

なめらかな横断面形状をもつ直線流路の せん断力分布と拡幅過程の解析

SHEAR STRESS DISTRIBUTION ON A CONTINUOUS BOUNDARY AND WIDENING PROCESS OF A STRAIGHT ALLUVIAL CHANNEL

福岡捷二*・山坂昌成**

By Shoji FUKUOKA and Masashige YAMASAKA

To predict shear stress distribution on stream boundaries is one of important problems in river hydraulics because shear stress causes erodible materials composing the boundaries to move and channel geometry to change. The boundary shear stress is ordinarily calculated from the streamwise component of weight of water column on boundary segment. This method brings in serious errors in the shear stress near the bank because internal shear stress due to lateral variation of velocity is neglected. In this paper, an accurate expression to shear stress distribution is derived from the formulation of similar cross-sectional profile of widening channel and of bed load on lateral and longitudinal slopes. Successful formulation of shear stress distribution makes possible to predict the channel widening process.

1. ま え が き

自然状態の河川は流水の作用により、側岸の侵食とこれに伴う堆積によって、流路の変動を繰り返してきた。わが国の河川においては、堤防や護岸の建設によりこのような流路変動を極力抑え、洪水流の占める領域を限定することが一般的に行われている。しかし、このような目的で行われる河道の法線計画においてもなお、流路変動および堤防や護岸の設計と密接に関連する流路境界面に作用するせん断力の適切な見積りが強く望まれているが、いまだ十分解明されているとはいえず、経験的な手法に頼らざるを得ない部分が多い。

流路の変動現象のうち特にその基本である直線流路の拡幅過程に関する研究は古くより行われ、数々の成果が挙げられてきた¹⁾。なかでも、平野²⁾は流路の拡幅過程を側岸の侵食と侵食土砂の河床への堆積の複合過程としてとらえ、流砂運動の力学的機構まで取り入れた拡幅解析を行い、その後の拡幅過程に関する研究の発展を促した。しかし、境界面に作用するせん断力の分布が不明確

であるために、拡幅解析は流路境界面を斜面領域と河床領域に分割し、この2つの領域の境界地点における横断方向流砂量のみを考慮した解析段階にとどまっていた。藤田³⁾は流路横断面形状の変形過程に注目して、横断面形状を斜面領域と河床領域に分割しない連続な境界形状として扱い、より実際の拡幅過程の解析を行っている。しかし、解析では、せん断力としてその地点の水深を用いた $\tau = \rho_0 g h i_e \cos \theta$ (h : その地点で鉛直に測られた水深, i_e : エネルギー勾配, θ : 境界面の横断勾配角) を仮定しているため側岸付近のせん断力が小さめに見積られ⁴⁾、また、移動軌跡の相似性を仮定した砂粒子の移動方向の実験式を用いており検討の余地が残されている。澤井・芦田⁵⁾は比較的大きな横断勾配、曲率をもつ流路の安定な横断面形状に関する考察を行い、境界面の法線群による断面分割法に基づいた、より合理的なせん断力分布の算定法を提案している。長谷川⁶⁾は、非粘着性流路の拡幅解析をより一般的な条件に対して実行できるように斜面上の流砂の運動機構を詳細に検討し横断方向流砂量式を誘導している。流砂量式はせん断力の関数として表わされているため、流路境界面に作用するせん断力の分布が与えられなければ、拡幅解析を行うことができない。任意断面形状の流路に対するせん断力の分布が明らかでないため、台形断面の斜面上のせん断力⁶⁾の

* 正会員 Ph.D. 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科 (〒152 目黒区大岡山 2-12-1)

** 正会員 工博 埼玉大学助手 工学部建設基礎工学科 (〒338 浦和市下大久保 255)

分布式を準用している。このように、境界面に作用するせん断力との関係において斜面上の砂粒子の運動機構が明らかとなっても、せん断力分布の精度よい算定法が確立されない限り流路変動の機構は十分に解明され得ないし、堤防、護岸の計画のうえからも、流路境界面に作用するせん断力の分布を明らかにすることは重要となる。

移動性境界面上のせん断力の直接測定はきわめて困難であるため、本研究では、非粘着性材料により構成される一様直線流路の横断面形状のなめらかな変化過程を実験的に検討し、これと流砂量式とから、せん断力分布を算定する。次に、流路の横断面形状、せん断力分布式、横断方向流砂量式を関係づけ、直線流路の一様拡幅過程の解析を行い、実験によって検証することにより流路変動現象を解明するための基礎を得る。

2. 直線流路の拡幅実験

(1) 実験装置と実験方法

実験に用いた水路は長さ 8 m、幅 40 cm、側壁高さ 30 cm の可変勾配水路である。下流端より約 6 m の長さにわたって粒径 0.067 cm のほぼ一様粒径の砂を 1/400 の勾配に敷きならし、水路中央に底面幅 5 cm、斜面角 30° の台形断面の溝を切り、これに一定流量を通水する。拡幅に及ぼす水面上の側岸高の影響を調べるために、初期台形断面の高さが 6 cm、8 cm の 2 つのケースについて実験を行った⁷⁾。上流域と中流域の流路横断面形状の時間的な変化が同じになるためには、上流端で給砂を行う必要がある。しかし、流砂量は横断面内で一様ではなく、これに見合う給砂を上流端で行うことは困難であり、またほぼ等流状態が保たれていることから、上流端での給砂は行われていない。実験条件を表-1 に示す。

表-1 実験条件

Run No.	河床勾配 i_0	流量 Q	初期側岸高	全通水時間
SW-1	1/400	2.0 l/s	6 cm	120 min
SW-2	1/400	2.0 l/s	8 cm	120 min

(2) 実験結果

図-1、図-2 は 2 つの条件における水際線の時間変化を示す。X は下流端より上流に向かって測られた距離である。いずれの実験においても、明瞭な交互砂州が形成されなかったため左右岸の拡幅量はほぼ同じであるが、上流端の給砂条件、下流端の砂止めの形状(一定高さ)の影響を受けて、水際線は必ずしも直線とはならず、下流域でやや広がる傾向にある。中流域では上、下流端の影響が小さく、ほぼ等流が保たれているため、X=3 m の地点において測定された横断面形状の時間的な変化について詳細に検討する。

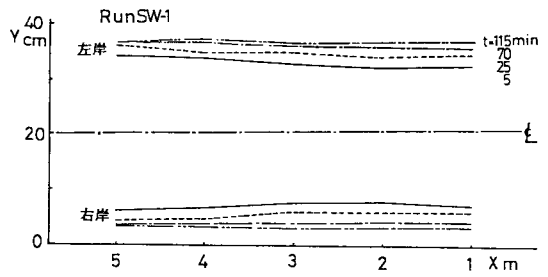


図-1 水際線の時間変化 (Run SW-1)

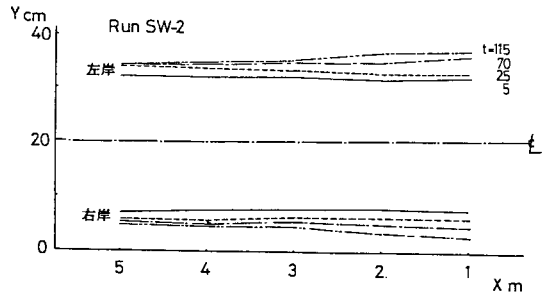


図-2 水際線の時間変化 (Run SW-2)

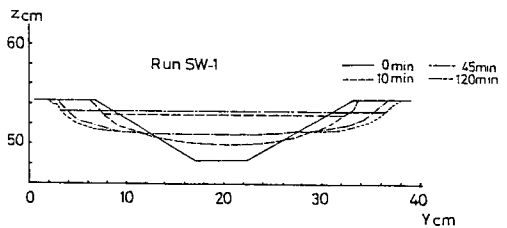


図-3 横断面形状の時間変化 (Run SW-1)

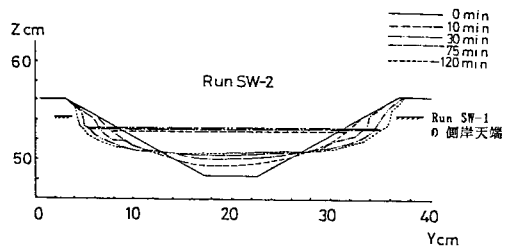


図-4 横断面形状の時間変化 (Run SW-2)

図-3、図-4 は流路横断面形状の時間変化を示す。水面下の横断面形状は、Run SW-2 できわめて側岸部に小さな段を形成することを除けば、両者に顕著な差は認められない。水面上の側岸形状は、側岸天端高の高い Run SW-2 の方が鉛直に近い切り立った形状をなす。小さな段の形成と水面上の切り立った側岸形状は、水面上の側岸を構成する砂の崩落がサクシヨンの影響を受けて間欠的に生じていることを示す。流路の拡幅は、側岸の侵食、侵食砂の河床への堆積、水位の上昇を伴って進

表一 横断面形状の代表量の時間変化 (Run SW-1)

通水時間 t (min)	流水断面積 A (cm ²)	水面幅 B (cm)	中央水深 h _{CL} (cm)	水位 H _s (cm)	中央河床高 η _{CL} (cm)
10	52.1	24.8	3.20	53.01	49.81
20	56.7	27.2	2.86	53.14	50.28
30	57.4	28.8	2.60	53.20	50.60
45	57.8	30.7	2.47	53.27	50.80
60	56.9	31.5	2.28	53.27	50.99
75	60.4	32.2	2.23	53.32	51.09
90	60.8	32.6	2.20	53.29	51.09
120	64.0	33.6	2.29	53.37	51.08

表三 横断面形状の代表量の時間変化 (Run SW-2)

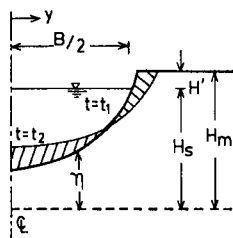
t (min)	A (cm ²)	B (cm)	h _{CL} (cm)	H _s (cm)	η _{CL} (cm)
10	57.7	24.4	3.48	52.97	49.49
20	54.8	26.0	3.10	53.04	49.94
30	57.1	27.2	2.92	53.15	50.23
45	56.1	28.3	2.73	53.23	50.50
60	59.8	28.9	2.55	53.29	50.74
75	62.4	29.5	2.64	53.27	50.63
90	59.5	30.1	2.50	53.24	50.74
120	60.0	30.8	2.38	53.21	50.83

行する。横断面形状の代表量の時間変化を表一、表三に示す。

水位が上昇する原因としては次の2つが考えられる。第1に、拡幅に伴って、抵抗が増し、流水断面積が増大することである。第2に、水面上にある側岸構成砂が水中へ崩落する水際からの給砂効果である。これらによる水位の上昇量は、流砂の連続式により、以下のように定式化される。等流状態の拡幅過程においては、図一五の斜線部が示す侵食量と堆積量は等しくなり、図中の記号を用いて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} (H_m - \eta) dy = \text{const.} \quad (1)$$

が成り立つ。左辺の積分値は、天端下の空間面積と水面下の流水断面積 A の和で表わされる。水面上の側岸が鉛直に切り立っている場合には、天端下の空間面積が BH' で表わされることを考慮し、式 (1) の両辺を時間微分することにより、流水断面積の増加と水面上の側岸構成砂の水中への崩落に起因する水位上昇量が次のように表わされる。



図一五 水位上昇の説明図

$$\frac{dH_s}{dt} = \frac{1}{B} \frac{dA}{dt} + \frac{H'}{B} \frac{dB}{dt} \quad (2)$$

式 (2) の右辺第1項が流水断面積の増加に、第2項が側岸構成砂の崩落に起因する水位上昇量を示す。抵抗則が

$$\bar{\tau} = \rho_0 c_f (Q/A)^2 \quad (3)$$

で表わされる場合には、拡幅に伴う流水断面積の変化は

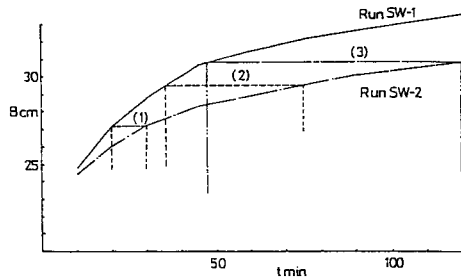
$$A/A_0 \approx (B/B_0)^{1/3} \quad (4)$$

となるため、式 (2) は次式のように変形される。

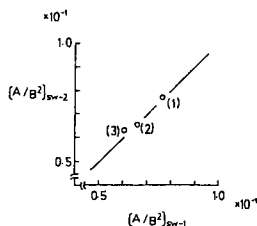
$$\frac{dH_s}{dt} \approx \left(\frac{A}{3B^2} + \frac{H'}{B} \right) \frac{dB}{dt} \quad (5)$$

いま、A、B の値として、Run SW-1 の t=20 min の値、Run SW-2 の t=30 min の値を用いると、H'/B ≥ 2.6 × 10⁻² すなわち、H' が約 7 mm 以上である場合に、流水断面積の増大による水位上昇 (上式第1項) よりも給砂効果による水位上昇 (同第2項) が卓越する。この時刻における実測の H' は Run SW-1 で 1.3 cm、Run SW-2 で 3.2 cm となっており、いずれにおいても後者の効果による水位上昇が卓越していることになる。

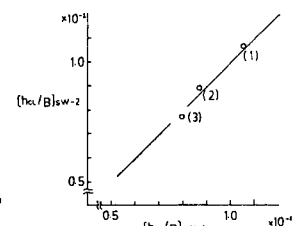
水面下の横断面形状に及ぼす水面上の側岸高の影響を調べるために、同一水路幅における Run SW-1 と Run SW-2 の横断面形状の代表量についての比較を行う。水面幅の時間変化を示す図一六によると、Run SW-2 の t=30, 75, 120 min における水面幅はそれぞれ Run SW-1 の t=20, 36, 48 min における水面幅にほぼ等しい。この3つの状態における流水断面積、中央水深の比較を示したものがそれぞれ、図一七、図一八である。この図より、水面幅が同一である場合には、側岸高の差によら



図一六 水面幅の時間変化



図一七 流水断面積の比較



図一八 中央水深の比較

ず水面下の横断面形状はほぼ同一となることがわかる。したがって、境界面に作用するせん断力の分布も、水面幅が等しい状態ではほぼ等しくなると考えられる。

拡幅速度に及ぼす側岸高の影響は水面幅の時間変化を示す図-6より明らかで、側岸高の高い方が拡幅の進行が遅くなる。この理由として次の2つが挙げられる。第1に側岸高の高いものほど、同量の拡幅に対して水面上の側岸の崩落砂量が大きくなることである。第2に、水面上の側岸高の高い場合ほど水際付近の砂粒子間に作用する垂直応力が大きくなり、側岸部が侵食されにくくなることである。第2の影響はRun SW-1とSW-2の初期の拡幅速度の差に現われている。すなわち、Run SW-2では、通水後約20 minまでは水面上の側岸崩落面がRun SW-1の側岸天端高にまで達していないため、同量の拡幅に対して水際からの給砂量は両者ではほぼ同量となるにもかかわらず、側岸高の高いRun SW-2の方が初期の拡幅速度が小さくなっている。先に述べた、水面上の側岸高の大ききによらず同一の水面幅の状態では水面下の横断面形状がほぼ同じとなり、せん断力の分布もほぼ同一となることを考慮すると、この差は砂粒子間に作用する垂直応力、あるいは水面上の側岸構成砂内に作用するサクシヨンの影響³⁾によって現われているものと考えられる。

(3) 流路横断面形状の無次元表示

横断方向流砂量 q_{by} は、等流状態で拡幅段階にある流路の横断面形状 η の時間変化を測定し、流砂の連続式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_{by}}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

を適当な境界条件のもとに積分することにより得られる。一般に、測定された横断面形状は流下方向の平均的な横断面形状に対し誤差を含み、対称形とならなかったり、横断勾配が局所的に変化したりする。そこで、この点を考慮し、測定された横断面形状を連続な関数形で表わすことを考える。

池田⁹⁾は安定した流路の横断面形状および、拡幅過程にある流路の横断面形状は、

$$\frac{h}{h_{cl}} = 1 - \exp\left(-\frac{\xi}{\Delta}\right) \dots\dots\dots(7)$$

で表現されることを実験的に示している。式中の Δ は、

$$\Delta = \frac{1}{h_{cl}} \int_0^b (h_{cl} - h) d\xi \dots\dots\dots(8)$$

で定義される。しかし、式(7)の h を式(8)に代入しても Δ が求まらないこと、および式(7)の表現では流路中心線に対する横断面形状の対称性を満足しないことから、式(7)を参考にして等流状態にある非粘着性材料より構成される流路の横断面形状を次式のように表わす。

$$\frac{h}{H} = 1 - \left\{ \exp\left(-\frac{b-y}{D}\right) + \exp\left(-\frac{b+y}{D}\right) - \exp\left(-\frac{2b}{D}\right) \right\} \dots\dots\dots(9)$$

右辺の第1項と第2項は式(7)とほぼ同じ意味をもつ。第3項は流路中心線に対する対称性の条件、第4項は $y = \pm b$ で水深 h がゼロとなる条件より付加された項である。式(9)の表現では H は中央水深とはならず、中央水深と H の関係は式(9)で $y=0$ とおくことにより、

$$\frac{h_{cl}}{H} = 1 - 2 \exp\left(-\frac{b}{D}\right) + \exp\left(-\frac{2b}{D}\right) \dots\dots\dots(10)$$

で与えられる。

式(9)の H, D は、流水半断面積が $a = \int_0^b h dy$ で表わされること、せん断力がゼロとなる水際で横断勾配角 θ が水中安息角、すなわち $\theta(b) = \phi$ をとることにより、 a, b, ϕ により一義的に決定される。したがって、流水断面積、水面幅、水中安息角が与えられると、式(9)

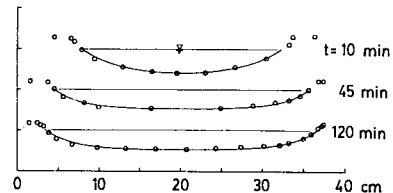


図-10 式(9)と実測形状の対応 (Run SW-1)

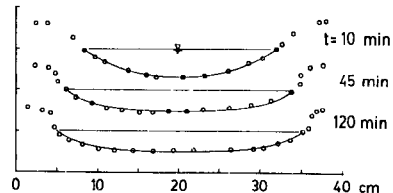


図-11 式(9)と実測形状の対応 (Run SW-2)

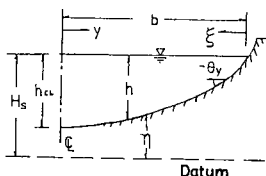


図-9 記号の定義

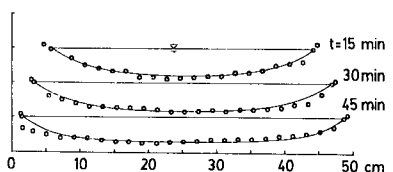


図-12 式(9)と実測形状の対応 (平野²⁾ Run 1)

により横断面形状を決定することができる。図-10, 11, 12は $\tan \phi = 0.75$ とし、実測の流水断面積、水面幅を与えて式(9)で計算される横断面形状と実測形状の比較を示したものである。Run SW-1については、拡幅段階によらず両者の対応は良好である。水面上の側岸高の高いRun SW-2については、波高の小さな交互砂州の影響で実測の横断面形状は対称とはならないが、この影響を取り除けば式(9)ではほぼ表現し得ると考えられる。平野²⁾のデータは、比較的急勾配(1/250)、大流量(4.2 l/s)のものであるため、実測の横断勾配は場所的に急変することがあるが、おおまかには式(9)に従っている。

3. 縦・横断勾配をもつ境界面上の掃流砂量式の誘導

横断面形状の時間変化がわかると、等流状態では流砂の連続式を横断方向に積分することにより横断方向流砂量が得られ、これと流砂量式よりせん断力の分布が得られることになる。そこで、水平床上でよく用いられる流砂量式をもとに、縦・横断勾配をもつ平面上の流砂量式をせん断力分布と関連づけて誘導する。斜面上の流砂量式は、平野²⁾、長谷川⁵⁾によりすでに導かれているが、これらは縦断勾配がゼロで、境界面のせん断力の作用方向が流下方向のみの場合である。ここではより一般的に、境界面が縦・横断勾配をもち、これに作用するせん断力の方向が任意である場合の掃流砂量式を導き¹⁰⁾、この式の適合性をせん断力分布が明らかな風洞内の斜面上の実測流砂量¹¹⁾により検証する。

図-13に縦・横断勾配をもつ斜面の模式図を示す。x軸は縦断方向水平軸、y軸は横断方向水平軸、z軸は鉛

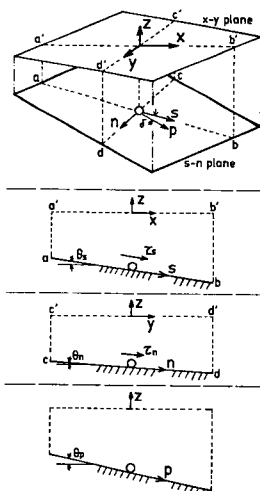


図-13 斜面の模式図

直上向きを正とする軸である。斜面とx-z平面の交線をs軸、斜面とy-z平面の交線をn軸とし、s-n平面内の最急勾配方向にp軸をとる。x軸とs軸の交角を θ_s 、y軸とn軸の交角を θ_n 、斜面の最急勾配角を θ_p で表わすと平坦な斜面の方程式は、

$$z_i = z_0 - x \cdot \tan \theta_s - y \cdot \tan \theta_n \dots \dots \dots (11)$$

で表わされる。s軸方向、n軸方向の単位ベクトルは、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} e_s &= (\cos \theta_s, 0, -\sin \theta_s) \\ e_n &= (0, \cos \theta_n, -\sin \theta_n) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

であり、両者の交角 γ について、

$$\cos \gamma = e_s \cdot e_n = \sin \theta_s \cdot \sin \theta_n \dots \dots \dots (13)$$

が成り立つため、 $\sin \theta_s \cdot \sin \theta_n \ll 1$ の条件のもとでは両者はほぼ直交する。このとき、s軸とp軸の交角を δ とみると、x、yとs、n、pの関係は、

$$x = s \cdot \cos \theta_s \div p \cdot \cos \delta \cdot \cos \theta_s \dots \dots \dots (14)$$

$$y = n \cdot \cos \theta_n \div p \cdot \sin \delta \cdot \cos \theta_n \dots \dots \dots (15)$$

となる。式(14)、(15)を式(11)に代入し、

$$\sin \theta_p = -\partial z_i / \partial p, \quad \partial (\sin \theta_p) / \partial \delta = 0$$

なる関係式を用いると、最急勾配の大きさとその方向は、それぞれ

$$\sin \theta_p = \sqrt{\sin^2 \theta_s + \sin^2 \theta_n} \dots \dots \dots (16)$$

$$\tan \delta = \sin \theta_n / \sin \theta_s \dots \dots \dots (17)$$

で表わされる。

このような縦・横断勾配をもつ斜面に、図-13、図-14に示す縦断方向せん断力 τ_s 、横断方向せん断力 τ_n が作用している状態を考える。この斜面上の砂粒子には、流れの掃流力 τ_s 、 τ_n のほかに砂粒子重量の斜面方向成分が付加的な掃流力として作用する。1個の砂粒子に作用する重量の斜面方向(p軸方向)の成分は、静水圧分布を仮定すると

$$F = \alpha_2 d^3 (\rho_s - \rho_0) g \sin \theta_p \dots \dots \dots (18)$$

である。掃流力に換算するために単位面積当たりの力で表わすと

$$\tau' = \alpha_2 / \alpha_1 (\rho_s - \rho_0) g d \sin \theta_p \dots \dots \dots (19)$$

となる。ここに、 ρ_s 、 ρ_0 はそれぞれ砂および流体の密度、 d は砂の粒径、 α_1 、 α_2 は砂粒子の占有面積および体積に関する係数である。

水平床上での移動限界状態においては、砂粒子と河床

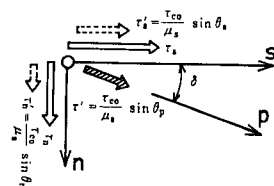


図-14 s-n 平面上の掃流力

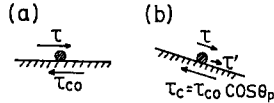


図-15 水平床、斜面上の移動限界状態

面間に作用する平均的なせん断力は、砂の水中静止摩擦係数を μ_s とすると、

$$\tau_{c0} = \mu_s \cdot a_2 / a_1 (\rho_s - \rho_0) g d \dots\dots\dots(20)$$

で表わされる。図-15(a) に示すように、流れのもつ掃流力 τ が τ_{c0} に等しい状態が移動限界状態であるため、 τ_{c0} を水平床上の限界掃流力と呼ぶ。一方、斜面上では砂粒子と河床面の平均的な垂直応力が水平床の場合の $\cos \theta_p$ 倍となるので、移動限界状態における砂粒子と河床面間に作用する平均的なせん断力は、

$$\tau_c = \mu_s a_2 / a_1 (\rho_s - \rho_0) g d \cos \theta_p = \tau_{c0} \cos \theta_p \dots\dots\dots(21)$$

となる。図-15(b) に示すように、斜面上においては流れのもつ掃流力 τ と砂粒子重量による付加的な掃流力 τ' の和（合掃流力）の絶対値が τ_c に等しい状態が移動限界状態であるため τ_c を斜面上の限界合掃流力と呼ぶことにする。通常はこの状態にある流れのもつ掃流力 τ を斜面上の限界掃流力と呼ぶが、この定義では掃流力の作用方向によりその値が異なるため、ここで述べるように水平床上の流砂量式と関連づけて斜面上の流砂量式を導くにあたっては、流れのもつ掃流力の作用方向によらず一定の値となる限界合掃流力の概念を取り入れる方が便利である。

図-15(a), (b) に示す水平床上および斜面上の砂粒子に作用する力を比較してみる。いま水平床上の流砂運動が τ と τ_{c0} だけに支配されるならば、水平床上の τ を斜面上の合掃流力の絶対値に、水平床上の限界掃流力 τ_{c0} を斜面上の限界合掃流力に置き換えれば両者の流砂運動はほぼ等価となると考えられる。すなわち、水平床上の流砂量が

$$q_{B0} = f_n(\tau, \tau_{c0}) \dots\dots\dots(22)$$

で表わされるならば、斜面上の流砂量は

$$q_B = f_n(|\tau + \tau'|, \tau_c) \dots\dots\dots(23)$$

で表わされることになる。流れのもつ掃流力 τ と砂粒子重量による付加的な掃流力 τ' の作用方向は一般には一致しないため、両者を s 方向、 n 方向の成分に分解し、その後合成して合掃流力の絶対値を算定する。

式 (19), (20) より、付加的な掃流力 τ' は

$$\tau' = \frac{\tau_{c0}}{\mu_s} \sin \theta_p \dots\dots\dots(24)$$

で表わされ、その作用方向は図-14の斜線入りの矢印が示すように p 軸方向である。式 (16), (17) を用いてこれを s 方向、 n 方向に分解すると、付加的な掃流力のそれぞれの方向の成分が次のように得られる。

$$\tau'_s = \tau' \cos \delta = \frac{\tau_{c0}}{\mu_s} \sin \theta_s \dots\dots\dots(25)$$

$$\tau'_n = \tau' \sin \delta = \frac{\tau_{c0}}{\mu_s} \sin \theta_n \dots\dots\dots(26)$$

したがって、合掃流力の絶対値は

$$|\tau + \tau'| = \sqrt{\left(\tau_s + \frac{\tau_{c0}}{\mu_s} \sin \theta_s\right)^2 + \left(\tau_n + \frac{\tau_{c0}}{\mu_s} \sin \theta_n\right)^2} \dots\dots\dots(27)$$

となる。また、式 (16) を用いると式 (21) の限界合掃流力は

$$\tau_c = \tau_{c0} \sqrt{1 - (\sin^2 \theta_s + \sin^2 \theta_n)} \dots\dots\dots(28)$$

となる。ここで、式 (22) で表現される水平床上の流砂量式として、Du-Boys タイプ、すなわち

$$\frac{q_{B0}}{\sqrt{(\rho_s/\rho_0 - 1) g d^3}} = K \tau_* (\tau_* - \tau_{*c0}) \dots\dots\dots(29)$$

を採用することにする。式 (22), (23) の関係式に式 (27), (28) を代入することにより、全流砂量（砂の移動方向の単位幅流砂量）は次式となる。

$$\frac{q_B}{\sqrt{(\rho_s/\rho_0 - 1) g d^3}} = K \cdot \sqrt{\left(\tau_{*s} + \frac{\tau_{*c0}}{\mu_s} \sin \theta_s\right)^2 + \left(\tau_{*n} + \frac{\tau_{*c0}}{\mu_s} \sin \theta_n\right)^2} \cdot \left\{ \sqrt{\left(\tau_{*s} + \frac{\tau_{*c0}}{\mu_s} \sin \theta_s\right)^2 + \left(\tau_{*n} + \frac{\tau_{*c0}}{\mu_s} \sin \theta_n\right)^2} - \tau_{*c0} \sqrt{1 - (\sin^2 \theta_s + \sin^2 \theta_n)} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

ここに、 K は比例定数であり、 τ_* は無次元掃流力 $\tau/(\rho_s - \rho_0) g d$ である。流砂量ベクトルの方向、すなわち砂粒子の移動方向は合掃流力ベクトルの方向に一致することを考慮して全流砂量を各成分に分解すると、縦断方向流砂量 q_{Bs} 、横断方向流砂量 q_{Bn} がそれぞれ次のように得られる。

$$\frac{q_{Bs}}{\sqrt{(\rho_s/\rho_0 - 1) g d^3}} = K \left(\tau_{*s} + \frac{\tau_{*c0}}{\mu_s} \sin \theta_s \right) \cdot \left\{ \sqrt{\left(\tau_{*s} + \frac{\tau_{*c0}}{\mu_s} \sin \theta_s\right)^2 + \left(\tau_{*n} + \frac{\tau_{*c0}}{\mu_s} \sin \theta_n\right)^2} - \tau_{*c0} \sqrt{1 - (\sin^2 \theta_s + \sin^2 \theta_n)} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

$$\frac{q_{Bn}}{\sqrt{(\rho_s/\rho_0 - 1) g d^3}} = K \left(\tau_{*n} + \frac{\tau_{*c0}}{\mu_s} \sin \theta_n \right) \cdot \left\{ \sqrt{\left(\tau_{*s} + \frac{\tau_{*c0}}{\mu_s} \sin \theta_s\right)^2 + \left(\tau_{*n} + \frac{\tau_{*c0}}{\mu_s} \sin \theta_n\right)^2} - \tau_{*c0} \sqrt{1 - (\sin^2 \theta_s + \sin^2 \theta_n)} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

$\tau_{*n} = 0, \theta_n = 0$ のとき、横断方向流砂量は、

$$\frac{q_{Bn}}{\sqrt{(\rho_s/\rho_0 - 1) g d^3}} \frac{1}{\sin \theta_n} = K \frac{\tau_{*c0}}{\mu_s} \cdot \left\{ \sqrt{\left(\frac{\tau_{*s}}{\tau_{*c0}}\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta_n}{\mu_s}\right)^2} - \cos \theta_n \right\} \dots\dots\dots(33)$$

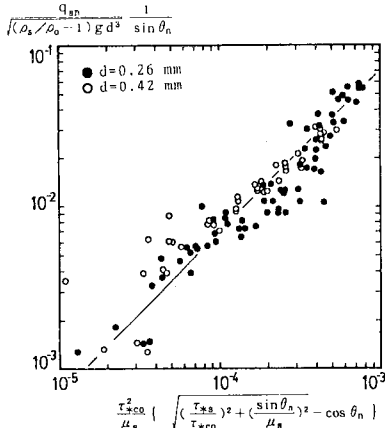


図-16 池田ら¹¹⁾の実測値と式(33)の対応

となり、この式は θ_n が小さいとき、平野の式²⁾

$$\frac{q_{bn}}{\sqrt{(\rho_s/\rho_0-1)gd^3} \tan \theta_n} = K' \frac{\tau_{*co}^{m+0.5}}{\mu_s'} \left(\frac{\tau_{*s}}{\tau_{*co}} - 1 \right)^m, \quad [m=1] \dots \dots \dots (34)$$

にはほぼ一致する。

図-16は、傾斜型風洞を用いて池田ら¹¹⁾が測定した横断方向流砂量と式(33)の関係を示したものである。

●印は $d=0.26 \text{ mm}$, $\tau_{*co}=0.0104$, $\mu_s=0.73$ の砂を、○印は $d=0.42 \text{ mm}$, $\tau_{*co}=0.0114$, $\mu_s=0.78$ の砂を用いた実験値である。実験値は掃流力の比較的小さなところまでほぼ1本の直線にのり、式(33)は横断勾配角($5^\circ \sim 30^\circ$)、掃流力の広い範囲にわたって斜面上の横断方向流砂量の実験結果をよく説明している。比例定数 K は、空気を用いた実験では約70となるが、流体が水の場合には、この値より小さな値をとることが見出されている¹²⁾。

ここで扱った流砂量は、ある control volume を考えたとき流砂の出入りが平衡し、河床面の位置が時間的に変動しない平衡流砂量である。河床変動を生じるような流砂運動は厳密には非平衡状態となり、上で述べたものと異なることになる。しかし、非平衡流砂量が平衡流砂量(考えている地点と同一の水利条件が無限に広がっている場合の流砂量)と異なる原因は流砂の運動履歴(主に慣性効果)にあると考えられるため、砂粒子速度が非常に小さい限界掃流力付近の流れや、合掃流力の場所的な変化が緩やかな流れで、流砂運動を支配する境界付近の流砂量がその地点の水利条件のみで決定されるとみなせる流れの場合には、砂粒子運動の慣性効果は無視でき、近似的に非平衡流砂量を平衡流砂量式で算定することが可能となる¹²⁾。本研究で扱う流れでは、合掃流力の場所的な変化があまり大きくなく、側岸付近の合掃流力が限界合掃流力に近い値をとると考えられる。さらに、合掃

流力が限界合掃流力となる水際において側岸からの給砂量がきわめて小さいことを前提とすると上記の条件を満足するため、解析には平衡流砂量式を用いることが可能である。

4. 流路境界面に作用するせん断力分布

横断面形状の時間的な変化、横断方向流砂量と河床せん断力の関係が明らかとなったので、流砂の連続式を用いてせん断力分布を算定することができる。この際、以下の条件が近似的に満足されるものとする。

- (i) 流路は直線で、流れおよび拡幅の状況は流下方向に一様である。
- (ii) 流水断面積は時間的に変化しない。
- (iii) 水面より上部に突き出した側岸部はなく、したがって水際からの給砂はない。

実測された流水断面積は拡幅の進行に伴って増大する傾向にあるが、その増加分はきわめて小さいため、考えている時間内では(ii)の条件がほぼ成り立つ。(iii)の条件は実験では厳密には満足されないが、水面より上部の側岸が高い場合や、水際からの給砂がある場合には、水際付近の流砂運動に対して先に導いた流砂量式が適用できなくなるために設けた条件である。したがってこれ以降に述べる解析は、本実験のうち、水面上の側岸高が比較的小さい Run SW-1 に対しては適用することができるが、Run SW-2 への適用は誤差を含むことになる。

(i)、(ii)、(iii)の条件より、水位は時間的に変化せず、また流れは等流状態であるため、流砂の連続式は簡単に、

$$-\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_{bv}}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (35)$$

となる。(iii)の条件のもとに式(35)を横断方向に積分することにより、各点の横断方向流砂量が

$$q_{bv} = (1-\lambda) \int_b^y \frac{\partial h}{\partial t} dy \dots \dots \dots (36)$$

で表わされる。横断面形状を示す式(9)の両辺を時間微分して式(36)に代入すると、横断方向流砂量は

$$q_{bv} = (1-\lambda) \left[\left\{ -1 + e^{-\frac{b-y}{D}} - e^{-\frac{b+y}{D}} + \left(1 + 2 \frac{b-y}{D} \right) \cdot e^{-\frac{2b}{D}} \right\} H \frac{db}{dt} + \left\{ \left(1 - \frac{b-y}{D} \right) - e^{-\frac{b-y}{D}} + e^{-\frac{b+y}{D}} - \left(1 + \frac{b-y}{D} \right) e^{-\frac{2b}{D}} \right\} D \frac{dH}{dt} + \left\{ 1 - \left(1 + \frac{b-y}{D} \right) \cdot e^{-\frac{b-y}{D}} + \left(1 + \frac{b+y}{D} \right) e^{-\frac{b+y}{D}} - \left(1 + 2 \frac{b}{D} + 2 \frac{b-y}{D^2} \right) e^{-\frac{2b}{D}} \right\} H \frac{dD}{dt} \right] \dots \dots \dots (37)$$

で与えられる。上式中には、水面半幅 b の時間変化項のほかに dH/dt , dD/dt が含まれるが、流水断面積

が時間的に変化せず、水際で水中安息角となる条件を用いると、横断面形状の定式化で述べたと同様にして、両者は db/dt によって表わすことが可能である。したがって、 $a, b, \phi, db/dt$ が与えられると式 (37) により各地点の横断方向流砂量が算定される。

先に導いた流砂量式は、 $s-n$ 平面を基準として表わしたが、この平面に平行でない平面を基準とした流砂量はこれと異なるため、両者の関係をつける必要がある。流砂量は単位幅当たりの輸送量を表わすため、両者には、

$$\left. \begin{aligned} q_{Bx} \cdot dy &= q_{Bs} \cdot dn \\ q_{By} \cdot dx &= q_{Bn} \cdot ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

の関係が成り立つ。式 (14), (15) より、 $dy/dn = \cos \theta_n$, $dx/ds = \cos \theta_s$ となるため、上式は

$$\left. \begin{aligned} q_{Bs} &= q_{Bx} \cdot \cos \theta_n \\ q_{Bn} &= q_{By} \cdot \cos \theta_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

で表わされる。縦断勾配がきわめて小さい場合には $\cos \theta_s = 1$ となり、式 (33) の添字 n は添字 y に書き換えることができる。

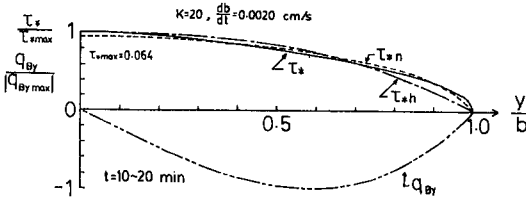
$$q_{By} = K \sqrt{(\rho_s/\rho_0 - 1)gd^3} \frac{\tau_{*co}}{\mu_s} \sin \theta_y \cdot \left[\sqrt{\tau_*^2 + \left(\frac{\tau_{*co}}{\mu_s} \sin \theta_y \right)^2} - \tau_{*co} \cos \theta_y \right] \dots\dots(40)$$

式中の横断勾配角 θ_y は、式 (9) を用いて、

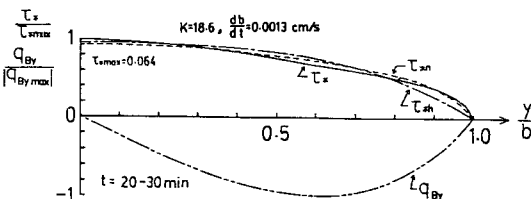
$$\tan \theta_y = \frac{\partial h}{\partial y} \dots\dots\dots(41)$$

で与えられる。

式 (37), (40) より、拡幅速度 db/dt が与えられるとせん断力の分布が算定できる。図—17, 図—18 は、実測された拡幅速度を与えて、式 (37) より計算された



図—17 横断方向流砂量とせん断力の分布 (Run SW-1 $t=10 \sim 20$ min)



図—18 横断方向流砂量とせん断力の分布 (Run SW-1 $t=20 \sim 30$ min)

横断方向流砂量 (二点鎖線) と、式 (37), (40) より計算された無次元せん断力 (実線) の分布を示す。流砂量式の比例定数 K は、せん断力の総和が $\rho_0 g a i_0$ に等しくなるように定める。このせん断力分布が横断面形状とどのような対応関係にあるかを検討する。同図中の一点鎖線は $\tau_h = \rho_0 g h i_0 \cdot \cos \theta_y$ により算定した無次元せん断力 τ_{*h} の分布を示すが、実際のせん断力分布 τ_* は側岸付近で τ_{*h} より大きくなる^{4), 13)}。これは次の理由による。 τ_{*h} を算定するための断面分割法では、図—19 に示す鉛直分割面 I に流体間のせん断力が作用しないと仮定し、重力とのつり合い式よりせん断力を算定するが、実際には横断的な速度差に起因して I の分割面にせん断力が働くため、境界面に作用するせん断力はこのような分布にはならない。厳密なせん断力分布は、流れを記述する方程式を解いて等流速線を探し、これに直交する断面分割 (図—19 の II) の方法により算定すればよいが、これはきわめて煩雑であり¹⁴⁾、方程式自体にも問題が残されている。そこで澤井・芦田⁴⁾ が示した比較的容易な方法を応用することにする。すなわち、澤井らは、せん断力の分布を断面分割面 III に示すような境界面の法線群による分割法により求め、これらの法線群が断面内で交わる場合も含め、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau}{\rho_0 g H_s i_0} &= \left[1 + \left(\frac{d\eta}{dy} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2 \eta}{dy^2} \cdot H_s F' \right] F' \cos \theta_y \\ F' &= \min \left[1 - \frac{\eta}{H_s}, \left(\frac{y}{H_s} - \frac{y_0}{H_s} \right) \frac{dy}{d\eta} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42 \cdot a)$$

で表わした。法線群が断面内で交わらないとき、上式は次式のように簡単化される。

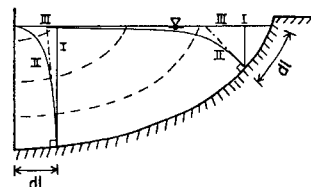
$$\tau = \rho_0 g h i_0 \cos \theta_y \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} h \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \dots\dots(42 \cdot b)$$

しかし、このような分割法においてもなお、分割面にせん断力が作用すると考えられるため、ここで、微小潤辺が分担する断面積を補正する係数 α を導入する。

$$\tau_n = \rho_0 g h i_0 \cos \theta_y \left[1 + \alpha \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} h \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right\} \right] \dots\dots\dots(43)$$

補正係数のかかった項の積分値は、恒等的に

$$\int_0^b h \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} h \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right\} dy = 0 \dots\dots\dots(44)$$



図—19 種々の断面分割面

となるため、どのような補正係数を用いても

$$\int_0^b \tau_n \frac{dy}{\cos \theta_y} = \rho_0 g a i_0 \dots \dots \dots (45)$$

が満足される。式 (43) において $\alpha=0$ は図-19 の I の分割法に対応し、 $\alpha=1$ が III の分割法に対応する。すなわち、 α が大きいほど流路中央部の分担断面積を小さくし、側岸部のそれを大きくする。図-19 より、II の分割法によるせん断力分布は $\alpha > 1$ の補正係数を必要とすることがわかる。横断面形状の変化過程より求められたせん断力分布 τ_* を式 (43) より得られる τ_{*n} で近似すると、図-17、図-18 に示すように、 $\alpha=2$ 程度の補正係数を用いたとき、拡幅に支配的な側岸部付近では、 τ_* と τ_{*n} の対応が最もよい。補正係数 α の値は流れの乱流強度、断面の幾何形状によってやや異なると考えられるが、本実験では他の拡幅段階においても同様の解析により $\alpha=2$ が得られている。すなわち、せん断力分布は次式で与えられる。

$$\tau_n = \rho_0 g h i_0 \cos \theta_y \left\{ 1 + 2 \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + h \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right\} \dots \dots \dots (46)$$

また、流砂量式の定数 K は、種々の拡幅段階においてもほぼ $K=20$ となる。このように、計算条件をほぼ満足する Run SW-1 については、本解析により流路境界面に作用するせん断力の分布が明らかになったが、Run SW-2 についても、水理条件が同一であり横断面形状が式 (9) でほぼ表現できることから、断面分割法線群は水中で交わることなく、せん断力の分布を式 (46) で算定できると考えられる。

5. 直線流路の拡幅過程の解析

流路の境界面に作用するせん断力の分布が明らかとなったので、流路の横断面を側岸領域と河床領域に分割することなしに拡幅の解析を行う。解析で用いる仮定は、前節の条件 (i)、(ii)、(iii) と同様である。流路の横断面形状を式 (9) で与え、流砂の連続式を $dH_s/dt=0$ 、 $da/dt=0$ 、 $q_{sy}(b)=0$ 、 $\theta_y(b)=\phi$ の条件のもとに積分すると、式 (37) と同様にして、横断方向流砂量の分布がさらに流砂量式 (40) を用いると無次元せん断力 τ_* の分布が拡幅速度 db/dt と横断方向座標 y の関数として表わされる。一方、横断面形状が与えられると式 (46) によりせん断力分布が算定される。この2つのせん断力は本来すべての地点で一致しなければならないが、式 (46) は近似式であるため、どのような拡幅速度を選んでも両者がすべての地点で一致することはない。そこで、流路全体としてせん断力の誤差が最小となるように拡幅速度を決定する。微小時間経過後の水面幅は差分計算によって求める。

図-21 は、実測された Run SW-1 の水面幅 (○印)、

中央水深 (①印) の時間変化と解析結果 (実線) の対応を示す。計算に用いた係数は $K=20$ であり、与えた流水断面積はそれ以後の変化があまり大きくない $t=20$ min のもの、初期条件はこの時刻の水面幅である。中央水深は式 (10) により算定する。計算では流水断面積を一定と仮定しているため、与えた流水断面積との差が大きくなるところで拡幅速度が実測のものよりやや小さく、また同様の理由により、同一水路幅時の中央水深は計算値の方がやや小さくなるが、実験値と計算結果の対応は良好である。

図-22 は、この解析法を側岸高の高い Run SW-2 に適用した結果を示す。 $t=30$ min の値で与えた初期条件

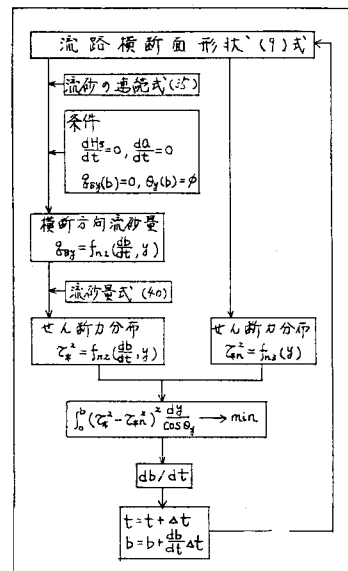


図-20 拡幅過程の解析の流れ図

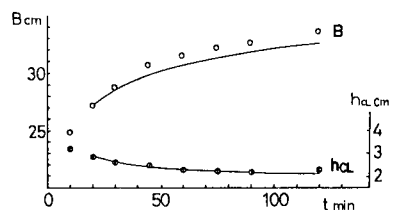


図-21 解析結果と実測値の比較 (Run SW-1)

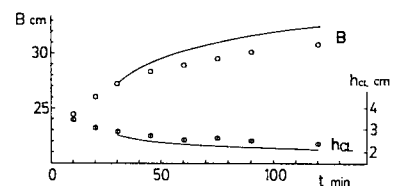


図-22 解析結果と実測値の比較 ((iii) の仮定を必ずしも満足しない Run SW-2)

が上の計算例の初期条件とはほぼ同じであるため、計算された水面幅、中央水深の時間変化は上の計算例とほとんど変わらない。しかし、Run SW-2では、解析に用いた仮定のうち特に水面上の側岸高についての仮定が満足されないため、実測の拡幅量に比し、計算された拡幅量のほうが大きくなる。このような条件に対しても、精度の高い解析を行うためには、側岸付近の横断方向流砂量に及ぼす水面上の側岸からの給砂効果を合理的に解析のなかに取り入れる必要がある。

6. 結 語

本研究は、直線流路の境界面に作用するせん断力の分布を明らかにすることを主目的として、せん断力分布と拡幅機構に理論的考察を加えたもので、以下のことが明らかとなった。

(1) 流路の拡幅は、境界面の横断勾配、せん断力分布の影響を受けて、側岸の侵食、侵食砂の河床への堆積を繰り返して進行する。水面上の側岸高が高くなると、水際からの給砂効果、水際付近の砂粒子間に作用する垂直応力の増加の影響により側岸が侵食されにくくなり、拡幅の進行が遅くなる。

(2) 拡幅過程にある流路の横断面形状は式(9)により表現される。側岸天端高の違いにより水面上の側岸形状は異なるが、水面下の横断面形状に及ぼす影響は無視できる。

(3) 横断面形状の時間的な変化は流砂量の場所的な変化により生じることから縦・横断勾配をもつ境界面上の流砂量式について検討した。このような境界面上の流砂量式は、水平床上の流砂量式をもとに、砂粒子重量の斜面方向成分を付加的な掃流力として考慮することにより導かれる。この式と実測値の対応はよい。

(4) 実験的に得られた横断面形状の変化過程より横断方向流砂量を求め、流砂量式を用いてせん断力の分布を算定した。側岸付近のせん断力は、その場の水深を用いて算定される $\tau_n = \rho_0 g h_i \cos \theta_y$ より大きくなり、算定されたせん断力の分布は、境界面の法線群を用いた断面分割法によるせん断力分布式に補正係数 $\alpha=2$ を導入した式(46)により横断面形状と対応づけられる。

(5) 境界面に作用するせん断力の分布が明らかとなったことにより、流路の境界面を側岸領域と河床領域に分割することなく、拡幅過程の解析を行うことが可能

となり、解析結果は水面上の側岸高が低い場合の実験結果をよく説明し得る。

謝 辞：九州大学の平野宗夫教授には貴重な実験データの提供をいただいた。また米国 Minnesota 大学の Gary Parker 教授には斜面上の流砂運動に関して有意義な議論をいただいた。記して両氏に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 委員会報告、洪水流の三次元流況と流路形態に関する研究、土木学会論文集、第345号/II-1, pp.41~52, 1984, または、土木学会水理委員会「洪水流の三次元流況と流路形態」研究小委員会報告、(代表者芦田和男), 1982.
- 2) 平野宗夫：拡幅を伴う流路変動について、土木学会論文報告集、第210号, pp.13~20, 1973.
- 3) 藤田裕一郎：沖積河川の流路変動に関する基礎的研究、京都大学博士論文, 1980.
- 4) 澤井健二・芦田和男：粘性流路の侵食と横断形状に関する研究、土木学会論文報告集、第266号, pp.73~86, 1977.
- 5) 長谷川和義：非平衡性を考慮した側岸侵食量式に関する研究、土木学会論文報告集、第316号, pp.37~50, 1981.
- 6) Ippen, A. T. and Drinker, P. A. : Boundary Shear Stresses in Curved Trapezoidal Channels, Proc. ASCE, Vol. 88, HY 5, pp.143~179, 1962.
- 7) 竹内 聡・福岡捷二・山坂昌成・山口寛之：流路の拡幅と河床形態に及ぼす平面曲がりの影響、第38回土木学会年次学術講演会講演概要集、II-285, pp.569~570, 1983.
- 8) 藤田裕一郎：直線流路の側岸侵食機構、京都大学防災研究所年報、第22号B-2, pp.537~552, 1979.
- 9) Ikeda, S. : Self-Formed Straight Channels in Sandy Beds, Proc. ASCE, Vol.107, HY 4, pp.389~406, 1981.
- 10) 福岡捷二・山坂昌成：直線流路の交互砂州、第27回水理講演会論文集、pp.703~708, 1983.
- 11) 池田駿介・宮下修一：斜面における砂の移動について、第25回水理講演会論文集、pp.55~60, 1981.
- 12) 福岡捷二・山坂昌成・安陪和雄：強い非平衡流砂運動を伴う河床変動、第28回水理講演会論文集、pp.679~684, 1984.
- 13) 福岡捷二・山坂昌成・竹内 聡：湾曲流路の側岸侵食、第27回水理講演会論文集、pp.721~726, 1983.
- 14) Lundgren, H. and Jonsson, I. G. : Shear and Velocity Distribution in Shallow Channels, Proc. ASCE, Vol. 90, HY 1, pp.1~21, 1964.

(1984. 5. 14・受付)