

アーセル数が大きい場合の非線形分散波の方程式

EQUATIONS OF NONLINEAR DISPERSIVE LONG WAVES FOR A LARGE URSELL NUMBER

後藤 智明*

By Chiaki GOTO

Equations of nonlinear dispersive long waves are derived for a large Ursell number in water of varying depth. The equations include nonlinear dispersive effects. Numerical simulation of solitary waves are carried out by using the present and conventional theories. From comparisons between numerical and experimental results where the present theory provides a better agreement, it is concluded that nonlinear effects of dispersive terms are significantly important for finite amplitude waves.

1. 序

1983年5月26日、東北日本海沿岸一帯に猛威を振るった日本海中部地震津波は、なだらかな海岸線に面する秋田県峰浜村の海岸砂丘で T. P. +14 m を越す陸上遡上高を示した。この海岸は 1/200 程度の遠浅海岸であり、波状段波として津波が発達する余裕があったことが従来の津波とは異なった結果をもたらした。

現在、波源域の津波を正確におさえることができると、数値計算法で遡上痕跡高を精度よく再現できることが知られている。しかし、波状段波としての津波の変形を計算することは難しい。これは、分散項を含む長波理論の精度とその計算手法に問題が残されているためである。

長波を記述するパラメータとしては、波高水深比 ϵ 、相対水深 σ およびこれらのパラメータを結びつけたアーセル数 $U_r (= \epsilon/\sigma)$ がよく用いられる。波高水深比は非線形性の強さ、相対水深は鉛直方向加速度（分散性）の重要度の目安を与えるものと考えてよい。長波をアーセル数で分類すると、 $U_r \ll 1$ のとき線形理論、 $U_r \gg 1$ のとき浅水理論、そして $U_r \sim 1$ のとき非線形分散波理論となる。

非線形分散波理論としては Boussinesq の式¹⁾、KdV の式²⁾、Mei-LeMéhauté の式³⁾、Peregrine の式⁴⁾そして角谷の式⁵⁾が有名である。本研究の立場を明らかにする意味で従来の理論を簡単に説明する。説明には、斜面からの反射を含みより一般的であるという理由で、Peregrine の展開を用いる。彼の展開では他の展開と同様に波高水深比と相対水深がともに小さく、アーセル数が 1 のオーダーであると仮定する。その結果、第二次近似で次式を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h\bar{u}) = -\frac{\partial}{\partial x} (\eta\bar{u}) \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 (h\bar{u})}{\partial x^2 \partial t} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 \bar{u} は断面平均流速、 η は静水面からの水位変動、 h は静水深、 g は重力加速度である。式 (1)、(2) において、左辺の各項は第一次近似と第二次近似の量が加え合わされたもの、右辺は第二次近似の量である。したがって、第一義的な力のつり合いは線形長波の関係で表わされ、非線形項、分散項はそれを修正するものになっていることがわかる。

Peregrine の式と他の非線形分散波の式との関係を調べると、第二次近似の量までは完全に一致することがわ

* 正会員 工博 東北大学助手 工学部土木工学科
(〒980 仙台市荒巻字青葉)

かっている。Mei-LeMéhauté の式は Peregrine の式を水底流速 u_b で表現したものであり、水底流速と断面平均流速との関係は

$$u_b = \bar{u} + \frac{1}{6h} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h^3 \bar{u}) \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる。Peregrine の式と Boussinesq の式、KdV の式、角谷の式との関係は岩崎⁶⁾の説明が詳しい。

以上の説明からわかるように、従来の非線形分散波理論は第一次近似が線形理論といった微小振幅波を対象としたものであり、有限振幅波あるいはごく浅い水域の分散性の波を考える場合には都合が悪い。このことは、従来の計算結果においてソリトン分裂が水理実験結果に比べ早めに起こったり、分裂後の第1波峰水位が高くなりすぎる事が指摘されていることでも想像できる⁶⁾。

最近、分散項に有限振幅の効果を与える試みが行われるようになってきている。Freeman-LeMéhauté⁷⁾や著者⁸⁾は展開の第一次近似である線形長波の関係を第二次近似にあたる分散項の変形に用いたり、静水深を全水深に置き換えることにより有限振幅性のある分散項に書き改めることを提案している。どちらにしても便宜的な修正であり、物理的根拠に乏しいといわざるを得ない。

本研究では、有限振幅性が著しい場合の非線形分散波の方程式を2種類の方法で導き、数値解法を用いてその性質および従来の理論との差を明らかにする。用いた展開は波高水深比を1のオーダーであると仮定し、相対水深を展開のパラメーターに採用したものであり、アーセル数が大きい場合に相当するものである。

2. 方程式の誘導

(1) 無次元化

非圧縮性流体の二次元非回転運動を考える。静水面上に x 軸、これより鉛直上向に z 軸を採用する。 (x, z) 軸方向の流速を (u, w) 、 η を静水面からの水位変動、 p を圧力、 h を静水深、 g を重力加速度、 ρ を密度とおき、次の無次元化を考える。

$$\left. \begin{aligned} x &= l_0 X, \quad z = h_0 Z, \quad t = \frac{l_0}{c_0} T, \\ u &= c_0 \frac{\eta_0}{h_0} U, \quad w = c_0 \frac{\eta_0}{l_0} W_0, \quad p = \rho g h_0 P, \\ \eta &= \eta_0 N, \quad h = h_0 H, \quad c_0 = \sqrt{g h_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

ここで、 l_0 、 h_0 は水平および鉛直方向の特性長、 η_0 は波高に相当し運動の大きさを表わす特性長である。

式(4)の無次元化を施すと、連続および運動の式は以下ようになる。

$$\epsilon \frac{\partial U}{\partial X} + \epsilon \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\epsilon \frac{\partial U}{\partial T} + \epsilon^2 U \frac{\partial U}{\partial X} + \epsilon^2 W \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\sigma \left[\epsilon \frac{\partial W}{\partial T} + \epsilon^2 U \frac{\partial W}{\partial X} + \epsilon^2 W \frac{\partial W}{\partial Z} \right] + 1 + \frac{\partial P}{\partial Z} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

非回転の条件は

$$\epsilon \frac{\partial U}{\partial Z} = \sigma \left[\epsilon \frac{\partial W}{\partial X} \right] \dots\dots\dots (8)$$

である。水表面および水底の条件は

$$Z = \epsilon N \text{ で } \epsilon \frac{\partial N}{\partial T} + \epsilon^2 U \frac{\partial N}{\partial X} = \epsilon W \dots\dots\dots (9)$$

$$Z = \epsilon N \text{ で } P = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$Z = -H \text{ で } \epsilon U \frac{\partial H}{\partial X} + \epsilon W = 0 \dots\dots\dots (11)$$

である。ここで、 $\epsilon = \eta_0/h_0$ は波高水深比、 $\sigma = (h_0/l_0)^2$ は相対水深を意味する。

(2) 摂動法による誘導

いま、運動を $\epsilon \ll 1$ と仮定する。すなわち、アーセル数が大きい場合を考える。摂動展開のパラメーターとして σ を選び、式(5)~(11)の従属変数を次のように展開する。

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n U_n, \quad W = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n W_n \\ P &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n P_n, \quad N = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n N_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

式(12)を式(5)~(11)に代入し整理すると、 σ^0 のオーダーからは

$$\frac{\partial N_0}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} [(H + N_0) U_0] = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial T} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial X} + \frac{\partial N_0}{\partial X} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

なる浅水理論が導かれる。Peregrine の展開では $\epsilon \ll \sigma$ と仮定するため、最低次近似は線形理論である。

σ^1 のオーダーからは次の式群を得る。

$$\frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial W_1}{\partial Z} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial T} + U_0 \frac{\partial U_1}{\partial X} + U_1 \frac{\partial U_0}{\partial X} + W_0 \frac{\partial U_1}{\partial Z} + \frac{\partial P_1}{\partial X} = 0 \dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial T} + U_0 \frac{\partial W_0}{\partial X} + W_0 \frac{\partial W_0}{\partial Z} + \frac{\partial P_1}{\partial Z} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial Z} = \frac{\partial W_0}{\partial X} \dots\dots\dots (18)$$

$$Z = N_0 \text{ で } \frac{\partial N_1}{\partial T} + U_0 \frac{\partial N_1}{\partial X} + U_1 \frac{\partial N_0}{\partial X} = W_1 + N_1 \frac{\partial W_0}{\partial Z} \dots\dots\dots (19)$$

$$Z = N_0 \text{ で } P_1 + N_1 \frac{\partial P_0}{\partial Z} = 0 \dots\dots\dots (20)$$

$$Z = -H \text{ で } U_1 \frac{\partial H}{\partial X} + W_1 = 0 \dots\dots\dots (21)$$

である。

鉛直方向の運動の式(17)を積分し、水表面の圧力条

件 (20) を用いると P_1 は

$$P_1 = N_1 + \frac{1}{2} (Z^2 - N_0^2) \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U_0}{\partial X} \right) + U_0 \frac{\partial^2 U_0}{\partial X^2} - \left(\frac{\partial U_0}{\partial X} \right)^2 \right] + (Z - N_0) \left[\frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} (H U_0) \right\} + U_0 \frac{\partial^2}{\partial X^2} (H U_0) - \frac{\partial U_0}{\partial X} \cdot \frac{\partial}{\partial X} (H U_0) \right] \dots (22)$$

となる。 U_1 は非回転の条件 (18) を $Z = N_0$ で $U_1 = U_*$ なる条件で積分すると、

$$U_1 = U_* - \frac{1}{2} (Z^2 - N_0^2) \frac{\partial^2 U_0}{\partial X^2} - (Z - N_0) \frac{\partial^2}{\partial X^2} (H U_0) \dots (23)$$

となる。

P_1 , U_1 を水平方向の運動の式 (16) に代入すると、

$$\frac{\partial U_*}{\partial T} + U_0 \frac{\partial U_*}{\partial X} + U_* \frac{\partial U_0}{\partial X} + \frac{\partial N_1}{\partial X} = G'_3 \dots (24)$$

が導かれる。ここで、 G'_3 は

$$G'_3 = (H + N_0) \cdot \frac{\partial N_0}{\partial X} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U_0}{\partial X} \right) + U_0 \frac{\partial^2 U_0}{\partial X^2} - \left(\frac{\partial U_0}{\partial X} \right)^2 \right] + \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial N_0}{\partial X} \cdot \left[\frac{\partial U_0}{\partial T} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial X} \right] + U_0 \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial N_0}{\partial X}$$

である。

連続の式 (15) を水表面波連続条件 (19) および水底条件 (21) を用いて積分すると、

$$\frac{\partial N_1}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \left[N_1 U_0 + (H + N_0) U_* - \frac{1}{6} (H + N_0)^3 \frac{\partial^2 U_0}{\partial X^2} + \frac{1}{2} N_0 (H + N_0)^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial X^2} + \frac{1}{2} (H + N_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} (H U_0) \right] = 0 \dots (25)$$

が導かれる。式 (24), (25) が σ^1 のオーダーにおける運動の式と連続の式である。

次に、 σ^0 と σ^1 のオーダーの式を加え合わせることを考える。式 (13) と式 (25) を加え合わせると、

$$\frac{\partial}{\partial T} (N_0 + \sigma N_1) + \frac{\partial}{\partial X} \left[(H + N_0 + \sigma N_1) U_0 + \sigma (H + N_0) U_* - \frac{1}{6} \sigma (H + N_0)^3 \frac{\partial^2 U_0}{\partial X^2} + \frac{1}{2} \sigma N_0 (H + N_0)^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial X^2} + \frac{1}{2} \sigma (H + N_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} (H U_0) \right] = 0 \dots (26)$$

となる。式 (26) 中の大括弧内の項は流量フラックスを意味する。これを全水深 $(H + N_0 + \sigma N_1)$ で除することより、 σ^1 までの近似において断面平均流速 \bar{U} は

$$\bar{U} = U_0 + \sigma U_* - \frac{1}{6} \sigma (H + N_0)^3 \frac{\partial^2 U_0}{\partial X^2} + \frac{1}{2} \sigma N_0 (H + N_0)^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial X^2} + \frac{1}{2} \sigma (H + N_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} (H U_0) \dots (27)$$

で表わされる。運動の式に関しては、式 (14) と式 (24)

を加え合わせることににより、

$$\frac{\partial}{\partial T} (U_0 + \sigma U_*) + (U_0 + \sigma U_*) \frac{\partial}{\partial X} (U_0 + \sigma U_*) + \frac{\partial}{\partial X} (N_0 + \sigma N_1) = \sigma G'_3 \dots (28)$$

を得る。

以上のことから、 $(N_0 + \sigma N_1)$ を新たに N とおき、断面平均流速を用いて式 (26), (28) を書き改めると、 σ^1 のオーダーまでの非線形分散波の方程式として、

$$\frac{\partial N}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} [(H + N) \bar{U}] = 0 \dots (29)$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial T} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \frac{\partial N}{\partial X} = G' \dots (30)$$

が導かれる。ここで、 G' は σ^1 のオーダーで現われる鉛直方向加速度に起因する項で

$$G' = G'_1 + G'_2 + G'_3 = \frac{\partial}{\partial T} (G'_1) + \frac{\partial}{\partial X} (\bar{U} G'_1) + G'_3 = (H + N) \frac{\partial N}{\partial T} \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} \right) + \bar{U} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial X^2} - \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} \right)^2 \right] + \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} \cdot \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} \right] + \bar{U} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} G'_4 = \frac{1}{3} (H + N)^2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial X^2} + (H + N) \frac{\partial H}{\partial X} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \frac{1}{2} (H + N) \bar{U} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2}$$

である。

式 (29), (30) を有次元表示にすると

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta) \bar{u}] = 0 \dots (31)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = G \dots (32)$$

となる。ここで、 G は G' に相当する有次元量である。この G に線形化を施すと、式 (31), (32) は Peregrine の式 (1), (2) に一致する。

(3) 新しい展開法による誘導

ここでは、積分形の基礎方程式を用いた長波理論の新たな展開法を用いて、式 (29), (30) に相当する非線形分散波の方程式を誘導する。線形理論および浅水理論までの展開では摂動法を用いてもあまり複雑とはならないが、その第二次近似にあたる非線形分散波理論では第一次近似と第二次近似の加え合わせといった面倒な方法を必要としたのに比べ、この展開法は比較的簡単な計算で済み、また物理的考察を加えるにはよい方法でもある。

まず、連続の式 (5) と運動の式 (6), (7) を鉛直方向に積分する。連続の式は水表面波連続条件と水底条件を用いると、

$$\epsilon \frac{\partial N}{\partial T} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X} \int_{-h}^{\epsilon N} U dZ = 0 \dots (33)$$

となる。鉛直方向の運動の式は水表面圧力条件を用いると、

$$P = \epsilon N - Z - \sigma \int_{\epsilon N}^z \frac{dW}{dT} dZ \dots\dots\dots(34)$$

となる。ここで、

$$\frac{dW}{dT} = \epsilon \frac{\partial W}{\partial T} + \epsilon^2 U \frac{\partial W}{\partial X} + \epsilon^2 W \frac{\partial W}{\partial Z}$$

である。水平方向の運動の式は

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial}{\partial T} \int_{-h}^{\epsilon N} U dZ + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} \int_{-h}^{\epsilon N} U^2 dZ + \epsilon (H + \epsilon N) \frac{\partial N}{\partial X} \\ = \sigma \frac{\partial}{\partial X} \int_{-h}^{\epsilon N} \int_{\epsilon N}^z \frac{dW}{dT} dZ dZ + \sigma \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \int_{-h}^{\epsilon N} \frac{dW}{dT} dZ \\ \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

となる。式 (35) の誘導には、水表面波形連続条件、水底条件および式 (34) の関係を使っている。鉛直流速 W は連続の式と水底条件から

$$\epsilon W = -\epsilon \frac{\partial}{\partial X} \int_{-h}^z U dZ \dots\dots\dots(36)$$

と表わされる。

摂動法と同様に、 $\epsilon \sim 1$ 、 $\sigma \ll 1$ と仮定する。また、水平方向流速 U を断面平均流速 \bar{U} とそれからのずれ U' に分ける。非回転の条件 (8) から

$$\frac{\partial U'}{\partial Z} = \sigma \frac{\partial W}{\partial X} \dots\dots\dots(37)$$

であるので、 U' は σ のオーダーの量であると考えてよい。ゆえに、以下の展開を

$$U = \bar{U} + \sigma U' \dots\dots\dots(38)$$

の仮定から進める。

式 (38) を式 (33)、(35)、(36) に代入し、

$$\int_{-h}^N U dZ = (H + N) \bar{U}, \int_{-h}^N U' dZ = 0 \dots\dots\dots(39)$$

なる関係を用いると、

$$\frac{\partial N}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} [D\bar{U}] = 0 \dots\dots\dots(40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} [D\bar{U}] + \frac{\partial}{\partial X} [D\bar{U}^2] + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial X} \int_{-h}^N U'^2 dZ + D \frac{\partial N}{\partial X} \\ = \sigma \frac{\partial}{\partial X} \int_{-h}^N \int_{-h}^z \frac{dW}{dT} dZ dZ + \sigma \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \int_{-h}^N \frac{dW}{dT} dZ \\ \dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

$$W = -\frac{\partial}{\partial X} [(H + Z)\bar{U}] - \sigma \frac{\partial}{\partial X} \int_{-h}^z U' dZ \dots\dots\dots(42)$$

を得る。ここで、 $D = H + N$ である。

したがって、連続の式は σ のオーダーに関係せずに式 (40) の形となる。水平方向の運動の式は、

$$\int_{-h}^N \frac{dW}{dT} dZ = -\left[\frac{D^2}{2} F'_1 + D F'_2 \right] + 0(\sigma)$$

$$\int_{-h}^N \int_{-h}^z \frac{dW}{dT} dZ dZ = \left[\frac{D^3}{3} F'_1 + \frac{D^2}{2} F'_2 \right] + 0(\sigma)$$

$$F'_1 = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} \right) + \bar{U} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial X^2} - \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} \right)^2$$

$$\begin{aligned} F'_2 = \frac{\partial}{\partial T} \cdot \frac{\partial}{\partial X} \left(\bar{U} \frac{\partial H}{\partial X} \right) + \bar{U} \cdot \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\bar{U} \frac{\partial H}{\partial X} \right) \\ - \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} \cdot \frac{\partial}{\partial X} \left(\bar{U} \frac{\partial H}{\partial X} \right) \end{aligned}$$

であるので、 σ^0 のオーダーで

$$\frac{\partial}{\partial T} [D\bar{U}] + \frac{\partial}{\partial X} [D\bar{U}^2] + D \frac{\partial N}{\partial X} = 0 \dots\dots\dots(43)$$

なる浅水理論、 σ^1 までのオーダーで

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} [D\bar{U}] + \frac{\partial}{\partial X} [D\bar{U}^2] + D \frac{\partial N}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{D^3}{3} F'_1 \right. \\ \left. + \frac{D^2}{2} F'_2 \right] - \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \left[\frac{D^2}{2} F'_1 + D F'_2 \right] \dots\dots\dots(44) \end{aligned}$$

なる非線形分散波理論となる。

式 (40)、(44) を有次元表示にすると

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [d\bar{u}] = 0 \dots\dots\dots(45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [d\bar{u}] + \frac{\partial}{\partial x} [d\bar{u}^2] + gd \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{d^3}{3} F_1 \right. \\ \left. + \frac{d^2}{2} F_2 \right] - \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \left[\frac{d^2}{2} F_1 + d F_2 \right] \dots\dots\dots(46) \end{aligned}$$

となる。ここで、 F_1 、 F_2 は F'_1 、 F'_2 に相当する有次元量である。 d は全水深を表わす。式 (32) と (46) は見掛け上異なった式であるが、式 (32) は水底から水表面まで積分すると式 (46) に一致する。

ここで示した展開法を用いて、さらに高近似の方程式を導くためには、式 (37) を用いて U' を \bar{U} で表わすことを考えればよい。

3. 方程式の性質

ここでは、新しく得られた方程式の性質を調べる目的で行った運動の式各項の大きさの比較計算結果について述べる。同時に、圧力分布に関しても、静水圧分布および Peregrine の近似との比較も示す。

対象とした運動の式は鉛直方向に積分されたもので、水平床を仮定し

$$\frac{\partial}{\partial t} [d\bar{u}] + \frac{\partial}{\partial x} [d\bar{u}^2] + gd \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{d^3}{3} F_1 \right] \dots\dots\dots(47)$$

を用いた。初期値としては水平床上の孤立波を与え、(47) の各項の大きさを差分で計算している。式 (47) と Peregrine の運動の式 (付録参照) との差は分散項だけであり、他の項は一致する。

圧力分布は、本近似では

$$\begin{aligned} p = \rho g (\eta - z) + \rho \left[\frac{1}{2} (z^2 - \eta^2) + h(z - \eta) \right] \\ \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \right] \dots\dots\dots(48) \end{aligned}$$

で与えられ、Peregrine の近似では静水面上で

$$p = \rho g (\eta - z) \dots\dots\dots(49)$$

の静水圧分布、静水面下は

$$p = \rho g (\eta - z) + \rho \left(\frac{1}{2} z^2 + hz \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \dots \dots (50)$$

となる。

Fig. 1 および Fig. 2 に波高水深比 0.1 および 0.5 の計算結果を示す。各図は上から波形、運動の式各項の大きさ、分散項の大きさ、波峰における圧力分布の比較を示す。図中、 a は波高、 S は本近似の分散項全体、 P_e は Peregrine の分散項、すなわち、

$$S = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{d^3}{3} F_1 \right] = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{d^3}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right], \quad S_2 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{d^3}{3} \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right]$$

$$S_3 = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{d^3}{3} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \right], \quad P_e = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right]$$

である。各項の大きさは最大値で基準化してある。また、Fig. 2 は Fig. 1 に比べ水平軸が 2 倍に拡大されている。

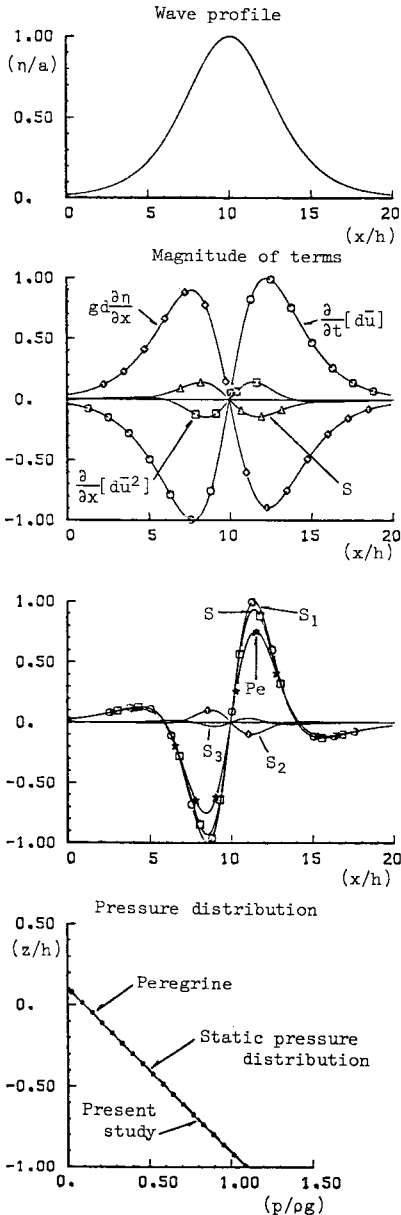


Fig. 1 Comparisons of terms and pressure for a solitary wave of amplitude to depth ratio 0.1.

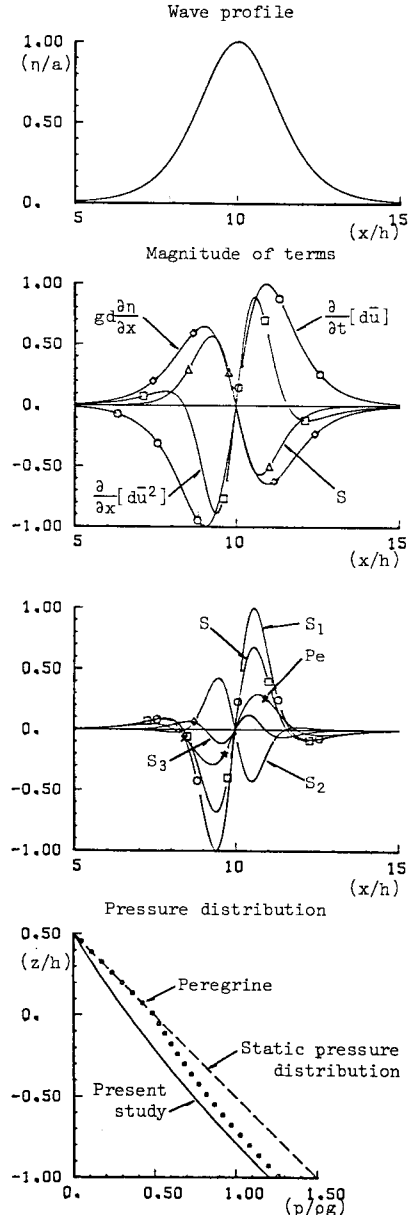


Fig. 2 Comparisons of terms and pressure for a solitary wave of amplitude to depth ratio 0.5.

Fig. 1 の波高水深比 0.1 の結果では、局所項 $\partial[d\bar{u}]/\partial t$ と重力項 $gd \cdot \partial\eta/\partial x$ が大きく、第 1 義的な力のつり合いは線形理論の関係であることがわかる。移流項 $\partial[d\bar{u}^2]/\partial x$ と分散項 S はともに小さく、局所項の 20% 以下の大きさである。分散項の中では S_1 が大きく、 S_2, S_3 は全体の 12% 程度の寄与しかない。本近似の分散項 S と Peregrine の分散項との差も小さい。

Fig. 2 の波高水深比が 0.5 と大きい場合は、移流項および分散項が大きくなり、局所項の 65~85% 程度に達する。分散項の中では S_2 および S_3 も大きくなり、 S_1 の 15~45% の大きさになり無視できなくなる。このため、Peregrine の分散項 P_e とのずれは、大きさだけではなくその分布形状にも違いが現われてくる。

Fig. 1 の波高水深比 0.1 の圧力分布は分散効果が小さいため、静水圧分布からのずれは小さい。波高水深比が 0.5 の Fig. 2 では有限振幅性および分散効果が大きくなるため、静水圧分布からのずれが大きくなる。Peregrine 近似の圧力分布とも有意な差が見られる。これは、式 (48)~(50) の比較でも明らかのように、Peregrine 近似では鉛直方向加速度に起因する分散項に有限振幅性、非線形性が考慮されていないためである。

以上のことから、波高水深比が小さい場合は本近似と Peregrine 近似との差は小さいが、波高水深比が大きくなると、分散項の有限振幅性、非線形性が大きくなり、Peregrine 近似との差は無視できなくなることがわかる。また、分散項の中でも S_2, S_3 は S_1 と同位相のずれがあるため、波の変形への影響が少なくないものと予想される。

4. 数値解法

斜面上の孤立波の計算例としては Peregrine⁴⁾ と Madsen-Mei⁹⁾ の研究が有名である。Peregrine は彼の導いた式を用いて一様勾配斜面上の孤立波の変形を差分法で計算している。Madsen-Mei は Mei-LeMéhauté の式を水平床と一様勾配斜面を組み合わせた地形について特性曲線法を用いて計算している。ここでは、式 (45), (46) を用いた計算を行い、彼らの結果と比較する。同時に、MAC 法による計算結果¹⁰⁾および Street ら¹¹⁾の水力実験結果との比較も行う。

(1) 計算法

計算は差分法とする。計算点の配置はリーブフログ法と同じように水位と流量を交互におくものとする。差分は陰的な中央差分を採用する。陰解法を使用するので移流項等に風上差分を必要としない。

差分法で計算する場合に問題となることは、差分スキームの特性による数値分散性と数値粘性¹²⁾である。本計算では中央差分を用いているため、数値分散性が特に問題となる。本計算の場合、差分スキームによる数値分散性の大きさは近似的に

$$\frac{\Delta x^2}{24} \cdot gd \left[1 - (\bar{u}^2 + gd) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \dots\dots\dots (51)$$

と評価することができる。ここで、 $\Delta x, \Delta t$ はそれぞれ空間格子および時間格子の寸法である。したがって、数値分散性の大きさは、 Δx を細かいものを選ぶか、もしくは

$$\frac{\Delta x^2}{\bar{u}^2 + gd}$$

に近い Δt を用いることにより、おさえることができる。この理由から、本計算では

$$\frac{\Delta x}{h_1} = \frac{\Delta t}{\sqrt{h_1/g}} = 0.05$$

を採用している。ここで、 h_1 は計算領域内の最大水深である。

(2) 計算結果

Fig. 3 に Peregrine の計算結果との比較を示す。斜面勾配は 1/30、初期条件は波高水深比 0.1 の孤立波である。図中、実線は式 (45), (46) による計算結果、白丸印は Peregrine の式の計算結果である。ただし、白丸印の Peregrine の式を用いた結果は Peregrine 自身のものではなく、著者が彼の式を用いて計算したものである。Peregrine の計算では無次元時間 $T = t/\sqrt{h_1/g} = 25$ までしか行われていないが、本研究では $T = 30$ までの結果を示す。両者の差は無視できる程度である。

式 (45), (46) を用いた計算結果と Peregrine の式に

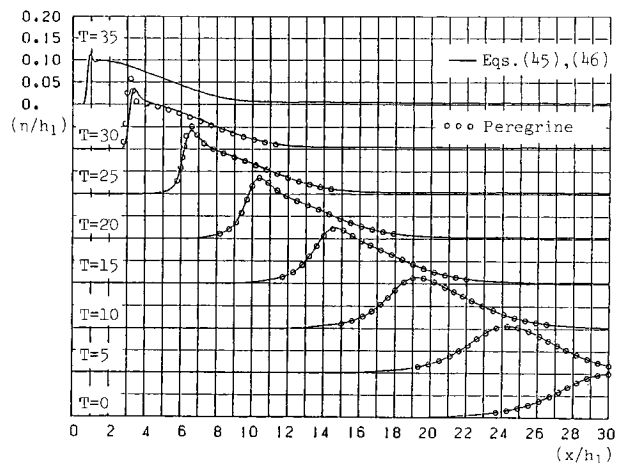


Fig. 3 Comparison of numerical results for a solitary wave approaching a beach.

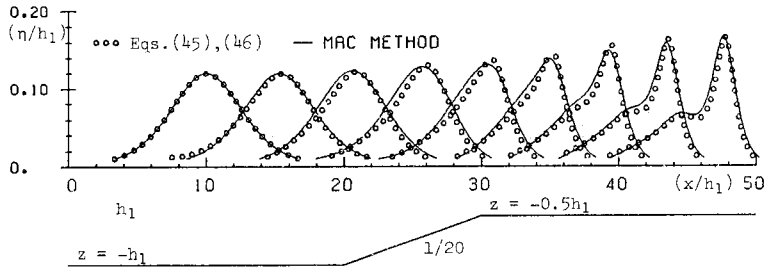


Fig. 4 Comparison of numerical results for a deformation of solitary wave propagating over a slope onto a shelf of smaller depth.

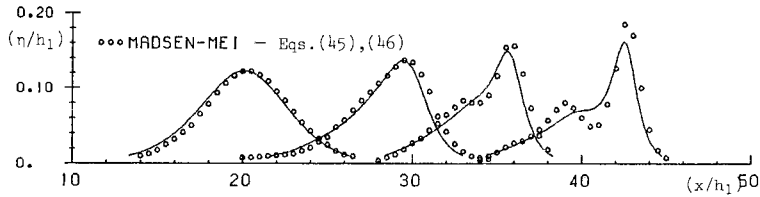


Fig. 5 Comparison with the numerical results of Madsen-Mei.

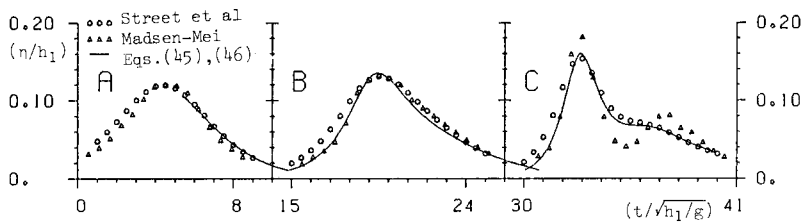


Fig. 6 Comparison between numerical results and experiment.

よるものとの差は、 $T=20$ まではまったくみられない。 $T=25$ からは Peregrine の方が波高増幅が大きく、鋭い波峰をもつ結果となる。Peregrine の方が前傾化が著しい理由は、非線形効果に比べ分散効果が過小に評価されるためであると考えられる。Peregrine の式を用いた計算は、 $T=31.5$ 以降に計算が不安定となる。ごく浅水域では波高水深比が大きくなり、方程式の精度のうえからも Peregrine の式の適応は問題であるが、数値計算上からも浅水域での Peregrine の式を用いることは難しいようである。

Fig. 4 に式 (45), (46) の計算結果と MAC 法の結果の比較を示す。水底形状は Madsen-Mei の計算と同じ、水平床と $1/20$ の一様勾配斜面が組み合わされたものであり、初期値は $x/h_1=10$ に波峰をもつ波高水深比 0.12 の孤立波である。

MAC 法の計算は従来の SOLA-VOF 法¹³⁾に斜面の境界条件と水表面セルの条件に関して著者らが工夫を加えたものである。MAC 法では格子寸法として $\Delta x/h_1=4 \Delta z/h_1=0.1$ を採用している。

本計算結果と MAC 法の計算結果とは多少の位相の

ずれが認められるが良好な一致を示す。

Fig. 5 は Madsen-Mei の計算結果との比較である。Madsen-Mei の結果は第 1 波峰の波高が大きく、第 2 波峰の生成が早めの結果となっている。これも先に述べたように、非線形の効果による第 1 波峰背後からの運動量補給に比べ、これをおさえる働きのある分散効果を過小に評価しているためである。

Fig. 6 は Street らの水理実験結果と比較したものである。彼らは、本計算と同じ水底形状の水路内に孤立波を発生し、斜面通過後の波形変化を調べている。図中の A, B, C はそれぞれ $x/h_1=14.65, 30.0, 41.6$ の地点の経時変化である。本計算結果の方が従来の式を用いた結果より水理実験結果に近いものとなる。

Fig. 7 は分散項を考慮していない線形理論と浅水理論による計算結果を式 (45), (46) によるものと比較した結果を示す。水底形状は Fig. 4 と同一である。初期波の波高水深比 0.1 の孤立波である。

線形理論の結果は、分散項を考慮したものに比べ波速が相当遅いものとなる。また、斜面通過後の波形変化はまったく起こらない。浅水理論の結果は前傾化が著しい

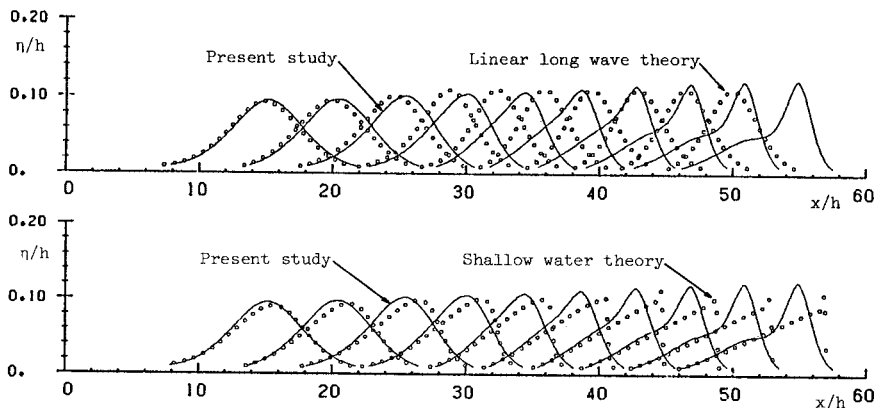


Fig. 7 Numerical results of a deformation of solitary wave by linear long wave theory and shallow water theory.

Table 1 Comparison of CPU time.

	Present study	Peregrine's equation	MAC method	Linear long wave theory	Shallow water theory
$\Delta x/h$	0.05	0.05	0.1	0.05	0.05
$\Delta t/\sqrt{h/g}$	0.05	0.05	0.05	0.05	0.025
CPU (min.)	20.0	18.2	572.0	0.16	3.25

ものとなる。波峰付近で数値計算上のオーバーシュートがみられる。

本研究で行った計算のCPU時間の比較をTable 1に示す。線形理論および浅水理論は陽差分法、他の計算は陰差分法を用いた計算である。使用した計算機は東北大学大型計算機センターACOS 1000である。

5. 結 論

相対水深が小さく、波高水深比を1のオーダー、すなわちアーセル数が大きい場合を仮定し展開を行うと、浅水理論の高次近似にあたる式(45)、(46)が導かれる。この式は従来の非線形分散波理論に比べ、有限振幅性および非線形性を考慮した分散項を含む表現となっている。

孤立波の変形に関する数値解法を通じ、従来の理論では移流項の効果に比べ分散項の効果を過小に評価していることを明らかにした。

線形分散波理論からの類推で分散項が大きいと分散効果も大きいと考える傾向があるが、移流項の効果が大きい非線形分散波にこの考えをそのままあてはめるのは誤りである。強いてあげると、分散項から移流項の大きさを差し引いたものの時空間的な違いが分散効果を表わしているといえよう。線形波の分散とソリトンの分裂とはメカニズムが異なるのである。また、本論文では鉛直方向加速度に起因する項を一括して分散項と名付けている

が、有限振幅の波を考える場合には、線形分散項とモードが異なる成分も含まれているから、一括して分散項と名付けることにも問題が残る。

本研究では一次元伝播問題に焦点を当てているが、平面的な広がりをも有する二次元伝播問題への拡張も容易である。

謝 辞：本研究をまとめるにあたり、ご指導・ご助言をいただいた東北大学工学部 首藤伸夫教授に謝意を表わす。また、計算等で協力してくれた東北大学大学院 藤間功司君に感謝する。

付録 新しい展開法による Peregrine の式の誘導

積分された式(33)、(35)、(36)を用いる。 $\epsilon \sim \sigma \ll 1$ と仮定する。水平方向の流速 U を断面平均流速 \bar{U} とそれからのずれ U' に分ける。非回転の条件(8)から U' は σ または ϵ のオーダーであることがわかるので

$$U = \bar{U} + \epsilon U' \dots \dots \dots (A.1)$$

とおく。この関係を代入すると、積分形の式は

$$\epsilon \frac{\partial N}{\partial T} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X} [(H + \epsilon N) \bar{U}] = 0 \dots \dots \dots (A.2)$$

$$\begin{aligned} &\epsilon \frac{\partial}{\partial T} [(H + \epsilon N) \bar{U}] + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} [(H + \epsilon N) \bar{U}^2] \\ &+ \epsilon^4 \frac{\partial}{\partial X} \int_{-H}^{\epsilon N} U'^2 dZ + \epsilon (H + \epsilon N) \frac{\partial N}{\partial X} \end{aligned}$$

$$= \epsilon \frac{\partial}{\partial X} \int_{-H}^{\epsilon N} \int_{\epsilon N}^Z \frac{dW}{dT} dZ dZ + \epsilon \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \int_{-H}^{\epsilon N} \frac{dW}{dT} dZ \dots\dots\dots (A.3)$$

$$\epsilon W = -\epsilon \frac{\partial}{\partial X} [(Z+H)\bar{U}] - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} \int_{-H}^Z U' dZ \dots\dots\dots (A.4)$$

となる。したがって、 ϵ^1 までのオーダーからは

$$\frac{\partial N}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} [H\bar{U}] = 0 \dots\dots\dots (A.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} [H\bar{U}] + H \frac{\partial N}{\partial X} = 0 \dots\dots\dots (A.6)$$

なる線形理論、 ϵ^2 までのオーダーからは

$$\frac{\partial N}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} [(H+N)\bar{U}] = 0 \dots\dots\dots (A.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} [(H+N)\bar{U}] + \frac{\partial}{\partial X} [H\bar{U}^2] + (H+N) \frac{\partial N}{\partial X} \\ &= \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{H^3}{3} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} \right) + \frac{H^2}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\bar{U} \frac{\partial H}{\partial X} \right) \right] \\ & \quad - \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \left[\frac{H^2}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} \right) + H \frac{\partial}{\partial T} \left(\bar{U} \frac{\partial H}{\partial X} \right) \right] \\ & \dots\dots\dots (A.8) \end{aligned}$$

なる積分された Peregrine の式を得る。

参 考 文 献

- 1) Boussinesq, M.J. : Essai sur la théorie des eaux courantes, Hemo. Acad. Science, 2ème Sér, Tome 23, No.1, 1877.
- 2) Korteweg, D.J. and De Vries, G. : On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag.,

- Vol. 39, 1895.
- 3) Mei, C. C. and LeMéhauté, B. : Note on a equations of long waves over an uneven bottom, J. Geophys. Res., Vol. 71, 1966.
- 4) Peregrine, D.H. : Long waves on a beach, J.F.M., Vol. 27, Part 4, 1967.
- 5) Kakutani, T. : Effect of an uneven bottom on gravity waves, J. Phs. Soc. in Japan, Vol. 30, 1971.
- 6) 岩崎敏夫：ソリトン分裂—非線型波動論—, 1979年度水工学に関する夏期研修会講義集, B-5, 1979.
- 7) Freeman, J.C. and LeMéhauté, B. : Wave breakers on a beach and surges on a dry bed, J. H. D., ASCE, HY 2, 1964.
- 8) Goto, C. and Shuto, N. : Numerical simulation of Tsunami propagations and run-ups, Tsunamis : Their Science and Engineering, Terra Scientific Publishing Company, 1981.
- 9) Madsen, O.S. and Mei, C.C. : Solitary wave over an uneven bottom, J.F.M., Vol. 39, 1969.
- 10) 藤間功司・後藤智明・首藤伸夫：MAC法による孤立波の変形の数値計算, 昭和58年度土木学会東北支部年講, 1984.
- 11) Street, R.L., Burges, S.L. and Whitford, P.W. : Dept. of Civil Engng., Standford Univ. Tech. Rept., No. 93, 1968.
- 12) たとえば伊藤剛編：数値計算の応用と基礎, アテネ出版, 1971.
- 13) Nichols, B.D., Hirt, C.W. and Hotchkiss, R.S. : A solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries, Los Alamos Scientific Lab. Rept., 1980.

(1984. 3. 13・受付)