

二次元表層密度噴流における連行特性に関する研究

TURBULENT ENTRAINMENT IN PLANE BUOYANT SURFACE JET

室田 明*・中辻啓二**

By Akira MUROTA and Keiji NAKATSUJI

The relationship between the entrainment coefficient $E = V_e/U_c$ and the Richardson number Ri_c at a plane buoyant surface jet was investigated experimentally and theoretically. The entrainment process is well correlated with the dynamics of quasi-ordered structures. The shear layer Richardson number Ri_h reflecting their evolution was used to sort the experimental data without scattering. The slope of an approximate curve changes drastically at $Ri_h = 0.12$. Furthermore, its relationship was analyzed by an integral formulation using the mean flow energy equation as an additional equation. Theoretical results could be seen to give a good approximation of the relationship between E and Ri_s obtained experimentally and to evaluate the development of a buoyant surface jet.

1. 緒 言

密度の異なる流体が相接して運動する場合には、内部境界面を通しての混合が多かれ少なかれみられる。この混合過程は乱流の発生因の相違により種々の規模の形態をとる。たとえば、混合層の発達にみられる大規模な組織構造による移流的混入から、内部重力波による砕波、さらには熱外力による擾乱までその形態はさまざまである。

二流体間の混合過程は実験あるいは実測に基づいて数多く研究されてきた。界面を横切る輸送率の連行型表現である連行係数と流れの平均量との関数関係はある程度明らかにされている。しかし、実用面が強調されたあまり、混合機構を十分に説明し得る段階にはいまだ至っていない。また、研究者相互の統一的理解を得ていないのが現状である。その原因としては外的擾乱の与え方、計測技術上の問題もさることながら、現象の認識の欠如については代表尺度の選定の違いが挙げられよう。

最近では、江頭¹⁾、Asaeda・Tamai²⁾により連行現象に関する統一的理解が模索され、また須賀³⁾により大

型水路実験ならびに実測に基づいて成層度の広い範囲にわたる統一的な記述が試みられている。彼らの研究によれば、せん断流型あるいは主流動の存在しない機械擾乱型であっても、代表尺度を適切に選べば、連行係数 E は乱れの生成因によらずに層平均リチャードソン数 \overline{Ri} の-1乗あるいは-3/2乗で統一的に記述できることを指摘している。しかし、上記関係があらゆる成層状態に適用できるとは限らない。それにはおのずと限界がある。

たとえば、せん断流型の典型例である Ellison・Turner⁴⁾の実験値は上記関係式と比較して若干大きめの連行率を示す。また、 $Ri > 0$ (10^1)の範囲においても実測された連行係数は関係式を上回る傾向を示している。前者については密度フルード数 $Fd (=1/\sqrt{Ri})$ が1.0以上の値であり密度流的に射流状態であること、また後者については拡散による輸送量が連行加入量を凌駕すること⁵⁾が原因の一つに挙げられている。つまり、このことは界面近傍の微細構造あるいは混入形態の違いが連行係数の差異をもたらす原因であることを示唆していると理解できる。このような観点から、室田・平田⁶⁾は内部波のレゾームによる砕波形態の差異を指摘して、界面混合量の違いを明瞭に説明した。また、Asaeda・Tamai や須賀らも可視観測により得られた混入形態の情報と連行係数とを結びつけた考察を試みている。

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科
(〒565 吹田市山田丘 2-1)

** 正会員 工修 大阪大学講師 工学部土木工学科 (同上)

せん断乱流の顕在化した、表層密度噴流の連行現象に関する基礎的な実験は Ellison・Turner のほかに和田・片野⁷⁾、Chu・Vanvari⁸⁾ や椿・小松⁹⁾ によって行われている。代表尺度の選定と実験技術の違いはあるものの、前二者と後二者とでは $E-Ri$ 関係に相当の違いを含んでいる。その原因として Chu らは流動形態の違いを指摘しているが、その真偽のほどは明らかでない。また、和田・片野は実験値の散乱を整理するために内部境界面の勾配を新たな説明因子として導入しているのは興味深い。

著者らは二次元表層密度噴流の乱流せん断層に発生・発達する組織的大規模渦運動の特性を明らかにするために可視化実験¹⁰⁾と詳細な定点計測¹¹⁾を行い、その水理学的役割について動力学的な考察を試み、すでに報告した(以下では、前者を論文Ⅰ、後者を論文Ⅱと呼ぶことにする)。そこで、本研究では論文Ⅱの系統的な実験に基づいて表層密度噴流の連行機構を組織的乱流構造の推移との対応から考察し、さらに既往の実験式と比較検討することにより、表層密度噴流の連行係数に関する統一的理解をまとめる。次に、流速と浮力分布の自己相似性の仮定のもとに連行係数と成層度との関係式を理論的に求める。最後に、この理論式を用いて、表層密度噴流の断面特性量の流程方向変化を推算する。

2. 連行特性の実験

(1) 実験の概要

実験は静止した塩水中に淡水を流速 $U_0 \approx 10$ cm/s、水深 $H_0 \approx 2$ cm で表層放流して行い、放流口から 110 cm の範囲の 14 検査断面で二方向流速成分と塩分濃度の鉛直方向分布をホットフィルム流速計と電導式塩分濃度計を用いて測定した。実験装置ならびに実験方法は論文Ⅰ、Ⅱに詳細に記してあるので参照されたい。

表一は実験の水理諸元である。表中の $Re_0 = U_0 H_0 / \nu$ 、 $Fd_0 = U_0 / \sqrt{B_0 H_0}$ は放流口での平均流速 U_0 、平均浮力 B_0 および水深 H_0 で定義されるレイノルズ数と密度フルード数である。浮力 B は上層放流水密度 ρ と下層塩水密度 ρ_a を用いて $B = (\rho_a - \rho) / \rho_a \cdot g$ (ここに、 g は重力加速度) で定義される。また、 Ri_0 は放流口から 0.5 cm 離れた断面での平均流速分布の最大勾配厚 h_0 を

表一 実験条件

Run	U_0 ($\frac{cm}{s}$)	H_0 (cm)	B_0 ($\frac{cm}{s^2}$)	h_0 (cm)	Re_0	Fd_0	Ri_0
1	10.7	2.5	1.27	0.375	404	6.00	0.004
2	10.6	2.1	4.90	0.389	415	3.30	0.017
3	10.8	2.1	9.80	0.400	435	2.38	0.033
4	10.4	1.8	19.60	0.330	346	1.75	0.059

代表長さに選んだせん断層リチャードソン数であり、 $Ri_0 = B_0 h_0 / U_0^2$ で表現される。なお、座標系は放流口水表面を原点に選び、流程 (x 軸) 方向に正、鉛直 (z 軸) 方向下向きに正とした。

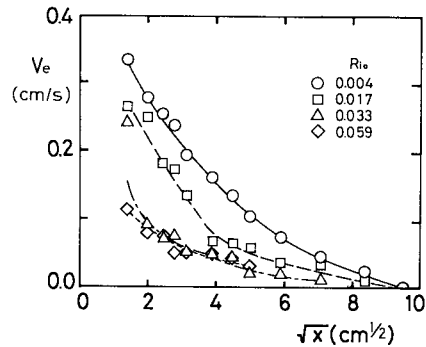
(2) 実験結果とその考察

a) 連行速度の流程方向変化

江頭¹⁾が指摘するように、連行速度の算出法は連行現象の違いにより異なるが、連行される水量が周囲から補給される密度噴流のような場合には、連行速度 V_e は上層流の体積保存則に基づいて次式のように求められる。

$$V_e(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{H_0} U(x, z) dz \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 H_0 は無流面の水深を示し、 $z = H_0$ で $V = -V_e$ である。つまり、連行速度は断面積分された上層流量の流程方向増加率で定義される。したがって、各検査断面で測定した平均流速 $U(x, z)$ の鉛直方向分布を用いれば連行速度を算出できる。論文Ⅱに掲載した連行速度 V_e の流程方向変化を再記したのが図一である。



図一 連行速度 V_e の流程方向変化

論文Ⅰ、Ⅱで示した組織的渦構造が活発に活動する Ri_0 の小さい Run ほど、連行速度 V_e の値は大きい。放流口流速 U_0 はすべての Run で約 10 cm/s であることから、初期せん断領域 ($x < 10$ cm) の V_e は U_0 の 3.5~1% にも達しており、下層塩水の上層への激しい乱流輸送が生起しているものと予想される。 V_e は流下とともに急激に低減してゆく傾向にあり、 $Ri_0 = 0.004$ では $x > 70$ cm で、 $Ri_0 = 0.033$ では $x > 35$ cm で V_e の値は 0.01 cm/s 以下になる。この流程位置は論文Ⅱで述べた組織的渦構造間の合併・融合が終了する位置に対応しており、表層密度噴流の連行現象には組織構造の活性が強く関与していることがわかる。

b) リチャードソン数の流程方向変化

せん断乱流場における連行係数 E は代表流速 U_c 、代表相対密度差 $(\rho_a - \rho_c) / \rho_a$ および代表長さ L_c で表現される平均リチャードソン数 Ri_c のみによって規定される

ことが次元解析的考察^{12),13)}や実験的研究から明らかにされている。

$$E \equiv \frac{V_e}{U_c} = \text{func}(Ri_c), \quad Ri_c \equiv \frac{\rho_a - \rho_c}{\rho_a} g \cdot L_c / U_c^2 \dots (2)$$

従来の経験則は代表尺度に任意の水理量を採用していることもあり、関数形は提案者によりまちまちである。代表尺度の採り方により、 E と Ri_c の値が若干異なることに注意を払う必要がある。一般には、代表長さとして流速分布の無流面水深 H_u あるいは浮力分布において放流口浮力 B_0 の90%の値となる水深 H_b 、また代表流速として平均流速 U あるいは水表面流速 U_s が用いられる。これらは実用的価値があるものの、連行に直接的に関与する界面近傍の情報を与えるものではない。論文Ⅱの測定に基づいて、流動に伴う平均流速の鉛直方向分布形の推移を示したのが図-2である。乱流せん断層から噴流形態へ、さらには浮力効果が勝り始めた成層層への変化に伴い、平均流速の勾配が変化してゆく有様がよくわかる。この傾向は平均浮力分布の変化に明瞭にみられる。

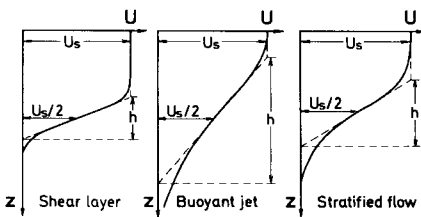


図-2 平均流速の鉛直方向分布の概念図

鉛直方向の乱流輸送に着目すれば、内部境界界面近傍の流速勾配や浮力勾配の存在が強い影響を及ぼすことが予想されるので、流速勾配の最大値を用いて次式で定義されるせん断層厚 h を代表長さとして採用する。

$$h = \frac{U_s}{(-\partial U / \partial z)_{\max}} \dots (3)$$

上述の2つの代表長さを用いて次式のように定義される層平均ならびにせん断層リチャードソン数 Ri_v と Ri_h の流程方向変化を図-3, 4に示す。

$$Ri_v = \overline{B} \cdot H_u / \overline{U}^2, \quad Ri_h = B_s \cdot h / U_s^2 \dots (4)$$

ここに、 \overline{B} と \overline{U} は無流面まで断面平均した浮力ならびに流速を表わし、また B_s と U_s は水表面での浮力と流速を示す。

両図を比較すると、代表尺度の採り方によって得られたリチャードソン数の値も傾向も著しく異なっていることがわかる。初期リチャードソン数 Ri_0 に対して系統的な流程方向変化を示すのはせん断層リチャードソン数 Ri_h である。 Ri_0 が大きいほど、 Ri_h の流程方向増加率

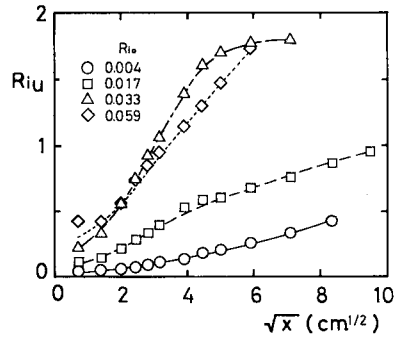


図-3 層平均リチャードソン数

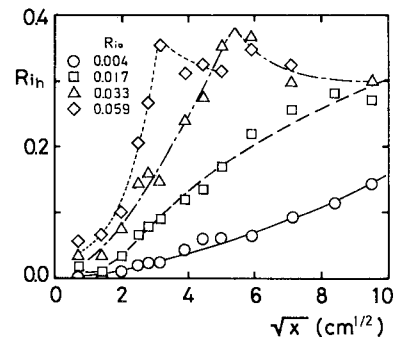


図-4 せん断層リチャードソン数

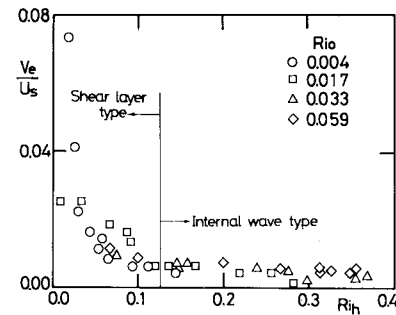


図-5 V_e/U_s と Ri_h との関係

は大きく、短い流程距離で極大値0.36に達する。その極大値は $Ri_0 < 0.1$ の範囲でKoop・Browand¹⁴⁾とThorpe¹⁵⁾により得られた $Ri_h = 0.32 \pm 0.02$ とよく一致している。せん断層の成長は極大値の位置で完全に停止し、以降の流程では密度差に原因する浮力効果がせん断効果に勝って働くことになる。他方、 Ri_v にも流程方向に同様の傾向がみられ、極大値も現われるが、その値は Ri_0 によって異なり物理的意味付けが困難である。

c) V_e/U_s と Ri_h との関係

そこで、代表流速として水表面流速を用いて規格化した連行係数 V_e/U_s とせん断層リチャードソン数 Ri_h との関係を図-5に示す。同図より $Ri_h = 0.12$ を境に連行

係数と Ri_h との勾配が著しく異なっているのが明瞭にわかる。たとえば、 $Ri_h < 0.12$ では V_e/U_s は Ri_h の増大とともに急激に減少するのに対して、 $Ri_h > 0.12$ では V_e/U_s は Ri_h の増大とともに緩慢に減少する。 $Ri_h > 0.12$ における通減特性は $V_e/U_s \propto Ri_h^{-1}$ で近似でき、この関係は Asaeda・Tamai が $10^{-1} < Ri_h < 60$ の範囲で得た関係式とその勾配が一致している。

$Ri_h = 0.12$ は論文 I, II で示した混合層でみられる大規模かつ組織立った渦構造や不規則な小規模乱れ変動の存在可能な上限値であり、 $Ri_h < 0.12$ ではそれらの乱流構造が連行過程に積極的に加担していると考えられる。諸説はあるが、 $Ri_h = 0.08$ が組織的渦構造間の相互干渉や合併・融合の理論的上限値¹⁶⁾である。実験的には $Ri_h > 0.125$ では分散的な内部重力波の存在する流れ場であるという指摘もある¹⁴⁾。つまり、 $Ri_h = 0.12$ は密度噴流を含む混合層形態から成層流への遷移点である。 $Ri_h < 0.12$ をせん断流卓越領域、 $Ri_h > 0.12$ を浮力支配領域と乱れの成因の違いにより流動形態を分類できる。

3. 既往の実験結果との比較

緒言で述べたように、表層密度噴流の連行係数に関する実験成果は代表尺度の選定の違いもあり、統一的な見解が得られていないのが実状である。本章では、2. の実験で得られた水理諸量を用いて既往の実験公式で整理し、それらの妥当性を検討する。

(1) V_e/\bar{U} と Ri_v との関係

図-6 は連行係数 V_e/\bar{U} と流速分布から得られる層平均リチャードソン数 $Ri_v = \bar{B} \cdot H_v / \bar{U}^2$ との関係を白抜印で示す。この代表例は Ellison・Turner⁴⁾ の実験値であり、同図中に黒塗印で示す。両実験値は良好な一致を示している。連行係数 V_e/\bar{U} は Ri_v の増加とともに急激に減少する。実験値を外挿して得られる $V_e/\bar{U} = 0.0$ となる限界リチャードソン数は約 0.86 である。Ellison・Turner の実験における限界値は 0.83 ± 0.10 であり、この点でも一致する。

Ellison・Turner の実験は有限水路で下層塩水の補給

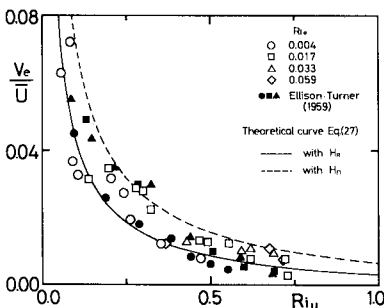


図-6 V_e/\bar{U} と Ri_v との関係

のない非定常な流れであったことから、内部跳水の発生の可能性が指摘され、彼らの実験に対して疑問を呈する報告⁸⁾もなされていた。本実験の詳細な測定によりその疑義が晴れ、妥当性が検証されたといえる。この関係を両対数紙上に再整理すれば、 $Ri_v < 0.1$ に対して

$$V_e/\bar{U} = 6 \times 10^{-3} \cdot Ri_v^{-1} \dots \dots \dots (5)$$

となり、Moore・Long¹⁷⁾ が循環水路で得た関係式と同形になる。

(2) V_e/\bar{U} と Ri_b との関係

図-7 は連行係数 V_e/\bar{U} と浮力分布より得られる層平均リチャードソン数 $Ri_b = \bar{B} \cdot H_b / \bar{U}^2$ の関係を両対数表示したものである。須賀³⁾は $2 \times 10^{-2} < Ri_b < 3 \times 10^2$ の広範囲の実験結果と他の研究者の実験値を合わせて実用式

$$V_e/\bar{U} = 2.0 \times 10^{-3} \cdot Ri_b^{-3/2} \dots \dots \dots (6)$$

を提案しており、標準偏差の範囲も含めて図中に示す。

著者らの実験値は $Ri_b > 0.1$ では提案式よりも少し過大となり、逆に $Ri_b < 0.1$ では過小となる傾向を示し、式(6)とはあまり合致しない。須賀は和田・片野⁷⁾の実験値の整理に際して同様の傾向を見出しており、彼はその原因として流動形態の違いを挙げて式(6)の適用範囲を $Ri_b \geq 1.0$ 、つまり $Fd \leq 1.0$ と規定している。

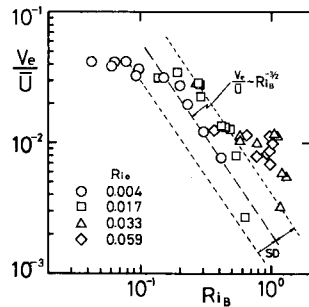


図-7 V_e/\bar{U} と Ri_b との関係

(3) V_e/U_s と Ri_m との関係

Chu・Vanvari⁸⁾ は浮力流束の断面内積分値 $N = \int_0^{H_0} B \cdot U dz$ が流程方向に保存されることから、リチャードソン数を放流口での N の値と水表面流速 U_s を用いて $Ri_m = N_0 / U_s^3$ で定義している。また、椿・小松⁹⁾も同様の表現を用いて実験値を整理している。

図-8 は V_e/U_s と Ri_m との関係を示す。白抜き印で示す今回の実験値は多少散乱気味であり、Chu・Vanvari あるいは椿・小松の実験結果ともあまり一致しない。彼らの実験における放流口密度フルード数 Fd_0 は 6.56~23.77 の範囲にあり、測定された流程位置の全域で流速ならびに浮力分布の相似性は保持されていると期待される。しかしながら、今回の実験のように小さな密度フルード数で噴出された放流水束は放流口近くでは噴流的挙動

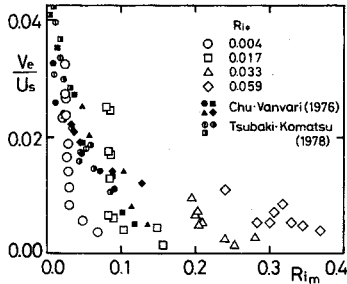


図-8 V_e/U_s と Ri_m との関係

を呈するが、流下とともに浮力効果が勝ってきて成層流の流況に遷移する。この段階では彼らの仮定した相似性は崩壊し、かつ密度界面と無流面も異なることになり、データの散乱の原因となる。それゆえ、 $V_e/U_s \sim Ri_m$ の表現法は表層密度噴流の全流程にわたって適切であるとは言い難い。それは Fd_0 の大きい場合で、しかも放流口近傍に限って有効である。

(4) 表層密度噴流の連行係数に関するまとめ

以上の結果を総合的に評価すれば、表層密度噴流の連行現象に特徴的な組織的渦構造の挙動を反映したせん断層リチャードソン数 Ri_h を用いた整理が実験値の散乱も少なく最も妥当である。和田・片野⁷⁾は界面近傍の情報として内部境界面の勾配を導入することにより $E \sim Ri_v$ 表示での実験値の散乱をうまく説明しているが、それはせん断層厚の変化、ひいては組織的渦構造の盛衰を配慮したものと理解できる。 Ri_h は厳密には流速分布形の測定を前提としているが、その測定は現場においてはなかなか難しい。しかしながら、塩分濃度あるいは温度測定は比較的容易であり、しかも測定の精度は流速測定よりもよい。浮力分布に基づく最大勾配厚を用いることにより同様の整理が可能となろう。

4. 連行係数に関する理論的考察

(1) 連行係数の誘導

基礎方程式の誘導に際して次の仮定を適用する。Ⅰ) 流れは定常で高レイノルズ数である。Ⅱ) プーシネスク近似が成立する。Ⅲ) 流れは流程方向に卓越しており、境界層近似が成立する。その結果、表層密度噴流の支配方程式系—連続方程式、拡散方程式、 x, z 方向運動方程式は次のようになる。ただし、座標系は図-9に示す。

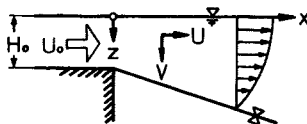


図-9 座標系

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$U \frac{\partial B}{\partial x} + V \frac{\partial B}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{vb}) \dots\dots\dots (8)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{uv}) \dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial \overline{v^2}}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P}{\partial z} + B \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 U, V は x, z 方向の平均流速、 B は平均浮力、 P は平均圧力、 ρ_a は周囲環境水の密度を表わし、またそれぞれの変動成分を小文字 u, v, b で表現している。上付きバー“-”は時間平均を示す。

圧力 P は z 方向の運動方程式 (10) を水表面から z まで積分して、 $z \rightarrow \infty$ で $\partial P / \partial x = 0$ を考慮すれば、

$$\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\infty}^z B dz \dots\dots\dots (11)$$

となる。式 (11) を式 (9) に代入して、微小項を省略すれば、 x 方向運動方程式は次のようになる。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\infty}^z B dz - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{uv}) \dots\dots (12)$$

積分モデルでは流速と浮力の鉛直方向分布がそれぞれ流程方向に相似形を保つと仮定する。基礎方程式 (7), (8), (12) を噴流断面で積分して、 $\overline{uv}, \overline{ub}$ に対して $z=0, \infty$ における境界条件を考慮すると、次の方程式群が得られる。

$$\frac{d}{dx} (I_v \cdot U_s \cdot H_v) = E \cdot U_s \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{d}{dx} (I_{vb} \cdot U_s \cdot B_s \cdot H_v) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{d}{dx} (I_{v^2} \cdot U_s^2 \cdot H_v) = - \frac{d}{dx} (I_{Bz} \cdot B_s \cdot H_v^2) \dots\dots\dots (15)$$

ここに、平均流速と平均浮力の鉛直方向分布は水表面での値 U_s, B_s および H_v を用いて相似関数表示しており、

$$\frac{U}{U_s} = f(\eta), \quad \frac{B}{B_s} = m(\eta), \quad \eta = \frac{z}{H_v} \dots\dots\dots (16)$$

上式中の断面積分値はそれぞれ次のようである。

$$I_v = \int_0^{\infty} f(\eta) d\eta, \quad I_{v^2} = \int_0^{\infty} f^2(\eta) d\eta,$$

$$I_{vb} = \int_0^{\infty} f(\eta) m(\eta) d\eta, \quad I_{Bz} = \int_0^{\infty} \int_{\eta}^{\infty} m(\eta) d\eta d\eta$$

また、 E は V_e/U_s で定義される連行係数である。

式 (13)~(15) の3方程式に対して、未知数は E, U_s, B_s, H_v の4変量であるから、このままでは解析は不可能である。Tamai¹⁸⁾, Koh¹⁹⁾ や Hopfinger²⁰⁾ は3. で求めた連行係数 E とリチャードソン数間の実験式を連立させて、 U_s, B_s, H_v の流程方向変化を求めている。また、Chu-Baddour²¹⁾ は Hazel の不安定理論に基づいて層厚の変化 dH/dx を擾乱の最大成長率に比例すると仮定し、 dH/dx をリチャードソン数の関数として近似表現

することにより、式 (14), (15) から U_s , B_s と H_v の流れ方向変化を求めている。これらは連行に直接的に関与する物理量とリチャードソン数との関係をあらかじめ経験的に設定しておく方法であり、 E と Ri_s の関係を理論的に求めるという本章の目的とは合致しない。

もう一つの方法は方程式を付加的に導入する方法である。平均流のエネルギー方程式がよく補助的に採用される。流れ方向の流れが卓越していることから、 x 方向運動方程式 (12) に U をかけてエネルギー方程式を次のように求める。

$$\frac{1}{2} U \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{1}{2} V \frac{\partial U^2}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(U \int_{-\infty}^z B dz \right) - \frac{\partial}{\partial z} (U \cdot \bar{uv}) + (\bar{uv}) \frac{\partial U}{\partial z} \dots\dots\dots(17)$$

$z=0$ から ∞ まで積分して、境界条件 $\bar{uv}|_{z=0} = \bar{uv}|_{z=\infty} = 0$ を考慮すると、次式が得られる。

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (I_{Ev} \cdot U_s^3 H_v) = \frac{d}{dx} (I_{Eb} \cdot U_s \cdot B_s \cdot H_v^2) + U_s^3 \int_0^{\infty} n(\eta, Ri_s) \frac{df(\eta)}{d\eta} d\eta \dots\dots\dots(18)$$

ここに、レイノルズ応力 $-\bar{uv}(z)$ の鉛直方向分布も

$$-\frac{\bar{uv}}{U_s^2} = n(\eta, Ri_s) = S(Ri_s) n'(\eta) \dots\dots\dots(19)$$

のような相似関数表示を仮定している。また、断面積分値は次のようである。

$$I_{Ev} = \int_0^{\infty} f^2(\eta) d\eta, \quad I_{Eb} = \int_0^{\infty} f(\eta) \int_{\eta}^{\infty} m(\eta) d\eta d\eta$$

ここで、リチャードソン数 Ri_s は次式で定義している。

$$Ri_s = \frac{B_s \cdot H_v}{U_s^2} \dots\dots\dots(20)$$

さて、以上で未知量 E , U_s , B_s , H_v を規定する四つの基礎方程式 (13), (14), (15) および (18) が得られた。そこで、まず式 (14), (15), (18) を連立させて dH_v/dx , dU_s/dx と dB_s/dx に関して解き、それらを式 (13) に代入して整理すると、連行係数 E は Ri_s の関数形として次式のように表現される。

$$E = \frac{2 I_v (2 I_{Bz} Ri_s - I_{2v}) \int_0^{\infty} n(\eta, Ri_s) \frac{df(\eta)}{d\eta} \cdot d\eta}{2 I_{Bz} I_{Bz} Ri_s^2 + 4 (I_{Bz} I_{Ev} - I_{2v} I_{Eb}) Ri_s + I_{2v} I_{Ev}} \dots\dots\dots(21)$$

また、均質噴流の場合には $Ri_s \rightarrow 0$ より、連行係数 E は次式のようなになる。

$$E = - \frac{2 I_v}{I_{Ev}} \int_0^{\infty} n'(\eta) \frac{df(\eta)}{d\eta} \cdot d\eta \dots\dots\dots(22)$$

式 (21) において、(i) 平均流速、平均浮力とレイノルズ応力の分布形と (ii) レイノルズ応力と成層度との関係があらかじめ既知であれば、連行係数 E とリチャードソン数 Ri_s との関係が求まることになる。

同様のアプローチは Jirka²²⁾ によっても実施されてい

る。彼は次のような恒等式

$$\frac{d}{dx} (U_s^3 H_v) = 2 U_s \frac{d}{dx} (U_s^2 H_v) - U_s^2 \frac{d}{dx} (U_s H_v) \dots\dots(23)$$

に式 (13), (15), (18) を代入し、 Ri_s が流れ方向に変化しないという仮定の下に E と Ri_s の簡略な関係式を求めた。さらに、浮力効果によるレイノルズ応力の速減や分布形の遷移をモーニン・オブコフ長の概念を導入して表現し、次式に示す $E \sim Ri_s$ の関係式を提案している。

$$E = E_0 \left(1 - \frac{Ri_s}{\sqrt{Ri_s^2 + Ri_{s*}^2}} \right) (1 + Ri_s)^{-1} \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 $Ri_{s*} = 0.25$ 。

しかしながら、彼の基礎方程式の展開には浮力流束の保存式 (14) が完全に満たされていないことに加えて、数多くの仮定を含むことから、後の実験結果との比較で述べるように式 (24) は適切な推定式になっていない。

一方、椿・小松⁹⁾ はレイノルズ応力を渦動粘性係数 $\epsilon = c_\mu \sqrt{k} \cdot l$ を用いて表現し、さらに乱れエネルギー方程式と加速度平衡式を導入することにより E と Ri_m の関係を求めている。彼らの論文は難解かつ複雑すぎて検証するのがなかなか難しいが、乱れエネルギー k や混合距離 l の相似関数形および成層度との関係を乱れ諸量の測定結果との照合から最終的に定める必要がある。積分方程式の展開は平均流速分布の相似性等の実験的観察に基づいたプリミチフで概括的であるのに対し、乱流構造の詳細に立ち入ってレイノルズ応力を厳密に推算するという側面を彼らの理論展開は合わせもっている。 k - ϵ 二方程式乱流モデルを表層密度噴流の解析に適用した例として Gibson・Lauder²³⁾ の研究がある。

(2) 相似関数形の導入

本研究では論文 II の測定結果に基づいて、表層密度噴流の平均流速、平均浮力およびレイノルズ応力の分布形を次式で表現する。

$$\left. \begin{aligned} U(z)/U_s &= f(\eta') = \exp \{ -(0.833 \eta')^2 \} \\ B(z)/B_s &= m(\eta') = \exp \{ -\eta'^2 \} \\ -\bar{uv}(z)/(-\bar{uv})_{\max} &= n(\eta') \\ &= 3.768 \eta'^2 \exp \{ -2(0.833 \eta')^2 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

ここに、 $\eta' = z/H_{0.5}$, $H_{0.5}$ は半値半幅である。

測定したレイノルズ応力の分布形と $n(\eta')$ との比較の一例を示したのが図-10 である。Prandtl の混合長の

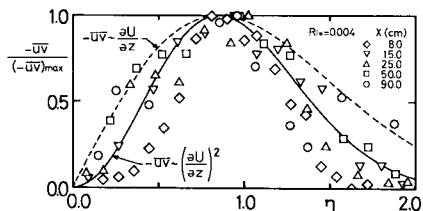


図-10 レイノルズ応力の分布

式を適用すると、 $-\bar{u}\bar{v} \propto (\partial U/\partial z)$ or $(\partial U/\partial z)^2$ であることから、図中の実線および破線が得られる。ここでは、式(25)で表わされる実線を採用した。積分モデルにおいては分布形が相似関数で表示できること自体が重要であり、いかなる関数形であるかは二次的な問題である。最終的には断面積分値で評価することになるので、実線か破線かいずれを採用しても大差はない。

(3) 成層効果の表現

浮力効果が勝ってきて成層安定化を促進するようになると、乱れが抑制されると同時に、流れも二層流的な流速分布に歪み始める。後者の影響については式(25)で勘案すべき項目であるが、先に述べたように相似関数形における差違は本質的な問題ではないのでここでは配慮しない。前者の影響については論文Ⅱの実験結果に基づいて、レイノルズ応力とリチャードソン数の関係(図-11参照)を次式のように表現する。

$$S(Ri_s) = \frac{(\bar{u}\bar{v})_{\max}}{U_s^2} = 1.04 \times 10^{-3} \cdot Ri_s^{-0.9} \dots \dots \dots (26)$$

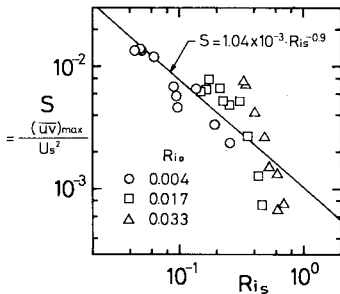


図-11 $(\bar{u}\bar{v})_{\max}/U_s^2$ と Ri_s との関係

以上より、おのおの断面積分値を求めると、

$$I_{1v} = 0.554, \quad I_{2v} = 0.392, \quad I_{3v} = 2.310, \\ I_{E1v} = 0.320, \quad I_{E2v} = 0.132, \quad I_{E3v} = 0.124,$$

$$\int_{-\infty}^0 n(df/d\eta')d\eta' = -0.000628 \cdot Ri_s^{-0.9}$$

となり、連行係数 E の理論式は最終的に次のように求まる。

$$E = \frac{5.61 \times 10^{-3} \cdot (1.48 - Ri_s)}{(Ri_s^2 - 0.778 Ri_s + 3.83) \cdot Ri_s^{0.9}} \dots \dots \dots (27)$$

(4) 実験結果との比較

図-12は連行係数 $E = V_e/U_s$ とリチャードソン数 $Ri_s = B_s \cdot H_v/U_s^2$ との関係を示す。実験値は $E \sim Ri_s$ の関係と比較して少し散乱気味であるが、成層度の連行に及ぼす影響は顕著に現われている。同図に示した実線は式(27)であり、破線はJirkaの提案式(24)である。

理論式(27)は実験結果を非常に良好に予測しており、近似的に用いた概括的な相似関数表示においてさえ連行

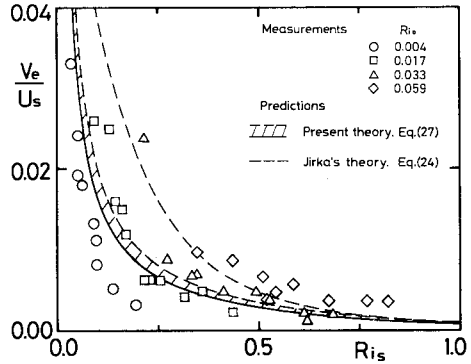


図-12 V_e/U_s と Ri_s との関係

係数と成層度との関係を十分な精度で予測し得ることがわかる。また、相似関数形の影響を把握するために、レイノルズ応力の分布を $-\bar{u}\bar{v} \propto \partial U/\partial z$ (図-10の破線)で近似して計算した。その結果は図-12中の斜線部の範囲にプロットされることになり、関数形の及ぼす影響は思いのほか小さい。

一方、Jirkaの理論式は実験値と大幅に異なっている。彼は式(24)をEllison・Turner流の V_e/\bar{U} と Ri_v との関係にプロットすることにより理論式の検証を試み、その妥当性を確認しているが、連行係数およびリチャードソン数の定義が異なっており適切な評価とは言い難い。

そこで、 $V_e/\bar{U} \sim Ri_v$ の関係に理論式(27)をプロットしたのが図-6に記入した実線および破線である。平均値 \bar{U} と B は相似関数 $f(\eta')$ 、 $m(\eta')$ を用いて U_s あるいは B_s から変換する必要がある。このときに問題となるのは積分範囲の採り方である。実線は局所リチャードソン数の急増大点で定義される水深 H_R を、また破線は U_s の2%値となる nominal boundary H_n を積分範囲として平均量を求めた結果である。同図より、両理論式は実験結果の下限と上限を与えることとなり、その傾向は実験値と非常に良く一致している。 Ri_v の全域的な傾向からすれば、 H_R を用いた実線の理論式が比較的良好であり、Ellison・Turner流の表現式として次式が求まる。

$$E = \frac{V_e}{\bar{U}} = \frac{2.19 \times 10^{-2} \times (2.23 - Ri_v)}{(Ri_v^2 - 1.17 Ri_v + 8.62) \cdot Ri_v^{0.9}} \dots \dots \dots (28)$$

5. 表層密度噴流の流動特性

(1) 基礎方程式

連行係数 E の理論式(27)と積分形の基礎方程式(13)~(15)を連立することにより、噴流特性量の流程方向変化を求めることが可能となる。基礎方程式を変形して U_s 、 B_s 、 H_v の流程方向変化の表現式を書き直すと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_s}{dx} &= \frac{1}{0.554} \cdot \frac{0.392 + 0.132 Ri_s}{0.392 - 0.264 Ri_s} \cdot \frac{U_s \cdot E}{H_v} \\ \frac{dB_s}{dx} &= -\frac{1}{0.554} \cdot \frac{B_s \cdot E}{H_v} \\ \frac{dH_v}{dx} &= \frac{1}{0.554} \cdot \frac{0.784 - 0.132 Ri_s}{0.392 - 0.264 Ri_s} \cdot E \end{aligned} \right\} \dots\dots(29)$$

となる。

(2) 代表スケール

基礎方程式 (13) と (14) にみられるように運動量ならびに浮力流束が流程方向に保存されることから、放流口での水理量を用いて流体力 (flow force) M および浮力流束 N は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 = U_0^2 \cdot H_0 + \frac{1}{2} B_0 \cdot H_0^2 \\ N &= N_0 = U_0 \cdot B_0 \cdot H_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

また、この M_0 と N_0 を用いて、流速、浮力および長さの代表スケールは次のように定義できる。

$$U' = N_0^{1/3}, \quad B' = N_0^2 / M_0, \quad L' = M_0 / N_0^{2/3} \dots\dots\dots(31)$$

したがって、二次元表層密度噴流の大域的な流動特性はこれらのスケール U' , B' , L' で規定されるものと期待される。以下では、式 (29) を式 (31) で無次元表示して数値計算を行う。

(3) 数値解析における形成領域の取扱い

上述の積分モデルの展開は流速および浮力の鉛直方向分布が相似関数表示できることを前提にしている。それゆえ、適用範囲は流れの確立領域に限定され、形成・遷移領域の終端点で水理量を設定するか、仮想原点を設けて初期水理量を特定する必要がある。本解析では前者を採用する。形成・遷移領域の終端点はポテンシャル・コア一端に相当することより、水表面での流速および浮力は放流口でのそれぞれの値に等しい。したがって、終端点での水深は、相似分布形を考慮して、運動量保存則から $H_v = 2.3 H_0$ と定めた。

(4) 数値解析結果

図-13, 14 は代表スケール U' , B' と L' を用いて無次元表示した水表面での流速 U_s , 浮力 B_s , 半値半幅 $H_{0.5}$ ならびに密度フルード数 $Fd_s = U_s / \sqrt{B_s \cdot H_v} = 1 / \sqrt{Ri_s}$ の流程方向変化を示す。図中の曲線は、放流口密度フルード数 $Fd_0 (= U_0 / \sqrt{B_0 \cdot H_0})$ が 5~20 の範囲の数値解析結果を示し、符号は Chu・Baddour²⁴⁾ の実験結果を示す。実験値との比較のために、水深は U_s の 1/2 となる水深 $H_{0.5}$ を流速分布形から推算して示す。

いずれの図も数値解が実験値の傾向を良好に表現することを示している。また、各水理量の流程方向変化はそれぞれ一つの曲線に漸近してゆくことが認められる。成層度の大きい $Fd_0 = 5.0$ の場合には、他の解析結果と比較して流程方向に若干の差がみられるが、最終的な漸近値は同一となる。すなわち、放流口水理量を用いて定義

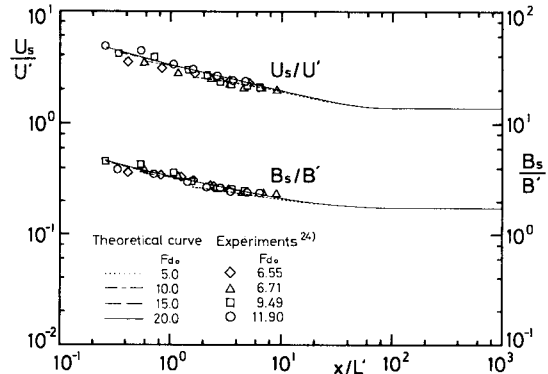


図-13 平均流速と平均浮力の流程方向変化

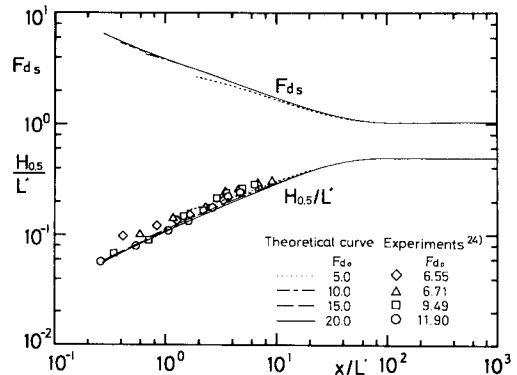


図-14 噴流水深と密度フルード数の流程方向変化

した代表スケール U' , B' , L' によって、二次元表層密度噴流の流動は大略記述できることがわかる。

また、密度フルード数 Fd_0 の流程方向変化を求めたのが図-14 の上段である。初期値は $Fd_0 = 5 \sim 20$ とそれぞれ異なるが、流下とともに一つの曲線に漸近して最終的に $Fd_s = 1.0$ となる。これは、玉井・有田²⁵⁾ が内部跳水の発生しない密度噴流の最終的密度フルード数として $Fd = 1.0$ と求めていることと一致するが、分布形状を配慮して断面平均値で密度フルード数を表現すると 0.86 となり、 $Fd = 1.0$ の値は普遍的なものではない。

図-13, 14 の水理量の流程方向変化において、 $x/L' = 20$ で各水理量の変化率が変わり、 $x/L' = 80$ で最終値に漸近しているのが認められる。せん断層リチャードソン数 Ri_h の値は $x/L' = 20$ の位置で約 0.13 であり、せん断の卓越した流動から浮力の支配的となる成層流への遷移点 $Ri_h = 0.12$ とよく一致しているのは興味深い。

(5) 最終流動状態

次に、式 (31) を変形して代表スケールを放流口密度フルード数 Fd_0 の関数で表わせば次のようになる。

$$U' = \frac{U_0}{Fd_0^{2/3}}, \quad B' = \frac{B_0 \cdot Fd_0^{4/3}}{Fd_0^{1/2}}, \quad L' = \frac{H_0(Fd_0^2 + 1/2)}{Fd_0^{2/3}}$$

上式と図-13, 14 で得られた漸近値を用いることにより, 表層密度噴流の最終流動状態の水理量および最終流量は次式で予測可能となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_*}{U_0} &= 1.4 \frac{1}{Fd_0^{2/3}}, \quad \frac{B_*}{B_0} = 1.8 \frac{Fd_0^{1/3}}{Fd_0^2 + 1/2}, \\ \frac{H_{0*}}{H_0} &= 0.94 \frac{Fd_0^2 + 1/2}{Fd_0^{2/3}}, \quad \frac{Q_*}{Q_0} = 0.71 \frac{Fd_0^2 + 1/2}{Fd_0^{2/3}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

以上より, 総連行量 $Q_E (= Q_* - Q_0)$ の予測値と最終流動の到達距離 $x/L = 80$ を放流口諸量で無次元表示して求めると, 表-2 のようになる。相似関数形の選び方によって表-2 の値は少し変わることもあるが, 予測値はおおむね正しい。同表は, たとえば $Fd_0 = 8$ で二次元的に表層放流された密度噴流は放流量の約 1.86 倍の周囲環境水を連行したのちに, $x/H_0 = 1290$ の流程位置で成層流に移行することを示しており, 実験室レベルで表層密度噴流の実験を行うことの困難さを示唆している。すなわち, 2 cm の放流口水深で実験を実施するためには最低 25 m 程度の長さを有した水槽を必要とすることになり, おおかたの水理実験では下流端条件の影響を受けて内部跳水の発生を余儀なくされることになる。

表-2 最終流動の予測値

Fd_0	4	8	12	16	20
Q_E/Q_0	0.85	1.86	2.73	3.52	4.24
x/H_0	520	1290	2700	3230	4300

6. 結 言

二次元表層密度噴流の連行特性を組織的大規模渦運動との関連から実験的に検討した。さらに, 連行係数と成層度との関係式を理論的に求めた。本研究で得られた主要な結果は以下のとおりである。

(1) 連行係数 E と成層度の指標であるリチャードソン数 Ri_c との関係は代表尺度の選定の違いにより, その傾向も異なる。表層密度噴流では組織的渦構造の挙動を反映したせん断層リチャードソン数 Ri_h を用いた整理が実験値の散乱も少なく有効である。また, Ri_h の流程方向変化は放流口での初期リチャードソン数 Ri_0 に対して系統的な変化を示す。

(2) 連行に関与する界面近傍の乱流運動は $Ri_h = 0.12$ を境に異なる。乱れの成因の違いにより $Ri_h < 0.12$ をせん断流卓越領域, $Ri_h > 0.12$ を浮力支配領域と明瞭に分類できる。両領域における $V_e/U_s \sim Ri_h$ の近似曲線の勾配は著しく異なる。

(3) $E \sim Ri_c$ に関する統一の見解を得るために実験値を種々の表示法で整理して比較検討した結果,

Ellison・Turner 流の表示が妥当であることがわかった。Chu・Vanvari 流の表示は噴流的特性から成層流の特性へと移行する Ri_0 の大きい表層密度噴流に対しては適切でない。

(4) 方程式の数の不足を補う付加的な条件として平均流のエネルギー方程式を用いた積分モデルを展開した結果, 連行係数に関する理論式 (21) が得られた。相似関数表示した平均流速, 平均浮力およびレイノルズ応力の鉛直方向分布の断面積分値を用い, さらに実験結果に基づいて浮力効果によるレイノルズ応力の通減率をリチャードソン数の関数として見積ると, 最終的に式 (27) あるいは式 (28) を得る。理論式は実験結果を非常に良好に予測している。

(5) 積分型基礎方程式と連行係数に関する理論式とを連立させて, 噴流特性量の流程方向変化を推算した。その結果, 流動特性の予測値は実験結果とよく合致しており, 流動特性は流体力 (flow force) と浮力流束の二つの保存量を用いて定義された代表スケール U', B', L' により規定されることがわかった。また, 解析結果は, 大規模組織構造が $x/L = 20$ で崩壊し, $x/L > 80$ の領域で連行が停止して成層流に移行することを示している。その最終流動特性は放流口密度フルード数の関数として一義的に定められる。

最後に, 本研究の遂行に関して協力頂いた大阪大学院生 戸上拓也氏 (現, 大阪府土木部勤務) と 梶山長一氏に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 江頭進治: 密度成層場の流れと混合機構に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, pp. 6~25, 1980.
- 2) Asaeda, T. and Tamai, N.: Turbulent Entrainment in Stratified Flows, 3rd Inter. Sympo. on Stochastic Hydraulics, pp. 445~456, 1980.
- 3) 須賀堯三: 感潮河川における塩水くさびの水理に関する基礎的研究, 土木研究所資料 1537 号, pp. 32~54, 1979.
- 4) Ellison, T. H. and Turner, J. S.: Turbulent Entrainment in Stratified Flow, J. Fluid Mech., Vol. 6, pp. 423~448, 1959.
- 5) Denton, R. A. and Wood, I.: Penetrative Convection at Low Peclet Number, J. Fluid Mech., Vol. 113, pp. 1~21, 1980.
- 6) 室田 明・平田健正: 成層密度流における内部波特性と混合機構について, 第 22 回水理講演会論文集, pp. 107~112, 1978.
- 7) 和田 明・片野尚明: 工業用水の取水問題, 第 15 回海岸工学講演会講演集, pp. 297~306, 1968.
- 8) Chu, V. H. and Vanvari, M. R.: Experimental Study of Turbulent Stratified Shearing Flow, Proc. ASCE, HY. 6, pp. 691~706, 1972.
- 9) 椿東一郎・小松利光: 2 次元表層密度噴流における流れの特性と連行現象, 土木学会論文報告集, 第 273 号,

- pp. 69~81, 1978.
- 10) 室田 明・中辻啓二・敷内生死：二次元表層密度噴流における大規模渦運動に関する実験的研究，土木学会論文報告集，第 339 号，pp. 109~118, 1983.
 - 11) 室田 明・中辻啓二・戸上拓也：二次元表層密度噴流の初期発達過程に及ぼす成層効果について，土木学会論文報告集，第 342 号，pp. 115~123, 1984.
 - 12) Long, R. R. : The Influence of Shear on Mixing across Density Interface, *J. Fluid Mech.*, Vol. 70, pp. 305~320, 1975.
 - 13) Kantha, L. H., Phillips, O. M. and Azad, R. S. : On Turbulent Entrainment at a Stable Density Interface, *J. Fluid Mech.*, Vol. 79, pp. 753~768, 1969.
 - 14) Koop, C. G. and Browand, F. K. : Instability and Turbulence in a Stratified Fluid with Shear, *J. Fluid Mech.*, Vol. 93, pp. 135~159, 1979.
 - 15) Thorpe, S. A. : Experiments on Instability and Turbulence in a Stratified Shear Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 61, pp. 731~751, 1973.
 - 16) Holmboe, J. : On the Behaviours of Symmetric Waves in Stratified Shear Layers, *Geophys. Publ.*, Vol. 24, pp. 67~113, 1962.
 - 17) Moore, M. J. and Long, R. R. : An Experimental Investigation of Turbulent Stratified Shearing Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 49, pp. 635~655, 1971.
 - 18) Tamai, N. : Surface Discharge of Horizontal Buoyant Jets, *Coastal Eng. in Jappn*, Vol. 12, pp. 159~177, 1969.
 - 19) Koh, R. C. Y. : Two-Dimensional Surface Warm Jets, *Proc. ASCE*, Vol. 97, HY 6, pp. 819~836, 1971.
 - 20) Hopfinger, E. J. : Development of a Stratified Turbulent Shear Flow, *Inter. Sympo. on Stratified Flows*, pp. 553~565, 1972.
 - 21) Chu, V. H. and Baddour, R. E. : Stabilization of Turbulence in Plane Shear Layer, 2nd Inter. Sympo. on Stratified Shear Flows, pp. 367~377, 1980.
 - 22) Jirka, G. H. : Turbulent Buoyant Jets in Shallow Fluid Layers, *Turbulent Buoyant Jets and Plumes*, Pergamon Press, pp. 69~119, 1982.
 - 23) Gibson, M. M. and Launder, B. E. : On the Calculation of Horizontal Turbulent, Free Shear Flows Under Gravitational Influence, *J. Heat Transfer*, Vol. 98 C, pp. 81~87, 1976.
 - 24) Baddour, R. E. and Chu, V. H. : Turbulent Gravity-Stratified Shear Flows, *Fluid Mech. Lab. Rept. No. 78-3*, McGill Univ., 1978.
 - 25) 玉井信行・有田正光：表層放出二次元密度流の流動形態分類および最終上層厚について，第 28 回水理講演会論文集，pp. 121~127, 1984.

(1984.1.17・受付)