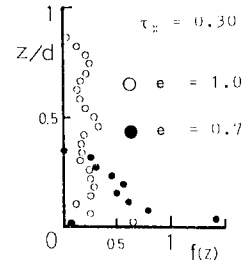


Fig. 5 Density function of moving particles.

れる(なお、この平衡状態の場合にも途中で停止してしまう粒子が存在するが、これと同数の粒子が河床から離脱するため、河床単位面積上方に移動状態で存在する粒子数 $N$ は絶えず一定であり、非平衡状態の場合に考えたような扱いをする必要はない)。

#### 4. 結 論

本研究は、非平衡状態および平衡状態の掃流現象についてそれぞれエネルギーのバランスを考え、これにより現象を把握することを試みた。本研究の成果を以下に列挙する。

(1) 非平衡状態での流れのエネルギー・バランスは、式(1)、(2)のようになり、この式(2)から掃流砂の定常化に要する距離 $L_r$ がFig. 2のように求まった。同図より $L_r$ がstep-length $\Lambda$ とほぼ一致することから、step-lengthを「河床を離脱した粒子群のエネルギー・レベルが平衡状態に達するまでに要する距離」と考えることができる。

(2) 平衡状態では、Fig. 3に示すような系内および系外のエネルギー授受が考えられるが、流水および粒子はそれぞれある平衡なエネルギー・レベルを保つ。すなわち、粒子は、抗力の形で流水によって与えられたエネルギーを、河床との衝突を通じて系外へ逸散し、エネルギー的に平衡な状態にある。一方、流水は、粒子に与えたエネルギーの分だけ相当粗度が増大し、それに応じて平衡のとれた流れとなる。

#### 参 考 文 献

- 1) 関根正人・吉川秀夫：掃流砂の流送機構に関する研究，土木学会論文報告集，第351号，pp.73~79，1984。
- 2) 辻本哲郎：掃流過程の確率モデルとその移動床問題への応用，京都大学学位論文，1978。
- 3) 吉川秀夫・藤堂正樹・井筒庸雄・関根正人：掃流砂の機構に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，第342号，p.48，1984。

(1984. 2. 21・受付)