

フィルター分離 AR 法とカルマン・フィルターによる 洪水予測法に関する研究

A STUDY ON FLOOD FORECASTING BY THE FILTER-SEPARATION AR METHOD AND THE KALMAN FILTER

日野 幹雄*・金 治弘**

By Mikio HINO and Chi Hong KIM

A new method of flood prediction is presented which applies the physically-based hydrological system analysis (filter-separation AR method proposed by Hino and Hasebe) together with the Kalman filtering.

The principle of the method consists of separating through the numerical filters the total runoff time series into long-, intermediate and short-term components or ground-water flow, interflow and surface-flow components. As a total system, a hydrologic system is a non-linear one. However, once it is separated into two or three subsystems, each subsystem may be treated as a linear system.

The rainfall components into each subsystem a estimated inversely from the runoff component separated from the observed flood.

For the short-term runoff component, the Kalman filtering theory is applied to revise the first estimated rainfall through the errors between the observed and the predicted runoff.

1. 序 論

洪水予測の問題は、多くの人々によって研究され予測精度の向上について努力が傾倒されている。しかしながら、降雨-流出系の強い非線形性や降雨変動の確率性のために、いまだ研究の余地が多く残っているようである。

ところで、一見非線形性が強いと考えられる水文系からの流出も、これを地下水流出、中間流出、表面流出というようにサブシステムからの流出成分に分離すれば、各成分系を線形系で表わせること^{1),2)}、したがって、降雨-流出系の非線形性は主として降雨を各成分降雨に分離する際の非線形分離則にあることを、われわれは最近の一連の研究において主張してきた(日野・長谷部¹⁾ 1979, 1980)。そこで、この考え方を洪水予測に応用すれば、予測の精度を相当に向上することができるであろうと考えられる。

本論文は、このような発想のもとに、成分分離 AR 法を応用した新しい洪水予測法を提案し検討したものである。すなわち、まず数値フィルターによって時々刻々

の流量時系列データを、長・中・短期流出成分(すなわち、地下水流出、中間流出、表面流出)の各流出成分に分離する。おのおのの成分系は線形モデル(AR 式)によって表現できるから、それぞれの流出成分について(長・中期成分については、降雨データを用いることなく流量データからの降雨逆探のみで、短期成分についてはさらにカルマン・フィルターを応用して)洪水予測を行った後に、それらの各予測流出成分を合算し、洪水流量を精度よく予測する手法である。

2. 成分分離 AR 法の概要^{1),3)}

(1) 流量時系列の成分分離

まず、流量時系列の対数プロットの勾配から分離時定数 T_c を決定する。次に、これに相当するカット・オフ周波数 f_c をもつ片側作用低周波濾波フィルターを設計し、流量時系列を 2 ないし 3 種の成分時系列に分離する。その結果、各成分時系列は線形で表現されるようになる。ここでは、降雨-流出の非線形性は降雨を各成分降雨に分離する分離則にあると考えている。

分離濾波フィルターの設計には、mass-dashpot-spring 系の非振動型の共振特性を利用する。フィルターの減衰が大きく非振動型の場合には単位インパルス応答 $w(\tau)$ は次のようになる。

* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科
(〒152 目黒区大岡山 2-12)

** 正会員 工博 韓国成均館大学校教授 土木工学科
(大韓民国京畿道水原市泉川洞 287-1)

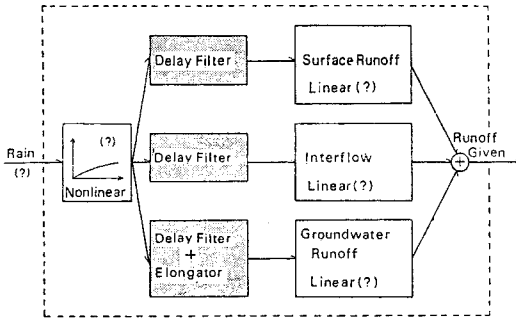


Fig.1 Conceptual diagram of a hydrologic system.

$$w(\tau) \begin{cases} = c_0 \exp\left(-\frac{c_1}{2} \tau\right) \sinh(\sqrt{c_1^2/4 - c_0} \tau) / \sqrt{c_1^2/4 - c_0} & (\tau \geq 0) \dots\dots\dots (1) \\ = 0 & (\tau < 0) \end{cases}$$

$w(\tau)$ の周波数応答特性は次のように表わされる。

$$|W(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega/\omega_0)^2 + \delta^2(\omega/\omega_0)^2}} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、

$$\omega_0 = \sqrt{c_0} \dots\dots\dots (3)$$

なお、係数 c_0 , c_1 はそれぞれフィルターの減衰と周期に関するパラメーターで、減衰係数 δ と時定数 T_c との間には次の関係がある。

$$T_c = c_1 / c_0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\delta = c_1 / \sqrt{c_0} \dots\dots\dots (5)$$

このとき、 c_0 , c_1 は次のように定まる。

$$c_0 = (\delta / T_c)^2 \dots\dots\dots (6)$$

$$c_1 = \delta^2 / T_c$$

したがって、成分流量の片対数プロットから決まる時定数 T_c と、式 (2) を参考にして適当に選んだ減衰パラメーター (普通 $\delta = 2.5$ くらいにしている) から、片側作用のフィルター $w(\tau)$ が決まる。

(2) 各流出成分系の ARMA 係数および応答関数

観測される流量時系列を数値フィルターに通して、これを各流出成分に分離する。その後、各成分流量時系列の減衰部 (長中期成分) もしくは立上り部 (短期成分) のハイドログラフから AR 係数を求める。

一般に線形の成分降雨流出系は、降雨を入力とする ARMA モデル式 (7) で表わすことができる。

$$y_i^l = a_1^l y_{i-1}^l + a_2^l y_{i-2}^l + \dots + a_p^l y_{i-p}^l + b_1^l x_i^l + b_2^l x_{i-1}^l + \dots + \epsilon_i^l \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 x_i^l , y_i^l は、サブシステム ($l=1, 2, 3$) の時間降雨量と流量を表わし、 ϵ_i^l は雑音項である。ARMA 式は相互に変換可能であるので、ここでは式 (7) の右辺の入力項は、1 項のみを考える。

$$y_i^l = a_1^l y_{i-1}^l + a_2^l y_{i-2}^l + \dots + a_p^l y_{i-p}^l + b^l x_i^l + \epsilon_i^l \dots\dots\dots (8)$$

降雨終了後は、 x_i^l の項が零となり、式 (8) は AR モデルとなる。すなわち、

$$y_i^l = a_1^l y_{i-1}^l + a_2^l y_{i-2}^l + \dots + a_p^l y_{i-p}^l + \epsilon_i^l \dots\dots\dots (9)$$

なお、AR モデルの係数は、Yule-Walker 法や MEM スペクトル法、あるいは、重相関回帰法により求めることができる。

一方、線形の入出力関係は重畳積分型でも表わすことができる。

$$y_i^l(t) = \int_0^\infty h^l(\tau) x_i^l(t-\tau) d\tau \dots\dots\dots (10)$$

これを離散化し、 $x(t)$ と $y(t)$ を同じ単位 (たとえば mm/h) で表わせば次式となる。なお、流出成分を表わす上つき添字 (l) は以下の記述では簡単のために省略する。つまり、 y_i は y_i^l のことである。

$$y_i = h_0 x_i + h_1 x_{i-1} + \dots + h_m x_{i-m} = C(B)x_i \dots\dots\dots (11)$$

ここに、

$$C(B) = h_0 + h_1 B + \dots + h_m B^m \dots\dots\dots (12)$$

B は Backward-shift operator である。なお、ここで x_i はこの時刻に降った雨ではなく、実際にはある遅れ時間だけ前の有効降雨 x_{i-lag} を意味している。

もし、 x_i と y_i を異なる単位 (たとえば x を (mm/h), y を (m^3/s)) で表わすとき (これを区別するために y_i' と表わすと)、単位変換係数 λ を導入して式 (11) は次式となる。

$$y_i' = \lambda(h_0 x_i + h_1 x_{i-1} + \dots + h_m x_{i-m}) = \lambda C(B)x_i \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$\lambda = \frac{A}{3.6} \quad (A: \text{流域面積, km}^2) \dots\dots\dots (14)$$

単位の雨が降り続く場合を考えると、降雨強度と流量は等しくなり $x_i \equiv 1$ で $y_i \equiv 1$ であること、あるいは単位のインパルス降雨に対する全流量が 1 となることから、

$$\int y(t) dt = \iint h(\tau) \delta(t-\tau) d\tau dt = \int h(\tau) d\tau = 1 \dots\dots\dots (15)$$

となり、応答関数について次の関係が成立しなければならない。

$$h_0 + h_1 + \dots + h_m = 1 \dots\dots\dots (16)$$

前と同様に、単位の降雨が降り続く場合を考えると、式 (8) から降雨に関する係数 b は次のように導かれる。

$$b = 1 - a_1 - a_2 - \dots - a_p \dots\dots\dots (17)$$

また、式 (8) と式 (11) の関係から

$$(1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots)(h_0 + h_1 B + h_2 B^2 + \dots) = b \dots\dots\dots (18)$$

となる。上式を展開して B の等べきの係数を比較すれば、AR 係数と応答関数 h_m の間に次の関係が求まる。

$$\begin{aligned} h_0 &= b \\ h_1 &= a_1 h_0 \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$h_m = \sum_{j=1}^m h_{m-j} a_j$$

逆推定降雨の求め方は式 (8) と式 (11) を変形して次の 2 通りの方法により求めることができる。

$$x_i = (1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots) y_i / \lambda b \dots\dots\dots (20)$$

または、

$$x_i = y_i / [\lambda(h_0 + B h_1 + h_2 B^2 + \dots)] \dots\dots\dots (21)$$

3. 降雨データを用いない長・中期流出成分の洪水予測

長・中期成分の流出予測は、次のように降雨データなしで、十分な精度で行うことができる。

(1) 成分流量時系列からの降雨時系列の逆推定

流出分離法によって各流出成分に分離された流量時系列 y_k (第 1 成分ならば y_k^1 と書くべきであるが、簡単のために単に y_k と書く) は、それ以前の流量時系列と回帰係数 a_j を用いて、次のように表示できる。

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} + \lambda b x_k \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 y_k : 現時点 $t = k\Delta t$ での流量 (m^3/s)

a_j : AR 係数 ($j=1, 2, \dots, n$)

x_k : 有効成分降雨時系列 (mm/h)

λ : 単位変換係数

いま、式 (22) を変形し、観測された (正確にいうと、観測された流量より数値フィルターにより刻々分離された) 成分流量時系列 $y_k, y_{k-1}, y_{k-2} \dots$ から推定される有効成分降雨を \hat{x}_k と表示すると、式 (23) となる。

$$\hat{x}_k = (y_k - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots - a_n y_{k-n}) / \lambda b \dots\dots\dots (23)$$

この有効成分降雨 \hat{x}_k は、現時点 k より実際には時間ステップ lag だけ過去の降雨に相当する。これは水文系を集中定数系で表現する際に必要となるもので、逆にこの時間ステップ分だけ予測時間を稼ぐことができる。

(2) AR 式による洪水予測

現時点 ($t = k\Delta t$) より k_p ステップ先の成分流量予測値は、次式によって求められる。

$$\tilde{y}_{k+k_p} = a_1 \tilde{y}_{k+k_p-1} + a_2 \tilde{y}_{k+k_p-2} + \dots + a_{k_p+i} y_{k-i} + \dots + \lambda b \hat{x}_{k+k_p} \dots\dots\dots (24)$$

ここに、

\tilde{y}_{k+k_p} : 上式から予測される流量 ($k_p > 0$)

y_k : 実測流量から分離された成分流量 ($k=0, 1, 2, \dots, k_{max}$)

\hat{x}_{k+k_p} : 予測成分降雨である。

この式で、 $(k+k_p)$ ステップに対する洪水成分流量を予測するには $(k+k_p)$ ステップでの降雨 \hat{x}_{k+k_p} を予測する必要がある。これについて、以下の (4) で説明する。

(3) 応答関数モデルによる洪水予測

式 (23) により k 時点までの降雨時系列が逆算され

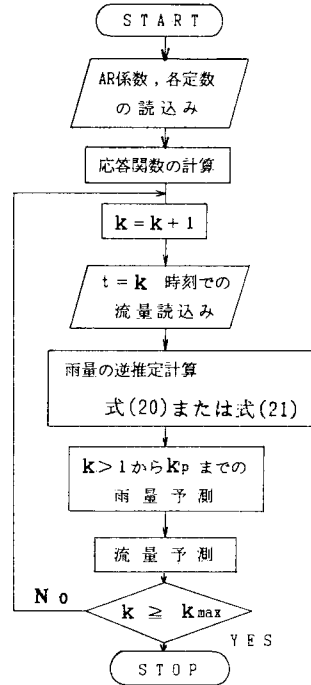


Fig. 2 Flow-chart of the runoff prediction of groundwater and interflow components without using rainfall data.

ると、 $(k+k_p)$ 時点の予測流量 \tilde{y}_{k+k_p} は、降雨-流出系のいま 1 つの表現である応答関数表示式を用いて次式で求められる。

$$\tilde{y}_{k+k_p} = \lambda(h_0 \hat{x}_{k+k_p} + h_1 \hat{x}_{k+k_p-1} + \dots + h_{k_p} \hat{x}_k + \dots) \dots\dots\dots (25)$$

上式で \tilde{y} および \hat{x} は予測量を示し、 \hat{x} は式 (23) により実測流量から逆算された有効成分降雨を示す。式 (25) での有効成分降雨 \hat{x}_k は、式 (23) で与えられるものと同様に時刻 k に降った雨でなく、実際にはある遅れ時間だけ前 ($k-lag$) の有効成分雨量を表現している。

Fig. 2 にこれらの方法による (成分流量の) 洪水予測のフローチャートを示す。

(4) 逆推定降雨時系列からの降雨予測

式 (24) と式 (25) で示したように、 k 時点から k_p ステップの先の時点での流出成分に対する洪水予測をするには、逆推定成分降雨時系列から、それより先の時点 ($k-lag$ 以後) の降雨 \hat{x}_{k+k_p} を予測しなければならない。そこで、次のような 3 つの方法を検討し最終的に 1 つの方法に決めることにした。

① 長・中期の有効成分降雨は、地中への浸透過程での平滑化作用のために、滑らかな時間変化をするので、推定降雨を外挿する。そこで、次の 2 つの方法を考える。

単純外挿: $\hat{x}_{k+k_p} = 2 \hat{x}_{k+k_p-1} - \hat{x}_{k+k_p-2} \dots\dots\dots (26.a)$

普通外挿 (Lagrange の補間公式で $n=3$ のとき) :

$$\hat{x}_{k+k_p} = 3\hat{x}_{k+k_p-1} - 3\hat{x}_{k+k_p-2} + \hat{x}_{k+k_p-3} \dots \dots \dots (26 \cdot b)$$

② 一方, 将来の降雨は実際的には予測が不可能であるので, すべての将来の降雨は零とみなす.

$$\hat{x}_{k+k_p} = 0 \quad (k_p > 0) \dots \dots \dots (27)$$

③ 平滑化された降雨の変化は, きわめて緩やかであるので, 現時点の有効降雨成分と同じ量を仮定する.

$$\hat{x}_{k+k_p} = \hat{x}_k \quad (k_p > 0) \dots \dots \dots (28)$$

実データによる検討の結果, 長・中期流出成分については, ③の方法による予測が, 有効降雨成分の予測値として妥当であった. これは降雨の地中への浸透過程でその変化が平滑化されるためであると考えられる.

4. カルマン・フィルタと降雨逆算法を併用した短期流出成分の予測

(1) 短期流出成分に対する有効降雨の第1近似

前節において提案したように, 成分流量時系列からAR式により成分降雨時系列を逆推定することができる. 降雨のうち長・中期成分となる降雨は地中への浸透過程で平滑化され, 降雨時系列は滑らかな変動として振舞う. したがって, これらの成分については, 水文学的決定論的方法によって降雨を逆推定し, これを外挿して成分降雨や成分流量を予測できる.

これに反して表面流出に寄与すると推定される降雨時系列は, 長・中期流出成分のような浸透過程がなく, 滑らかな変動をしないといいがたい. そこで, 短期流出成分に対する降雨を次のような考えによって推定することにする.

その第1の方法は前節の長・中期流出成分の場合と同様に成分流量時系列から降雨時系列を逆算する方法であり, 第2の方法は実測降雨量に流出率を乗じたものから前節の降雨逆探法によって求めた長・中期流出成分への成分降雨を減じたものを短期流出成分に関与する降雨量の第1近似値と考える方法である. すなわち,

$$x_k^{(1)} = \text{ratio} \cdot X_{k-\text{lag}} - [\hat{x}_k^{(1)} + \hat{x}_k^{(2)}] \dots \dots \dots (29)$$

ここに, $x_k^{(1)}$: 短期流出成分に寄与する降雨量の第1近似値

ratio: 流出率 (過去の平均値を用いる)

$\hat{x}_k^{(1)}$: 長期流出成分に対する逆推定有効降雨

$\hat{x}_k^{(2)}$: 中期流出成分に対する逆推定有効降雨

lag: 表面流出成分降雨の遅れ

X_k : 実測降雨

(2) カルマン・フィルタによる降雨の最適推定系の基本構成

このようにして求めた第1近似値に対して次に述べるようにカルマン・フィルタによる修正を行いつつ, 最適推定降雨量を求める. すなわち, 短期流出成分流量に

ついて, 前項に述べた成分降雨の第1近似値を用いて計算された予測流量 $\hat{y}_k^{(1)}$ と実測流量 $y_k^{(1)}$ との間に差が生じたとすれば, その原因は成分降雨の推定に誤差があることによると考えられる. そこで, 次の手順に従って, カルマン・フィルタにより刻々, 成分降雨の推定値を修正する.

なお, 水文系へのカルマン・フィルタの適用法には従来から表-1の左2列に示す2つの方法が研究されている. 本論文では新たに第3の方法 (降雨推定法) を提案している.

われわれの知りたい状態量は成分降雨 $x_k^{(1)}$ であるが, これは直接測定することはできず, われわれには流域という観測系を通して流量として観測されると考えることができる. つまり, 成分流出 $y_k^{(1)}$ を成分降雨ベクトル $x_k^{(1)}$ の観測系と考え, この観測系によって状態量である成分降雨 $x_k^{(1)}$ を推定することを考える. ただし, 降雨推定値の修正は現時点の値に対してではなく, カルマン・フィルタによる修正に最も有利な時点 (応答関数のピーク時) について行うのがよい. この場合カルマン・フィルタの定式化における問題点は, 成分降雨 $x_k^{(1)}$ の変化がランダムであり, 定式化に必要な状態量 (降雨) の遷移関係が存在しないということである. そこで連続する数時間の降雨を一つのベクトルとみなせば,

$$x(k) = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-i})^T \dots \dots \dots (30)$$

$x(k)$ に関する遷移関係式は, 次のようになる.

$$x(k) = \Phi(k) \cdot x(k-1) + f(k) + w(k) \dots \dots \dots (31)$$

ここに, $w(k)$ は白色雑音, $\Phi(k)$ は遷移行列, $f(k)$ は入力項で, 今の場合 $\Phi(k)$ は次のようになる.

$$\Phi(k) = I' = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0, & 0, & \dots, & 1, & 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (32)$$

$$f(k) = (x_k, 0, 0, \dots, 0)^T$$

観測量を記号 z で表わすという制御理論の習慣に従うと, 観測系を次のように書くことができる. すなわち, 状態量 x と観測ベクトル z とは, ある変換系を介して次の関係で結びつけられている.

$$z(k) = M(k) \cdot x(k) + v(k) \dots \dots \dots (33)$$

ここに, z : 観測ベクトル (= 流出量: $(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-m})^T$)

M : 非確率的変換行列 (観測行列)

v : 観測系に入る誤差

$v(k)$ は白色雑音である. 後の式 (48) のように $z(k)$ を定義すれば, $v(k)$ は有色化するので, 厳密にはこれを考慮した理論⁷⁾を適用しなければならない. ただし, 以下の計算では流量観測に伴う誤差は少ないとの立場からこの点は特に考慮していない.

表一 カルマン・フィルターの適用法 (○印の量が与えられると考える)

制御系	状態推定法	システム同定法	降雨推定法
入力(制御量) u	降雨 ①	降雨 ①	—
システム状態量 (カルマン・フィルターで推定すべき量) x	システム内の物理量 S	システム・パラメーター a	降雨 r
観測量 z	流量 ④ $\hat{z}=f(s)+\epsilon$	流量 ④	流量 ④
降雨量	観測値	観測値	逆算値およびカルマン・フィルターによる修正値[ベクトル化, 式(30)]
研究例	高樺・権葉(1980)	日野(1973)	本研究(1984)

降雨-流出関係を応答関数形(式(11))で表現するとき、観測行列 M は、次のようになる。

$$M(k) = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & \dots \\ 0 & h_0 & \dots & h_{n-1} & h_n & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & h_{n-m} & h_{n-m+1} & \dots & \dots \end{pmatrix} \dots (34)$$

ここに、 n : 応答関数 h_i の最大時間ステップ数。

式 (31), (33) で示されるシステム構成に対してカルマン・フィルターによる最適推定状態量 \hat{x} は次式で与えられる^{5),7)}。

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k) \cdot [z(k) - \hat{z}(k)] \dots (35)$$

$\hat{x}(k|k-1)$: $k-1$ ステップまでの情報を得て求められる k ステップでの x の最適推定値。

$\hat{x}(k|k)$: k ステップまでの情報を利用して求められるその時間ステップでの x の最適推定値。

$\hat{z}(k)$: x の最適推定値から得られる観測値の最適推定値。

$$z(k) = M(k) \cdot \hat{x}(k|k-1) + f(k) \dots (36)$$

また、式(35)のカルマン・ゲイン $K(k)$ は次式によって計算される。

$$P(k|k) = (I - K(k) \cdot M(k)) P(k|k-1) \dots (37)$$

$$P(k|k-1) = \Phi(k|k-1) P(k-1|k-1) \Phi^T(k|k-1) + Q(k) \dots (38)$$

$$K(k) = P(k|k-1) M^T(k) [M(k) P(k|k-1) M^T(k) + R(k)]^{-1} \dots (39)$$

ここに、

$P(k|k-1)$: $k-1$ ステップまでの情報を得て求められる k ステップの状態ベクトルの推定誤差共分散行列。

$P(k|k)$: 状態ベクトルの k ステップでの誤差共

分散行列。

$Q(k)$: k ステップでの w の分散行列。

$R(k)$: k ステップでの v の分散行列。

Φ : 状態遷移行列 (= I' , 式(32))

I : 単位行列

以上に述べた短期流出成分降雨の第1近似値をカルマン・フィルター理論により修正して洪水予測を行う方法をフロー・チャートで表示すれば、Fig. 3 のようになる。

5. カルマン・フィルターによる降雨修正法の具体化

(1) 最適推定すべき降雨ベクトルの次元の縮退

流量の予測は応答関数法(式(25))で行う。というのは、たとえ降雨推定値に誤差があったとしても応答関数法による限り、AR式を用いる場合によく起こることであるが予測流量が負となるという不合理な結果を与えたり、予測流量が発散するという事はないという理由

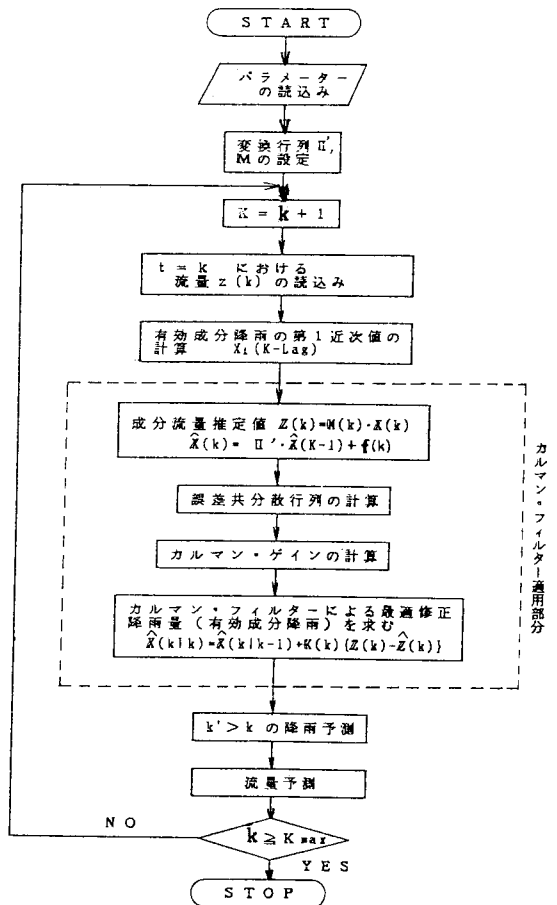


Fig. 3 Flow-chart of prediction procedure of the short term component of flood by the inverse method and the Kalman filtering.

からである。しかし、この場合には、状態変数ベクトル x の次元数はかなり大きくなる。したがって、すべての x の値をカルマン・フィルターにより最適推定しようとするならば、次元数が多すぎて計算時間がかさむばかりでなく、データの観測回数に比べて未知数の数が多すぎて適切な推定が不可能となる。それゆえ、流量データ y の観測頻度を考えて未知量 x の次元を制限すべきである。つまり、すべての x を最適推定しようとするのではなく、そのうちの効果的な一部の推定のみカルマン・フィルターを適用するのがよい。これを式で表示すれば、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} x_k, x_{k-1}, \dots, x_1 \end{bmatrix}^T = [0, 0, \dots, x_{k-id}, x_{k-id-1}, \dots, x_{k-id-m}, 0, \dots, 0]^T + [x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-id-m+1}, 0, \dots, 0, x_{k-id-m+1}, \dots, x_1]^T \dots\dots\dots (40)$$

ここに、 id ：カルマン・フィルターによって最適推定する降雨群の開始時点 (k より逆算)

idm ：最適推定すべき降雨群の最後の時点

このとき、式 (31) は次のように書き直される。

[システム方程式]

$$x_{id}(k) = I' \cdot x_{id}(k-1) + f(k-id) + w(k) \dots\dots\dots (41)$$

したがって、観測系の方程式、式 (33) および最適推定方程式 (35) は次のように書ける。

[観測方程式]

$$z(k) = M_{id} x_{id}(k) + M' x'(k) + v(k) \dots\dots\dots (42)$$

[最適推定方程式]

$$\hat{x}_{id}(k|k) = \hat{x}_{id}(k|k-1) + K(k)[z(k) - \hat{z}(k)] \dots\dots\dots (43)$$

ここに、 x_{id} ：カルマン・フィルターによって最適推定すべき降雨ベクトル。

x' ：その他の時刻の降雨ベクトル。

$$x_{id}(k) = [x_{k-id}, x_{k-id-1}, \dots, x_{k-id-m}]^T \dots\dots\dots (44)$$

$$x'(k) = [x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-id+1}, x_{k-id-m+1}, \dots]^T \dots\dots\dots (45)$$

$$M_{id} = \begin{pmatrix} h_{id}, & h_{id+1}, & \dots, & h_{idm} \\ h_{id-1}, & h_{id}, & \dots, & h_{idm-1} \\ h_{id-2}, & h_{id-1}, & \dots, & h_{idm-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{id-m}, & h_{id-m-1}, & \dots, & h_{idm-m} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (46)$$

$$M' = \begin{pmatrix} h_0, & h_1, & \dots, & h_{id-1}, & h_{idm+1}, & \dots, \\ 0, & h_0, & \dots, & h_{id-2}, & h_{idm}, & \dots, \\ 0, & 0, & \dots, & \vdots & \vdots & \dots, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots, \\ 0, & 0, & \dots, & h_{id-m-1}, & h_{idm-m+1}, & \dots, \\ & & & h_n, & 0, & 0, \dots \\ & & & h_{n-1}, & h_n, & 0, \dots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & h_{n-m}, & h_{n-m+1}, & 0, \dots \end{pmatrix} \dots\dots\dots (47)$$

(2) 効果的な降雨最適推定区間の選定法

カルマン・フィルターによって最適推定すべき降雨時

系列は、前述のように降雨時系列の全体を対象とするのではなく、その一部である。このとき、式 (43) によって最適推定すべき状態量 $x(k|k)$ の区間 ($k-idm, k-id$) を、どのように選定するかが問題である。

いま、流出量の計算はすべて応答関数モデルによって行うとしているから、たとえば現時点 $t=k$ での降雨は重畳積分の関係から流出量 $z(k)$ には $h(0) \cdot x(k)$ だけの効果を与え、一般に $x(k-id)$ は流出量には $h(id) \cdot x(k-id)$ の効果を与える。しかも、応答関数 $h(k)$ は、Fig. 4 でみるように表面流出成分については $h=0$ から立ち上がり、あるラグ・ステップで最大値をとる。したがって、流出量 $z(k)$ に最も有効に働く区間は応答関数 $h(k)$ のピーク時を中心としてやや前のある区間を選べばよいと予想される。

(3) 観測変数の次元拡張

洪水予測の問題は、一次元変数 (いまの場合は降雨) に対する予測であり、しかも状態の変化量に対する観測の回数 (頻度) は、普通の制御の問題と比較してかなり少ない。そこで、情報量の不足を補うために観測変数の次元の拡大が必要である。

すなわち、過去数時間分の観測量を1つにまとめて、これを $(m+1)$ 次元観測量ベクトルとする。

$$z(k) = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-m)]^T \dots\dots\dots (48)$$

(4) 誤差分散行列の選定

カルマン・フィルターの適用において、常に問題となるのは誤差行列 Q, R をいかに選ぶかということである。ここでは、 $Q(k)$ に関連する誤差の値は、降雨の変動が不規則であることを考慮して時点 ($k-lag$) を中心とする数時間の降雨の平均値のある割合 (ここでは10%) と仮定した。また、 $R(k)$ に関連する誤差の値は、現時点 k の観測流量のある割合 (ここでは10%) と仮定した。

以上の説明を要約すれば、降雨修正法による短期流出成分の洪水予測計算は次のようになる。

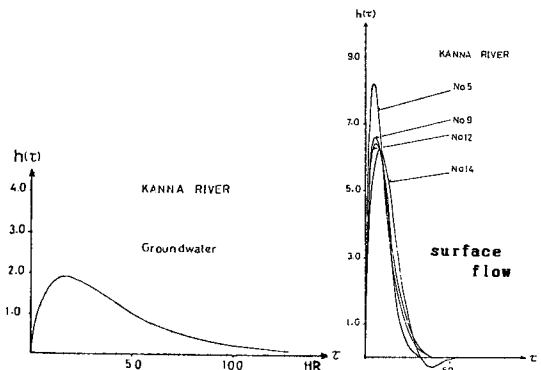


Fig. 4 Unit-hydrographs for runoff components.

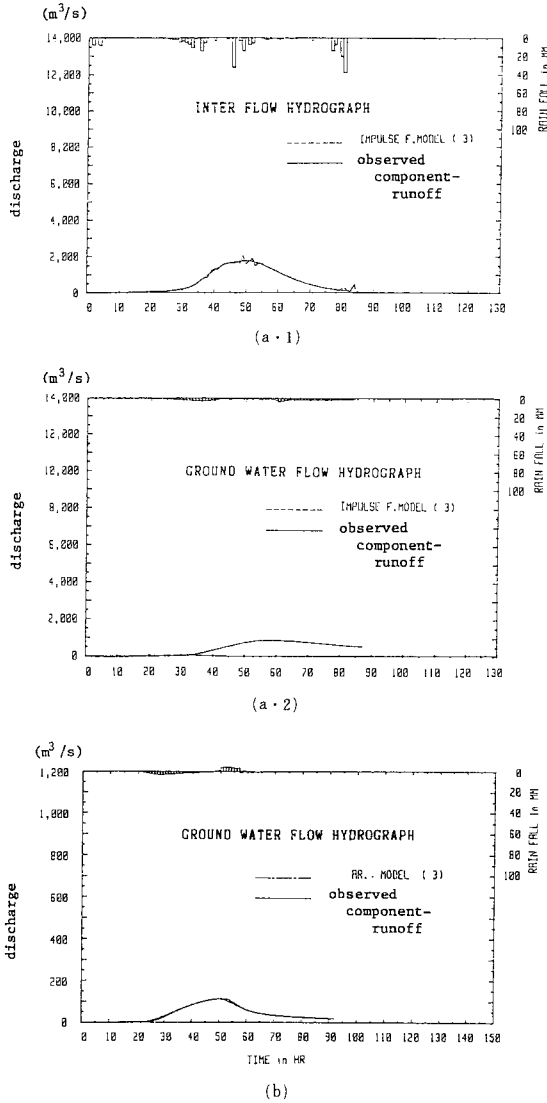


Fig. 5 Flood prediction of the longer period component by the inverse method ((a) Hwachon R. (b) Kanna R.). Numbers in parenthesis are the lead-off time in hour.

(a) 長中期成分の場合と同様に、成分流量時系列から逆算される降雨か、あるいは実測降雨に流出率を乗じたものから長中期流量時系列の流出予測の際に求められた逆推定降雨量を差し引いたものを、短期流出成分に寄与する降雨の第1近似とし、

(b) 流量 z を状態量である降雨 x の観測系を通して観測される量（つまり、降雨-流出系は降雨の観測系である）と考え、カルマン・フィルター理論により、実測流量と予測流量との誤差から第1近似降雨に修正を施して最適降雨を推定し、

(c) この区間 $(0 \sim k-id)$ の最適推定降雨時系列と、

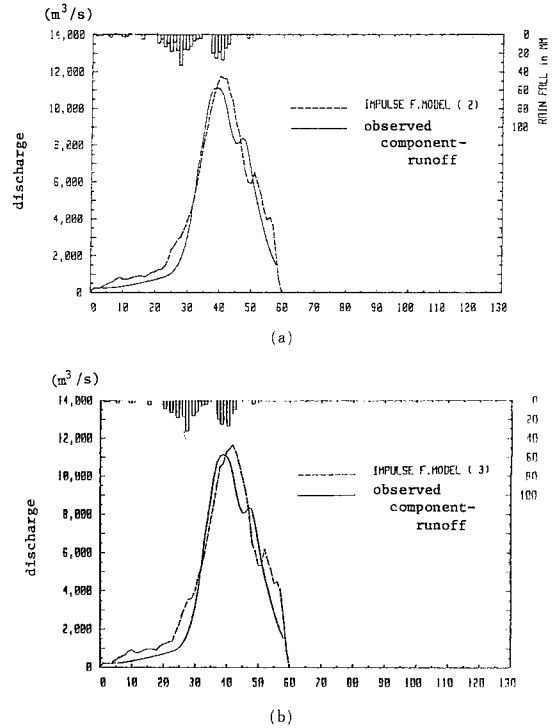


Fig. 6 Flood prediction of the short period component by the inverse method and Kalman filtering (Hwachon R.). Numbers in parenthesis are the lead-off time in hour.

それ以後現在までの時間ステップ $(k-id+1, k)$ の降雨についての前述の方法による第1近似降雨と、さらに必要ならば将来のステップについての予測降雨から（ただし予測時間が数時間である場合は降雨に対する流出のラグを考えると降雨予測は不要）、これを入力として応答関数モデルによって短期流出成分の洪水予測を行う。

6. 洪水予測の結果と検討

実例として、韓国漢江水系の華川ダム観測地点（流域面積 $4\,063\text{ km}^2$ ）の1965年7月19日までの洪水データと、わが国の神流川（流域面積 373.6 km^2 ）の洪水データについて本方法による予測を行った。なお、華川については1データのみであり、これについて同定と予測を行わざるを得なかった。

神流川については、洪水記録を2つのグループに分け一方を training data（洪水 Nos. 5, 9, 12）とし、他方を checking data とした。training data のそれぞれについて流量成分分離を行い、おのおの洪水データについての AR 係数を同定する。それらの平均値として AR 係数およびそれを変換した応答関数が得られる。神流川のデータについては、流出成分を2つの成分、すなわち、

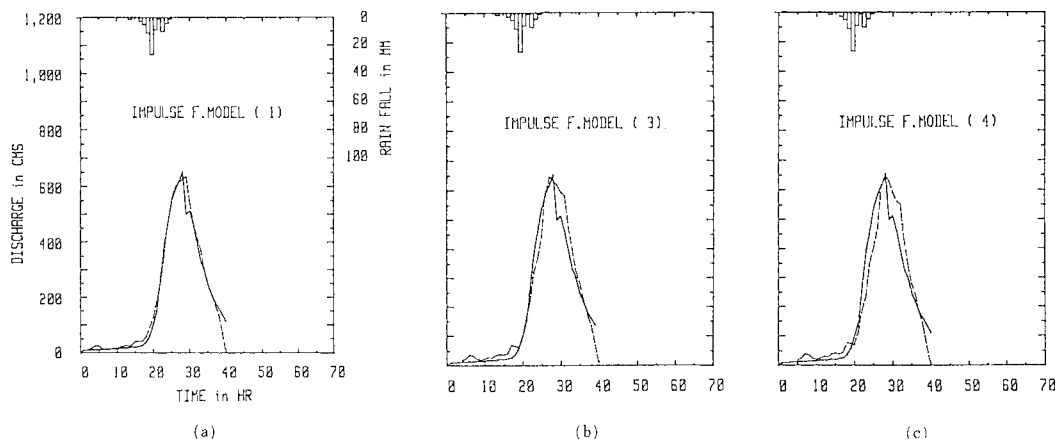


Fig. 7 Flood prediction of the short period component (Kanna R.). Numbers in parenthesis mean the lead-off time in hour.

長期と短期流出成分に分離すれば十分であることが示されている^{2), 3a)}。

(1) 降雨逆探法による長・中期流出成分の洪水予測

長・中期流出成分について、ARMAモデルによる降雨時系列逆算法から3時間先の洪水予測を行ったのがFig. 5である。いずれの場合についても実測流量から分離した成分流量とその予測値との間により一致がみられる。

(2) 逆探降雨修正法による短期成分の予測

華川 (Hwachon) ダム地点でのパラメーター id は、前述の理由により試算による相互比較の結果7hとした。また、lagは表面流出への寄与なので零と仮定した。次元数 m と idm に関しては、大き過ぎても、少な過ぎても適切でないことが予想される。いろいろ組合せについて結果を比較し、 $m=3$, $id=7$, $idm=6$ とした。予測結果の数例をFig. 6に示した。

神流川については、前述の華川ダムの場合と同じく training data についての試算により、 $id=3$, $idm=6$, $m=3$ の場合が有効に働くことがわかった。checking data の1つ (洪水 No. 14) を例に示すと、Fig. 7に示すように1~3時間先の予測について、特に洪水ピーク値は実測流量より分離された短期成分値とよい一致を示している。

以上により流量時系列のデータを各流出成分に分離し、長中期成分については降雨逆探法により、また短期成分についてはカルマン・フィルターによる降雨推定により予測を行えば、従来の方法 (たとえば文献6)) より高い精度の予測の結果が得られることがわかった。し

たがって、各流出成分に分離してそれぞれの成分について予測を行い、それらを合算することによって、精度のよい洪水予測システムを構成することができる。

この研究を進めるにあたり、東京工業大学土木工学科水工学研究室の多くの方々にお世話になったことを付記して感謝を述べる次第である。

参考文献

- 1) 日野幹雄・長谷部正彦：流量時系列のみによる降雨時系列、流域の特性および流出分離の推定について、第23回水理講演会論文集、1979-3.
- 2) 吉川秀夫・砂田憲吾・グエンソンフン：洪水流量遅延曲線の特性を考慮した流出モデルに関する研究、土木学会論文報告集、第283号、1979.
- 3) 日野幹雄・長谷部正彦：流量時系列のみによる流出解析について、土木学会論文報告集、第300号、1980-8.
- 3a) 日野幹雄・長谷部正彦：フィルター分離AR法による非線型流出系の同定と予測 (時間単位)、土木学会論文報告集、第324号、1982.
- 4) 日野幹雄：水文学系へのカルマン・フィルター理論の適用、土木学会論文報告集、第221号、1974.
- 5) 日野幹雄：Kalmanの予測推定理論の平易な誘導について、東京工業大学土木工学科研究報告、No. 15、1973.
- 6) Hino, M.: On-line prediction of hydrologic system, Proc. 15th Congress of IAHR, Vol. 4, pp. 121~129, 1973.
- 7) Kalman, R. E.: A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME., J. Basic Eng., Vol. 82, March, 1960.
- 8) 高棟琢馬・榎葉充晴：状態空間法による流出予測、京都大学防災研究所年報、第23号、B-2, pp. 211~226, 1980. (1984. 3. 27・受付)