

非定常非圧縮粘性流れの有限要素方程式の解法

A SOLUTION PROCEDURE FOR THE FINITE ELEMENT EQUATIONS OF TRANSIENT, INCOMPRESSIBLE, VISCOUS FLOWS

吉田 裕*・野村卓史**・菅野良一***

By Yutaka YOSHIDA, Takashi NOMURA and Ryoichi KANNO

A numerical procedure is proposed for the transient analysis of incompressible, viscous flows. The velocity and the pressure are the solution variables in the finite element discretization. The procedure is based on the direct time integration method developed by the authors. A system of recurrence equations representing the evolution of the velocities and the pressures under the incompressibility constraint is derived. An iteration process as to the convergence of the nonlinear terms is performed in every integration step. Any artificial parameters are not introduced into the solution procedure. The features of the proposed method are verified on two cases of numerical analysis, one of which is vortex shedding behind a square cylinder. The resulting velocity distribution satisfies the continuity condition strictly.

1. はじめに

非圧縮粘性流体の非定常流れの特性を知ることが、問題を解決するための鍵となる場合が、工学、理学の幅広い分野に数多く存在する。したがって、この問題の信頼できる数値解析法を構成することを目的とした研究が精力的に積み重ねられてきている。非圧縮の連続条件が特異な制約条件であるため、これを満足する解をいかにして得るかという点が重要な問題である。この問題に対処する1つの方法は、流れ関数あるいは流れ関数と渦度とを変数として導入して非圧縮条件を満足する方程式を解析法の基礎とすることであり、二次元問題の場合によく用いられる。しかし、これらの変数によって解析対象に関する諸条件を設定するときには、たとえばすべりなしの境界条件のように、本来の変数である流速によれば明確に表わされる条件が陽に記述されないというような、変数が直接的でないことに起因する問題が生ずる。その結果、このような条件を解析過程を通じて考慮する

手立てが必要となり、そのための手法が解の精度に影響する要因になる。これに対して流速と圧力とを変数とする解析法の場合には、このような手立てを特別に講ずることなく直接的に境界条件を取り扱うことができるため、三次元問題を含むより広い範囲の問題を解析することができる。特に有限要素法に基づく解析法によれば、境界形状あるいは外力や流速に関する諸条件が種々に異なった流れに対して汎用的に適用できる解析システムを構成することが可能となる。したがって流速と圧力とを変数とする有限要素法による、信頼性の高い汎用的な解析過程を開発することの意義が大きいと認識されており、さまざまな試みが活発に展開されている^{1)~14)}。

解析過程の基礎とする有限要素方程式については、連続条件が流速に対する制約条件である一方で、実際の解析過程において圧力を求めるための方程式として機能するため、流速と圧力との補間関数の組合せ方は任意でなく、組合せの選び方によっては、たとえば流速の解は妥当であっても圧力の解は正しく求まらないというような問題が生ずる⁹⁾。運動方程式において流速の2回微分に対応する物理量と圧力の1回微分とが対応しているところから、流速の補間関数を圧力の補間関数より一次高くとることが自然な組合せであると考えられる。しかし有限要素方程式の誘導過程は、節点や節点変数の設定の

* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科
(〒152 目黒区大岡山2-12-1)

** 正会員 工博 東京工業大学助手 工学部土木工学科
(同上)

*** 正会員 工修 新日本製鐵(株)(研究当時東京工業大学
大学院修士課程学生)

仕方、補間関数の選択、定式過程などの違いによりさまざまな結果を可能にするため、流速と圧力との補間の仕方の違いが解に与える影響に関して、種々の議論がなされている^{10)~13)}。

非定常流れを対象とする解析過程については、非圧縮条件を満足させ、さらに非線形項を評価しなければならないので、離散化された運動方程式と連続条件式とを連立させて、そのまま厳しく解き進めていくことには相当な困難が伴うことになり、決定的といえる方法はいまだ確立されていない。通常とられている方法においては、数値的な厳しさを、採用する時間積分公式の曖昧さの中に埋没させることによって解法を成立させたり^{2),3)}、penalty 関数法のように数値的に微小な圧縮性を導入することによって対処したり^{4)~7)}している。このような解法においては、たとえば penalty 関数法におけるパラメーターを大きくとりすぎると当然数値的な厳しさが復活することになるし、小さくとりすぎると得られる解は目的とする解とは大きく掛け離れたものとなってしまふ、といった問題点が残される。また、対流項が非線形であることに起因するスキームの不安定化に対処することを目的として、流れの方向に応じて重み関数を変化させる風上要素なども提案されている^{7),14)}が、このような要素を導入することによって付加される数値的粘性については未解明の点が多い。

著者らは、付加的な判断を必要とする不明確なパラメーターを含めず、また現象の変化に対応してアルゴリズムを変化させる、といった手立てを用いる必要のない解析過程を構成すべく研究を進め、著者ら自身の開発した高精度な時間積分法¹⁵⁾に基づいて構成した解法を提案し、この方法によって非圧縮の連続条件を厳しく満たす流速分布を求めることができることを示した¹⁶⁾。用いた有限要素は、流速に対して要素内線形分布の3角形要素、圧力を要素の中心で評価するものである。しかしこの方法の開発にあたっては、非圧縮の連続条件を満足する解を求めることを最優先させたために、解析過程に逆行列を含む結果となった。したがって、解析に必要な計算機の記憶容量は多大なものとなり、相当大型の計算機を用いる場合でも、物体背後に渦列を生じるような現象の解析は困難であった。

その後、著者らは先に提案した解法の基本的な長所を損なうことなく、より大きな自由度の問題を解析することが可能なアルゴリズムの開発を目差して研究を進めてきた。本論文は上述した経緯を経て構成した、実質的に全く新しい解析過程について報告するものである。この方法においても連立一次方程式を解くことは必要となるが、逆行列計算を行う場合に比べて必要とする記憶容量ははるかに少なくすむ。したがって解法の検証のため

に示した計算例でもわかるように、相当大きな自由度の非定常流れの問題の解析が可能となった。また、この解法の大きな特色は付加的な判断を必要とする不明確なパラメーターをいっさい含んでいないこと、および現象の変化に伴ってアルゴリズムを変化させるといった手立てをいっさい必要としないことである。なお、本論文では二次元問題を対象として解析過程を展開しているが、流速と圧力とを変数としている方法であるため、要素を変えるだけでこれを三次元問題の解析へ適用することが可能である。

2. 有限要素方程式

本論文で提案する解析過程は、通常のリキ残差法に基づく有限要素法によって離散化された Navier-Stokes 運動方程式：

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{K}_p\mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad \dot{\mathbf{u}} = d\mathbf{u}/dt \quad (1)$$

および連続条件式：

$$\mathbf{K}_v^T \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2)$$

を対象とするものである。流速 \mathbf{u} に関する補間関数を \mathbf{N}_u 、圧力 p に関する補間関数を \mathbf{N}_p で表わすと、各係数マトリックスは以下ようになる。

$$\mathbf{M} = \iint_{\Omega} \rho \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u d\Omega \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \iint_{\Omega} \rho \mathbf{N}_u^T |\nabla(\mathbf{N}_u \mathbf{u})|^T \mathbf{N}_u d\Omega \quad (4)$$

$$\mathbf{K} = \iint_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{N}_u d\Omega \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_p = \iint_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{L}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (6)$$

$$\mathbf{f} = \iint_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (7)$$

ここで解析対象領域 Ω の境界は、力が規定されている境界 Γ_σ と流速が規定されている境界 Γ_u とに分けられている。 \mathbf{M} は密度 ρ に関するマトリックス、 $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u})$ は対流項に関する非線形マトリックス、 \mathbf{K} は粘性 μ に関するマトリックス、 \mathbf{K}_p は空間に関する勾配を表わすマトリックスである。 \mathbf{f} は物体力 $\mathbf{b} = \langle b_x b_y \rangle^T$ 、および境界 Γ_σ 上で与えられている境界力 $\bar{\mathbf{t}} = \langle \bar{t}_x \bar{t}_y \rangle^T$ から得られる節点力のベクトルである。また、以下の諸関係を用いている。

$$\nabla = \langle \partial/\partial x \quad \partial/\partial y \rangle^T \quad (8)$$

$$\mathbf{D} = \mu \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{m} = \langle -1 \quad -1 \quad 0 \rangle^T \quad (10)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

流速ベクトル \mathbf{u} は Γ_u 上の既知成分 $\bar{\mathbf{u}}^a$ と、それ以外の未知成分 \mathbf{u}^a とに分けられる。すなわち

$$\mathbf{u}^T = \langle \mathbf{u}^{\alpha T} \quad \mathbf{u}^{\beta T} \rangle \dots \dots \dots (12)$$

これと対応して、節点力ベクトル \mathbf{f} は既知成分 $\bar{\mathbf{f}}^\alpha$ と Γ_u 上の未知反力成分 \mathbf{f}^β とに分けられる。

$$\mathbf{f}^T = \langle \bar{\mathbf{f}}^{\alpha T} \quad \mathbf{f}^{\beta T} \rangle \dots \dots \dots (13)$$

力に関する境界条件は $\bar{\mathbf{f}}^\alpha$ によって規定する。また、式 (12) の定義から明らかなように、連続条件式 (2) は既知流速成分 $\bar{\mathbf{u}}^\alpha$ も対象に含めた制約条件である。

本研究では、流速を通常用いられる最も簡単な要素内線形分布の3角形要素によって離散化し、圧力を要素ごとに導入される変数で要素内一定とした。このとき、式 (1), (2) における \mathbf{K}_p の関係から、連続条件式 (2) は各要素ごとの流速分布に関する制約条件となる。

3. 時間積分公式

運動方程式 (1) に対して、著者らが開発した独自の積分公式¹⁵⁾を適用する。この積分公式は、時間方向に有限要素技法を適用し、1つの積分時間間隔内の変数の時間変化を1つの時間要素によって表現するものである。その内容についてはすでに発表しているところであるが、以下の展開に必要な事項をここにまとめて示す。

積分公式は次式で代表される1階の連立常微分方程式の初期値問題を対象としている。

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{r} \dots \dots \dots (14)$$

ここで $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ であるが \mathbf{K} にはその制約はない。 \mathbf{r} は時間変化が既知の外乱項のベクトルである。式 (14) に積分公式を適用すると、変数 \mathbf{u} の時刻 t_i から t_{i+1} ($= t_i + \Delta t$) に至る1stepの積分は、次のような2つの方程式で表わされる。

$$\Lambda_p \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{M}\mathbf{u}_i + \mathbf{r}_{i+1,d} \dots \dots \dots (15)$$

$$\mathbf{M}\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1,d} - \Lambda_q \boldsymbol{\varphi} \dots \dots \dots (16)$$

ここで $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}|_{t_i}$ および

$$\Lambda_p = \frac{\Delta t}{3} \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}^T + \frac{1}{2}(\mathbf{K}^T + \mathbf{K}) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} \dots \dots \dots (17)$$

$$\Lambda_q = \frac{\Delta t}{6} \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}^T + \frac{1}{2}(\mathbf{K}^T - \mathbf{K}) - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} \dots \dots \dots (18)$$

$\mathbf{r}_{i+1,d}$ と \mathbf{r}_{i+1} は時刻 t_i から t_{i+1} の間で外乱 \mathbf{r} が \mathbf{r}_i ($= \mathbf{r}|_{t_i}$) から \mathbf{r}_{i+1} へ直線変化すると仮定して得られる等価節点外乱のベクトルで、具体的には次式で表わされる。

$$\mathbf{r}_{i+1} = \frac{\Delta t}{6} (2\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1}) \dots \dots \dots (19)$$

$$\mathbf{r}_{i+1,d} = \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{r}_i + 2\mathbf{r}_{i+1}) \dots \dots \dots (20)$$

$\boldsymbol{\varphi}$ は積分公式を定式化するときに変分原理に基づいて導入した変数のベクトルであるが、式 (15), (16) においては媒介変数として機能するものである。すなわち、1stepの積分計算は次のような2段階の計算過程から構成される。

① 式 (15) の右辺の各項はそれぞれの step において既知である。この方程式を解いて変数 $\boldsymbol{\varphi}$ を求める。

② 得られた $\boldsymbol{\varphi}$ を式 (16) に代入し、この方程式を解いて \mathbf{u}_{i+1} を求める。

以上の2段階の計算を、与えられた初期条件のもとで step-by-step に繰り返すことによって積分計算を進める。

4. 時間積分公式の適用

運動方程式 (1) に時間積分公式 (15), (16) を適用するに際して、非線形項 $\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u}$ と圧力項 $\mathbf{K}_p\mathbf{p}$ を右辺に移項し、外力項 \mathbf{f} と合わせてこれらを外乱として扱うことにする。すなわち、

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} - \mathbf{K}_p\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u} \equiv \mathbf{r} \dots \dots \dots (21)$$

式 (21) に対して積分公式を適用した場合には、積分公式 (15), (16) の作用素に関するマトリックス Λ_p, Λ_q は定数係数マトリックス \mathbf{M}, \mathbf{K} のみから構成されることになり、積分時間間隔 Δt を変えない限り積分計算の過程で1度だけ作成すればすむことになるためである。また、圧力項、非線形項の時間変化は、式 (19), (20) に示した等価節点外乱として明確に評価することができる。

通常の解法では、式 (21) の左辺に含まれる既知流速成分 $\bar{\mathbf{u}}^\alpha$ に関する項を移項し方程式を縮約したうえで積分公式が適用されるが、ここではそのような縮約を行わず、式 (21) の形のままで積分公式を適用する。つまり、 $\bar{\mathbf{u}}^\alpha, \bar{\mathbf{u}}^\beta$ に関する項を外乱項として扱わずに、 $\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{u}^\beta$ に関する項と同等に取り扱う。その結果、 $\bar{\mathbf{u}}^\alpha, \bar{\mathbf{u}}^\beta$ に関する係数マトリックスをも含んだ積分作用素が作成され、対象領域全体に対して精度的に統一のとれた漸化関係式を導くことができる。すなわち、時刻 t_i から t_{i+1} ($= t_i + \Delta t$) への積分 step に関して、形のうえでは式 (15) から (20) までと同じ式で表わされる一連の関係式が得られる。ただし、

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{K}_p\mathbf{p}_i - \tilde{\mathbf{K}}_i\mathbf{u}_i \quad \text{at } t = t_i \dots \dots \dots (22)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_i = \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u}_i) \dots \dots \dots (23)$$

このとき式 (15), (16) の右辺の $\mathbf{r}_{i+1,d}, \mathbf{r}_{i+1}$ には時刻 t_{i+1} における未知量 $\mathbf{f}_{i+1}, \mathbf{p}_{i+1}, \tilde{\mathbf{K}}_{i+1}\mathbf{u}_{i+1}$ が含まれることになる。連続条件を介してこれらの項を求める過程を5. 以下で示す。

縮約を行っていないこと、および積分 step の始端 t_i における流速 \mathbf{u}_i がすでに連続条件を満足しているという前提によれば、各 step で満たされるべき連続条件式は次式となる。

$$\mathbf{K}_p^T \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{0} \dots \dots \dots (24)$$

5. 漸化関係式

式 (19), (20) および (22) の定義に従って、時刻

t_i と t_{i+1} とにおける項が明確に区別されるように式 (15), (16) を改めて示す.

$$\Lambda_p \varphi = M u_i + \frac{\Delta t}{3} r_i + \frac{\Delta t}{6} (f_{i+1} - K_p p_{i+1} - \tilde{K}_{i+1} u_{i+1}) \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$M u_{i+1} = \frac{\Delta t}{6} r_i + \frac{\Delta t}{3} (f_{i+1} - K_p p_{i+1} - \tilde{K}_{i+1} u_{i+1}) - \Lambda_q \varphi \quad \dots\dots\dots (26)$$

連続条件式 (24) を式 (26) の流速 u_{i+1} に課してこれを消去すると, 次の方程式が得られる.

$$\frac{\Delta t}{3} K_p^T M^{-1} K_p p_{i+1} = K_p^T M^{-1} \left[\frac{\Delta t}{6} r_i + \frac{\Delta t}{3} (f_{i+1} - \tilde{K}_{i+1} u_{i+1}) - \Lambda_q \varphi \right] \quad \dots\dots\dots (27)$$

式 (25) と (27) は媒介変数 φ を介して表わされた, 時刻 t_i から t_{i+1} への圧力変化に関する漸化関係式である. 式 (27) の圧力 p_{i+1} は連続条件を満足する流速に対応するものであるから, 式 (25), (27) から得られた圧力 p_{i+1} を式 (26) に代入することにより連続条件を満足する流速 u_{i+1} が求められる. しかし式 (25)~(27) の右辺の f_{i+1} は式 (13) に示した未知反力ベクトル f^a を含んでおり, これを消去する必要がある. そこで式 (12), (13) で用いた定義に従って式 (28) を未知流速の自由度に関する部分と既知流速に関する部分とに区別して示す.

$$\begin{bmatrix} M^{\alpha\alpha} & M^{\alpha\beta} \\ M^{\beta\alpha} & M^{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i+1}^{\alpha} \\ u_{i+1}^{\beta} \end{Bmatrix} = \frac{\Delta t}{6} \begin{Bmatrix} r_i^{\alpha} \\ r_i^{\beta} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{3} \begin{Bmatrix} \bar{f}_{i+1}^{\alpha} \\ f_{i+1}^{\beta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K_p^{\alpha} \\ K_p^{\beta} \end{bmatrix} p_{i+1} - \begin{bmatrix} \tilde{K}_{i+1}^{\alpha} \\ \tilde{K}_{i+1}^{\beta} \end{bmatrix} u_{i+1} - \begin{bmatrix} \Lambda_q^{\alpha} \\ \Lambda_q^{\beta} \end{bmatrix} \varphi \quad \dots\dots (28)$$

いま, 密度に関するマトリックス M に lumped mass の近似を導入する. すなわち,

$$M_i \equiv \begin{bmatrix} M_i^{\alpha} & 0 \\ 0 & M_i^{\beta} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで, M_i^{α} , M_i^{β} は対角マトリックスである. この近似を用いた理由は次の2つである.

① 以下に具体的に示すように, この近似を導入することによって式 (28) を未知反力項 f_{i+1}^a に関する方程式と未知流速項 u_{i+1}^a に関する方程式とに分離することができ, 反力項 f_{i+1}^a の消去が可能となる.

② Λ_p , Λ_q に含まれているマトリックス $K M^{-1} K^T$ および式 (27) に現われるマトリックス $K_i^T M^{-1} K_p$ には逆行列 M^{-1} が含まれているが, これらのマトリックスを作成するときにフルマトリックスの記憶領域を確保する必要がなくなる.

マトリックス M を lumping することの影響について, consistent mass の場合と比べて精度の点で不利であるという議論もある²⁾が, ここでは lumping によって上述の2つの問題が解決し, その結果連立方程式を解く

過程だけで解を得ることのできるアルゴリズムが実現するという解法上の利点を優先させている.

lumped mass M_i を用いると, 式 (28) は次のように分離できる.

$$u_{i+1}^{\alpha} = (M_i^{\alpha})^{-1} \left[\frac{\Delta t}{3} \bar{f}_{i+1}^{\alpha} + \frac{\Delta t}{6} r_i^{\alpha} - \frac{\Delta t}{3} (K_p^{\alpha} p_{i+1} + \tilde{K}_{i+1}^{\alpha} u_{i+1}) - \Lambda_q^{\alpha} \varphi \right] \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$f_{i+1}^{\beta} = \frac{3}{\Delta t} \left[M_i^{\beta} \bar{u}_{i+1}^{\beta} - \frac{\Delta t}{6} r_i^{\beta} + \frac{\Delta t}{3} (K_p^{\beta} p_{i+1} + \tilde{K}_{i+1}^{\beta} u_{i+1}) + \Lambda_q^{\beta} \varphi \right] \quad \dots\dots\dots (31)$$

したがって式 (31) を式 (25), (27) に代入することにより未知反力項 f_{i+1}^a を消去した関係式を得る.

$$\begin{bmatrix} \Lambda_p^{\alpha} \\ \Lambda_p^{\beta} - \frac{1}{2} \Lambda_q^{\beta} \end{bmatrix} \varphi = \begin{Bmatrix} \frac{\Delta t}{3} r_i^{\alpha} \\ \frac{\Delta t}{4} r_i^{\beta} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{6} \begin{Bmatrix} \bar{f}_{i+1}^{\alpha} \\ 0^{\beta} \end{Bmatrix} - \frac{\Delta t}{6} \begin{bmatrix} K_p^{\alpha} \\ 0^{\beta} \end{bmatrix} p_{i+1} - \frac{\Delta t}{6} \begin{bmatrix} \tilde{K}_{i+1}^{\alpha} \\ 0^{\beta} \end{bmatrix} u_{i+1} + \begin{Bmatrix} M_i^{\alpha} u_i^{\alpha} \\ M_i^{\beta} (\bar{u}_i^{\beta} + \frac{1}{2} u_{i+1}^{\beta}) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$\frac{\Delta t}{3} (K_p^{\alpha})^T (M_i^{\alpha})^{-1} K_p^{\alpha} p_{i+1} = (K_p^{\alpha})^T (M_i^{\alpha})^{-1} \left[\frac{\Delta t}{6} r_i^{\alpha} + \frac{\Delta t}{3} (\bar{f}_{i+1}^{\alpha} - \tilde{K}_{i+1}^{\alpha} u_{i+1}) - \Lambda_q^{\alpha} \varphi \right] + (K_p^{\alpha})^T \bar{u}_{i+1}^{\alpha} \quad \dots\dots (33)$$

式 (32) の右辺には圧力ベクトル p_{i+1} が含まれており, 式 (33) の右辺には変数 φ が含まれているため, 両式を組み合わせると次のような方程式を最終的に得る.

$$\begin{bmatrix} \Lambda_p^{\alpha} & \vdots & \frac{\Delta t}{6} K_p^{\alpha} \\ \Lambda_p^{\beta} - \frac{1}{2} \Lambda_q^{\beta} & \vdots & 0^{\beta} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ (K_p^{\alpha})^T (M_i^{\alpha})^{-1} \Lambda_q^{\alpha} & \vdots & \frac{\Delta t}{3} (K_p^{\alpha})^T (M_i^{\alpha})^{-1} K_p^{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi \\ \dots\dots \\ p_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left\{ \frac{\Delta t}{3} r_i^{\alpha} \right\} + \frac{\Delta t}{6} \left\{ \bar{f}_{i+1}^{\alpha} \right\} - \frac{\Delta t}{6} \begin{bmatrix} \tilde{K}_{i+1}^{\alpha} \\ 0^{\beta} \end{bmatrix} u_{i+1} \\ \dots\dots\dots \\ (K_p^{\alpha})^T (M_i^{\alpha})^{-1} \left[\frac{\Delta t}{6} r_i^{\alpha} + \frac{\Delta t}{3} (\bar{f}_{i+1}^{\alpha} - \tilde{K}_{i+1}^{\alpha} u_{i+1}) \right] \\ \dots\dots\dots \\ \left\{ M_i^{\alpha} u_i^{\alpha} \right\} \\ M_i^{\beta} \left(\bar{u}_i^{\beta} + \frac{1}{2} u_{i+1}^{\beta} \right) \\ \dots\dots\dots \\ (K_p^{\alpha})^T \bar{u}_{i+1}^{\alpha} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (34)$$

式 (34) の右辺のベクトルは, 非線形項 $\tilde{K}_{i+1}^{\alpha} u_{i+1}$ を除けば時刻 t_i における既知項および時刻 t_{i+1} において境

境界条件によって規定されている項から構成されている。したがって非線形項を適切な近似によって評価すれば、式 (34) を解いて φ と \mathbf{p}_{i+1} が求められる。これらを式 (30), (31) に代入することにより、連続条件を満足する流速 \mathbf{u}_{i+1}^n とそのときの反力 \mathbf{f}_{i+1}^n を得ることができ

6. 積分 step ごとの計算過程

方程式 (34) および (30), (31) が、提案する解法を構成する時刻 t_i から t_{i+1} への積分漸化関係式である。非線形項を評価し、これらの方程式を解いて積分計算を進める過程は以下のとおりである。

- ① 第1近似として非線形項 $\tilde{\mathbf{K}}_{i+1} \mathbf{u}_{i+1}$ を積分 step の初期値である $\tilde{\mathbf{K}}_i \mathbf{u}_i$ で評価し、既知の $\mathbf{u}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{f}_i$ のもとで式 (34) を解いて第1近似解 $\varphi^{(1)}, \mathbf{p}_{i+1}^{(1)}$ を求める。
- ② 得られた $\varphi^{(1)}, \mathbf{p}_{i+1}^{(1)}$ を式 (30), (31) に代入し、非線形項は①で用いた値をそのまま使って式 (30), (31) を解いて第1近似解 $\mathbf{u}_{i+1}^{(1)}, \mathbf{f}_{i+1}^{(1)}$ を求める。
- ③ ②で得られた流速 $\mathbf{u}_{i+1}^{(1)}$ を用いて非線形項を評価し直し ($\mathbf{K}_{i+1}^{(1)}, \mathbf{u}_{i+1}^{(1)}$)、流速、反力、圧力が同時に所定の収束規準を満足するまで①~③を繰り返す。

収束判定規準としては以下のものを用いた。

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\|\mathbf{u}_{i+1}^{(n+1)} - \mathbf{u}_{i+1}^{(n)}\|}{\|\mathbf{u}_{i+1}^{(n+1)}\|}} < \varepsilon_u, \quad \sqrt{\frac{\|\mathbf{f}_{i+1}^{(n+1)} - \mathbf{f}_{i+1}^{(n)}\|}{\|\mathbf{f}_{i+1}^{(n+1)}\|}} < \varepsilon_f, \\ \sqrt{\frac{\|\mathbf{p}_{i+1}^{(n+1)} - \mathbf{p}_{i+1}^{(n)}\|}{\|\mathbf{p}_{i+1}^{(n+1)}\|}} < \varepsilon_p \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$

ここで $\varepsilon_u, \varepsilon_f, \varepsilon_p$ はあらかじめ設定された判定規準値である。ここに示した収束計算過程は非線形項の評価のために実施するもので、連続条件に関しては繰返し計算のどの段階における流速 $\mathbf{u}_{i+1}^{(n)}$ もこれを満足していることになる。

方程式 (34) は、(節点数 \times 2+要素数)の次元の連立一次方程式である。左辺の係数マトリックスは非対称で、 $\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{K}^T, \mathbf{K}_p^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_p$ のような3重積を含んでいるため、このマトリックスを作成する過程は通常の解法と比べればかなり複雑である。しかしこの係数マトリックスは積分時間間隔 Δt を変えない限り不変であるから、一度前進消去を行えば、あとは後退代入の繰返しのみで積分計算を進められる。また以上の定式過程から明らかのように、最終的に得られた方程式 (34), (30), (31) には物理的意味の不明なパラメーターはいっさい含まれていない。

7. 流れに垂直に置かれた平板まわりの流れ

構成した解法の特性を検証することを目的として、Taneda ら¹⁸⁾によって実施された平板まわりの流れに関する可視化実験結果と比較するための解析を行った。

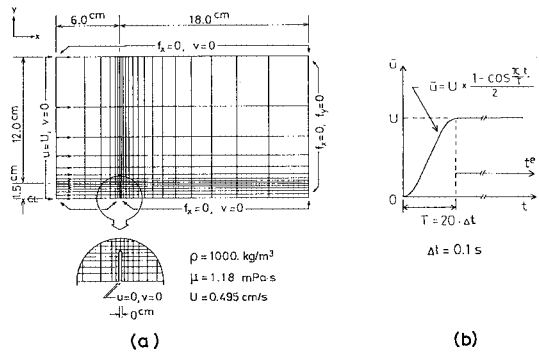


Fig. 1 Finite element mesh and boundary conditions for the flow past a flat plate.

Taneda らの実験は、幅 40 cm の水槽内につるされた板幅 3 cm の薄い平板を瞬間的に発達させ、一定速度 $U = 0.495$ cm/s (板幅を基準とした Reynolds 数 126) で曳航したときの流れの状況をアルミ粉末法によって可視化したものである。平板背後に双子渦が形成され発達する過程が、流れの対称性が保持される時間範囲で記録されている。この、静止した流体の中を運動する平板という状況を、静止平板まわりの流れに置き換えて Fig. 1(a) に示す境界条件を設定して解析した。ここで上流境界では一様流速 U を与え、流出境界では流速自由とした。側方境界では、この境界が平板から十分遠方にあることを想定した条件としている。また、双子渦が保持される時間範囲における比較を目的としているため対称条件を設定した。初期条件は基礎方程式 (1), (2) を満足する状態の中から、次式で表わされる静止流体の状態とした。

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{p} = 0 \quad \text{at} \quad t = 0 \dots \dots \dots (36)$$

文献¹⁸⁾では、平板の速度がゼロから所定の速度 U に立ち上がるまでに要する時間の具体的な値は不明である。解析では、上流境界で規定する流速を Fig. 1(b) に示した曲線に従って変化させて 20 step で立ち上げ、その後一定とした。この流速の立ち上げが完了した時点、実験における時間 $t^e (= t - 20 \Delta t)$ の原点とみなして以下の比較を行った。なお積分時間間隔 $\Delta t = 0.1$ s (無次元時間で 0.0825) とした。収束判定規準 $\varepsilon_u, \varepsilon_f, \varepsilon_p$ はいずれも 10^{-3} とした。各ステップの繰返し計算回数は 2~3 回であり、時間の経過とともにしだいに減少した。

Fig. 2 には平板まわりの流れが進展する状況をそのときの圧力分布とともに示した。Taneda らの実験で観察されているように、スタート直後の渦なしに近い流れから平板の端部に渦が生じ、しだいに成長している。渦の形成されている領域は負圧となっており、そのピークは渦の中心位置にある。さらに時間が経過したときの解析領域全体の流速分布を Fig. 3 に示す。Fig. 4(a) はよど

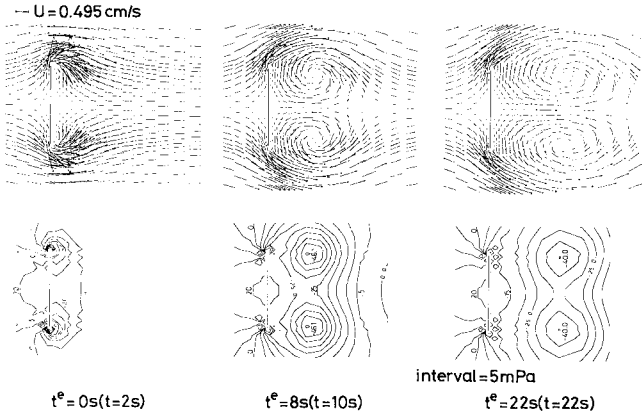


Fig.2 Velocity vectors and pressure contours around the plate.

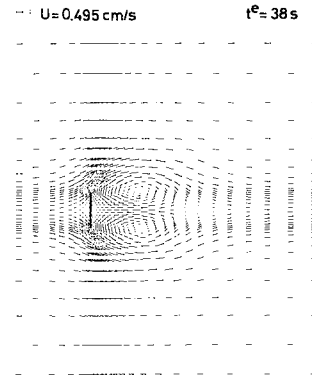


Fig.3 Velocity vectors in overall domain.

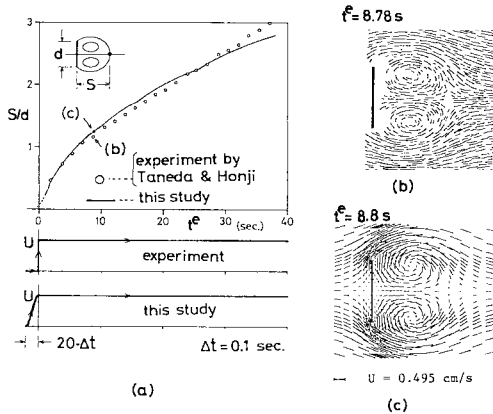


Fig.4 Comparison with the experiment by Taneda, et al. [18]; (a) movement of stagnation point ;(b) observed instantaneous particle motion (reproduced by the authors from the photograph of Ref.18);(c) calculation.

み点位置が時間とともに変化する様子を文献¹⁸⁾に報告されている値と比較したものである。よどみ点位置は流速が線形補間されていることに基いて、対称軸上の流速分布から評価した。実験値と解析値はかなりよく一致した変化を示している。Fig.4(b)は文献¹⁸⁾に掲載されている写真から著者が再生したもので、瞬間的な流速方向を示すものである。Fig.4(c)はほぼ同時刻における流速ベクトル図で、観察結果(b)と相当近い分布が得られている。Fig.4(b),(c)に対応するよどみ点位置をFig.4(a)の中に示した。以上の結果より、ここで提案する解法によって、実現象の時間変化と対応する結果が得られることがわかる。

提案する解法では、物体に作用する流体力を物体表面上の節点反力として直接的に求めることができる。このようにして得られる流体力の精度を、「検査面の方法」によって検証した。Fig.5中に示すように解析対象領域

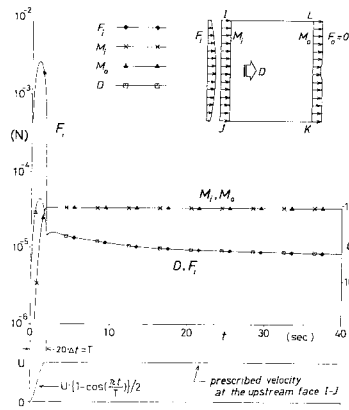


Fig.5 Momentum balance on the control surface.

の周 $I-J-K-L-I$ を検査面を選び、主流方向に関する運動量のつり合いを考えると、次の関係が満足されなければならない。

$$D + A = M_i + F_i - M_0 - F_0 \dots \dots \dots (37)$$

ここで、 M_i 、 M_0 はそれぞれ境界 $I-J$ 、 $K-L$ を通過する運動量束の総和であり、節点流速の分布から線形補間によって評価できる。 D は抗力、 F_i 、 F_0 は領域内の流体が境界 $I-J$ 、 $K-L$ の外側の流体から受けている力の総和であり、いずれも節点力 f (式(13))の和として算出でき、圧力および粘性力の両方から成る。なお境界条件から $F_0 = 0$ であり、 F_i は上流境界 $I-J$ の流速分布を一定に拘束するために必要な節点反力の和でもある。 A は流体を加速させる非定常慣性力の領域全体に関する総和である。なお、境界 $I-L$ 、 $J-K$ における運動量束の通過および x 方向の力は境界条件からいずれもゼロである。

Fig. 5 は式 (37) の諸量の時間変化を示したものである。 M_i と M_0 が一致しているが、これは Fig. 3 の流速分布からも明らかなように、検査境界 $K-L$ が平板から十分遠方であるため運動量欠損が無視し得る程度であることを示すものである。 $M_i - M_0$ がゼロであるから、Fig. 5 における 2 曲線 F_i と D との差は慣性項 A を表わしている。作用流速 U が変化する最初の 20 step では、平板近傍の局所的な部分を除く領域内の全流体が上流境界 $I-J$ 上の拘束力 F_i によって一様に加速される。Fig. 5 から読み取れる A の値とその変化は、全質量に加速度 dU/dt を乗じた値およびその変化とよく一致している。作用流速 U が一定になると平板背後の流速変化が卓越するが、その変化率が小さいため A の値はほとんどゼロとなり、 F_i と D が一致している。抗力 D は緩慢に減少しているが、これは Fig. 2 に示されているように渦の流下とともに負圧のピークが遠ざかり、平板前後の圧力差が小さくなっていくことと対応している。

なお、流出境界を通過する流量から平均流速を計算して作用流速 U と比較した結果、すべての積分段階において両者の差は $U \times 10^{-12}$ のオーダー（倍精度計算）であり、解が連続条件を精度よく満足していることを確認している。

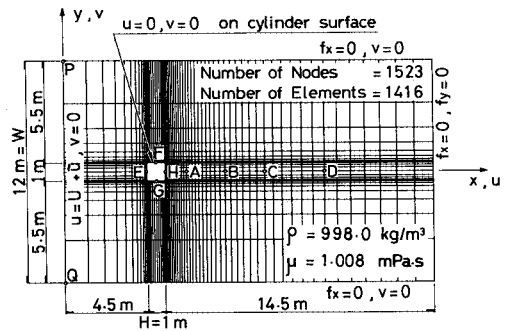
8. 正方形角柱まわりの流れ

ここでは一様流中に置かれた迎角ゼロの正方形角柱まわりの流れ（辺長を基準とした Reynolds 数 150）を解析し、Okajima による実験結果¹⁹⁾ と比較することにより解析法の検証を行った。用いた解析モデルを Fig. 6 に示す。前章の解析例と同様に初期条件は式 (36) で与え、上流境界の流速を Fig. 7(a) に示した曲線に従って 20 step で立ち上げるものとする。なお、要素分割、境界条件とも対称であるので、流れの対称性を崩す要因は丸め誤差だけであり、流れが振動を開始するまでに相当な時間経過が必要となるため、非対称な流れを誘起する要因を積極的に与えることが望ましいと判断し、若干の試行のち以下に述べるような条件設定を行った。

step ごとに一様乱数を発生させ、20 step に 1 回の確率で上流境界に与える x 方向流速分布を変化させる。変化量 \tilde{u} は次式で表わされる直線分布とする。

$$\tilde{u} = \frac{1}{2} \{ \tilde{u}_r(t) + \tilde{u}_d(t) \} + \{ \tilde{u}_r(t) - \tilde{u}_d(t) \} \left(\frac{y}{W} \right) \dots \dots \dots (38)$$

\tilde{u}_r , \tilde{u}_d は Fig. 6 に示した上流側隅角点 P , Q における流速値で、それぞれ個別に一様乱数を発生させて得られる値 \tilde{u}_r とする。 $|\tilde{u}_r|$ の最大値は $0.005 U$ とした。関数 $\tilde{u}_r(t)$, $\tilde{u}_d(t)$ はいずれも Fig. 7(b) に示すように 4 step 間の変化を与えるものである。積分時間間隔は、無次元時間 $t^* (= tU/H; H$ は正方形の辺長) で $0.1(\Delta t$



Re = 150, U = 0.1515 mm/s, Δt = 660.0 sec (Δt* = 0.1)

Fig. 6 Finite element mesh and boundary conditions for the flow past a square cylinder.

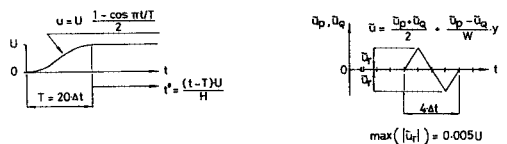


Fig. 7 (a) Prescribed initial variation of inlet velocity; (b) perturbation of inlet velocity.

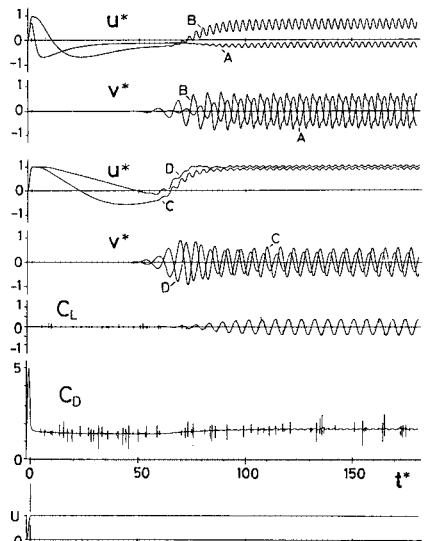


Fig. 8 Time history of velocity components (locations are indicated in Fig. 6).

= 660 s) とした。 t^* の原点は Fig. 7(a) に示すように立ち上げ完了時とする。収束判定規準 ϵ_{us} , ϵ_{fs} , ϵ_p はいずれも 10^{-3} とした。各ステップの繰返し計算回数は 3~4 回であった。

Fig. 8 は、 x 軸上のいくつかの位置 (Fig. 6) における無次元流速 $u^*(=u/U)$, $v^*(=v/U)$ の時間変化を Fig. 8 に示したものである。 $t^* \sim 45$ あたりから非対称

な流れへ移行する様相が顕著となり、 $t^* \sim 100$ あたりからは規則的に変動する流れが得られている。このときの Strouhal 数 (S_t) は 0.164 であった。Okajima¹⁹⁾ による水槽実験あるいは風洞実験によれば $S_t = 0.14 \sim 0.145$ であり、解析ではやや大きめの値が得られている。

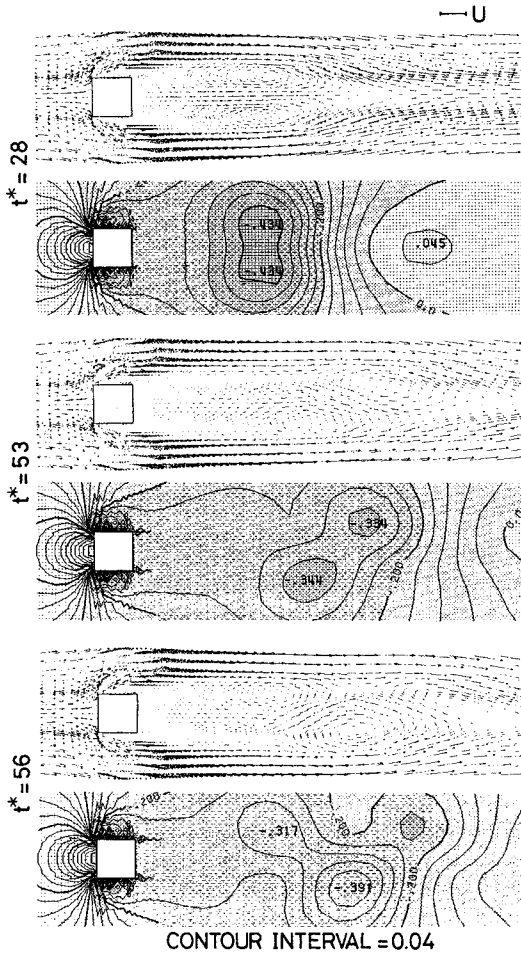


Fig. 9 Twin vortice and beginning of shedding (velocity vectors and dimensionless pressure contours).

Davis らの実験²⁰⁾では側方境界が近く閉塞効果が大いほど S_t が大きくなるという結果が得られており、本解析結果にも側方の境界条件が影響しているものと考えられる。

Fig. 9 は、流れの対称性が保たれている領域 ($t^* = 28$)、対称性が崩れかけている領域 ($t^* = 53, 56$) における流速、圧力の分布である。双子渦が成長した後、一方が他方の背後にまわり込むようにして振動を開始した。さらに時間が経過して流れが規則的に変動する領域における流速分布を、Okajima によって撮影された瞬間的な流線模様 (文献¹⁹⁾ の写真から著者らが複製した) と比較して Fig. 10 に示す。流れの状況は角柱のかなり後方に至る範囲まで流速の方向、位置ともよく一致している。

Fig. 8 にはまた、角柱表面上の節点反力より算出した抗力係数 C_D 、揚力係数 C_L の時間変化を示している。前章の解析例と同様に初期の立上げ領域に C_D のピークがある。 C_D, C_L とも流れが振動を開始するとともに振動を始め、最終的に規則的な変化に至っている。ところどころに混入している瞬間的な変動は、上流境界に擾乱

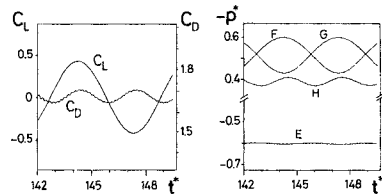


Fig. 11 Lift, Drag and surface pressures (locations are shown in Fig. 6) during a shedding cycle.

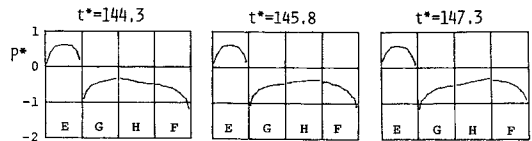


Fig. 12 Distribution of surface pressure during a half cycle of shedding.

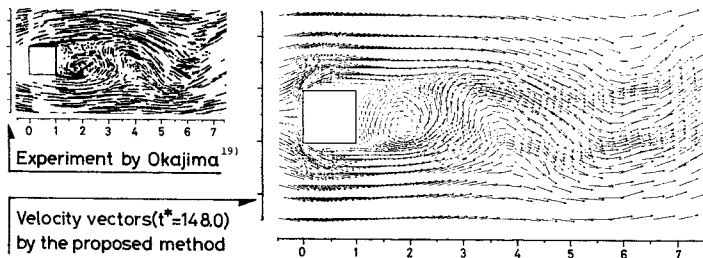


Fig. 10 Comparison with the experiment by Okajima, et al. [19] (the left figure is reproduced by the authors from the photograph of Ref. 19).

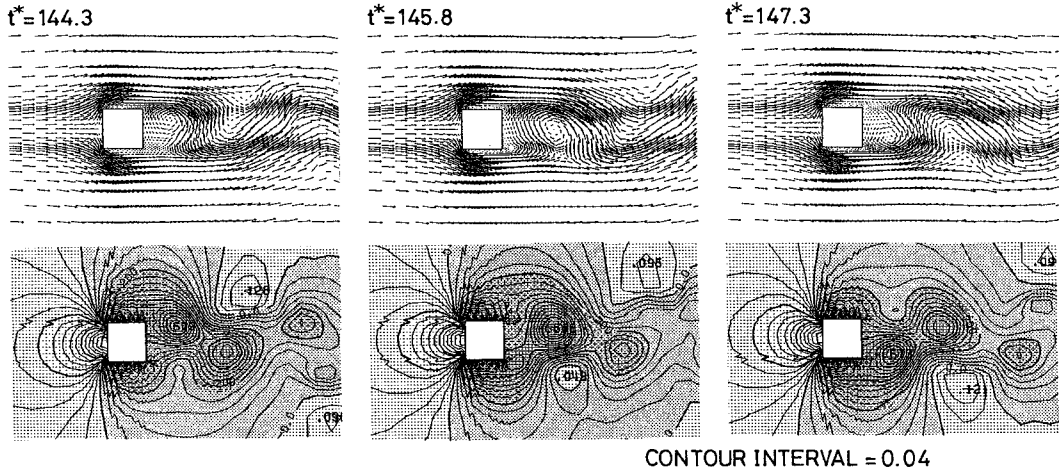


Fig. 13 Velocity vectors and dimensionless pressure contours during a half cycle of shedding.

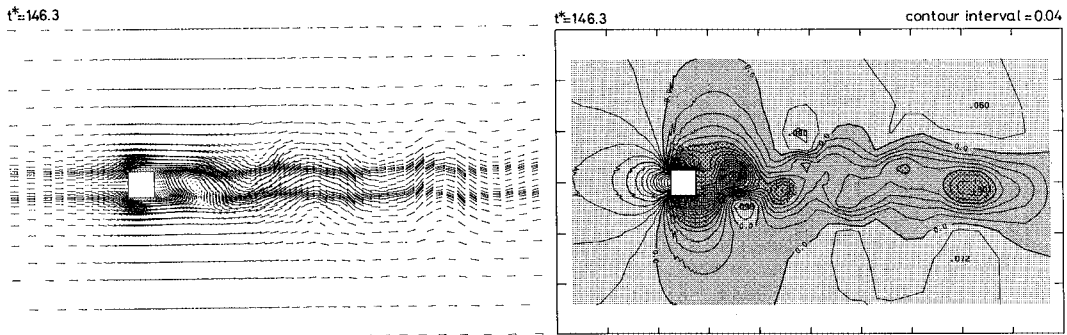


Fig. 14 Velocity vectors and dimensionless pressure contours in overall domain.

\tilde{u} (式(28))を与えたときにこれが衝撃的な加速度として作用したことの影響である。しかし \tilde{u} そのものの値は小さいため、流速に与える影響はほとんど認められない。流れが規則的に変動する領域における C_D の平均値は 1.66, C_L のピーク値は 0.43 であった。この領域における揚力変動の 1 周期間の、角柱表面の無次元圧力 $p^* (= p/\rho U^2)$ の時間変化を、 C_D , C_L の変化の拡大図とともに Fig. 12 に示す。ここに示した p^* の値は、各表面の中央点における値という意味で、中央の節点に隣接する 2 つの要素の値を平均して評価したものである。両側面 F , G における圧力差の変化が C_L の変化と対応し、背面 H における圧力変化が C_D の変化と対応している。また Fig. 12 は、 C_L が上向き最大 ($t_{max}^* = 144.3$)、ゼロ ($t^* = 145.8$)、下向き最大 ($t_{min}^* = 147.3$) となるときの角柱表面の圧力分布である。揚力の正負に対応して両側面 F , G の圧力分布が逆転している。

t_{max}^* , t_0^* , t_{min}^* における角柱近傍の流速分布、圧力分布を Fig. 13 に示す。揚力がピークとなるとき ($t_{max}^* = 144.3$, $t_{min}^* = 147.3$) には、前縁から剥離した流れが

角柱背後にまでまわり込んでいるのに対し、揚力がゼロのとき ($t^* = 145.8$) には渦がちょうど角柱から離れかかっており、角柱周辺の流れはほぼ対称となっている。このことは圧力分布からも明瞭である。最後に、解析対象領域全体の図を Fig. 14 に示す。

9. おわりに

本論文は、流速と圧力を変数とする有限要素方程式と著者らによる独自の直接時間積分法に基づいて構成した非圧縮粘性流体の非定常流れを対象とする解析過程について述べ、具体的な数値解析例に基づいてその特性を示したものである。構成した解法は、時間積分公式のアルゴリズムを反映して各積分 step が 2 段階の計算過程から成っている。その第 1 段階では圧力に関する方程式を解くが、この方程式は積分公式適用後の運動方程式から連続条件によって流速を消去して導いた。このとき連続条件式を、拘束・非拘束の区別なく解析対象領域のすべての流速成分に対する制約条件の形で適用した結果、連続条件を精度よく満足する解を得ることが可能となっ

たものである。また、各 step ごとに非線形項を収束させる計算過程とし、付加的な判断を必要とする不明確なパラメーターがいろいろ導入されていない解法となっている。penalty 関数法、通常的时间積分公式に基づく解法などと比べれば、解くべき方程式の係数マトリックスを作成するための手続きは複雑で、記憶容量も多く必要となるが、非線形項を外乱項に含める定式化をとったことにより、係数マトリックスを一度作成し前進消去を行えば、積分時間間隔を変えない限り後退代入の繰返しだけで計算を進めることができるアルゴリズムとなっている。

構成した解法を検証する目的で、平板背後で発達する双子渦の問題と正方形角柱周辺の渦列を伴う流れの問題の数値解析例を示し、Taneda¹⁸⁾、Okajima¹⁹⁾の実測結果と比較することにより、解の時間的变化が現象と対応して得られること、圧力、流体力を適切に評価できる解法であることを示した。

なお本論文の計算は、東京工業大学総合情報処理センターの計算機 M 280-H および東京大学大型計算機センターの計算機 S 810 で行った。また、本研究は文部省科学研究補助金の補助を受けた。ここに記して謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Norrie, D.H. and de Vries, G. : A survey of the finite element applications in fluid mechanics, *Finite Elements in Fluids* (eds. R.H. Gallagher, et al.), Vol. 3, Chap. 21, John Wiley & Sons, New York, pp. 363-396, 1978.
- 2) Gresho, P.M., Lee, R.L. and Upson, C.D. : FEM solution of the Navier-Stokes equations for vortex shedding behind a cylinder : experiments with the four-node element, *Adv. Water Res.*, Vol. 4, pp. 175-184, 1981.
- 3) Donea, J., Giuliani, S., Laval, H. and Quartapelle, L. : Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equation by a fractional step method, *Compt. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 30, pp. 53-73, 1982.
- 4) Hughes, T.J.R., Liu, W.K. and Brooks, A. : Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation, *J. Compt. Phys.*, Vol. 30, pp. 1-60, 1979.
- 5) Bercovier, M. and Engelman, M. : A finite element for the numerical solution of viscous incompressible flows, *J. Compt. Phys.*, Vol. 30, pp. 181-201, 1979.
- 6) Kawahara, M. and Hirano, H. : A finite element method for high Reynolds number viscous fluid flow using two step explicit scheme, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 3, pp. 137-163, 1983.
- 7) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R. : Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Compt. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 32, pp. 199-259, 1982.
- 8) Yang, C.-T. and Atluri, S.N. : An 'assumed deviatoric stress-pressure-velocity' mixed finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous flow, part 1 & 2, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 3, pp. 377-398, 1983 & Vol. 4, pp. 43-69, 1984.
- 9) Hood, P. and Taylor, C. : Navier-Stokes equations using mixed interpolation finite element in flow problems, *Finite element methods in flow problems* (eds. J.T. Oden, et al.), Univ. of Alabama, Huntsville Press, pp. 121-143, 1974.
- 10) Huyakorn, P.S., Taylor, C., Lee, R.L. and Gresho, P.M. : A comparison of various mixed-interpolation finite element in the velocity-pressure formulation of the Navier-Stokes equations, *Compt. and Fluids*, Vol. 6, pp. 25-35, 1978.
- 11) Taylor, R.L. and Zienkiewicz, O.C. : Mixed finite element solution of fluid flow problems, *Finite Elements in Fluids* (eds. R.H. Gallagher, et al.), Vol. 4, Chap. 1, pp. 1-20, John Wiley & Sons, New York, 1982.
- 12) Oden, J.T. : RIP-methods for stokesian flows, *Finite Elements in Fluids* (eds. R.H. Gallagher, et al.), Vol. 4, Chap. 15, John Wiley & Sons, New York, pp. 305-318, 1982.
- 13) Ying, L.-A. and Atluri, S.N. : A hybrid finite element method for Stokes flow, part 1 & 2, *Compt. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 36, pp. 23-37 & 39-60, 1983.
- 14) Heinrich, J.C., Huyakorn, P.S. and Zienkiewicz, O.C. : An 'upwind' finite element schemes for two-dimensional convective transport equation, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 11, pp. 131-143, 1977.
- 15) 吉田 裕・藤原 亨・野村卓史 : 熱伝導型方程式の直接時間積分法と高精度化のアルゴリズム, 土木学会論文報告集, 第 313 号, pp. 23-36, 1981 年 9 月.
- 16) 吉田 裕・野村卓史 : 高精度時間積分法に基づく Navier-Stokes 方程式の解法, 土木学会論文報告集, 第 326 号, pp. 29-40, 1982 年 10 月.
- 17) 吉田 裕・野村卓史 : 矩形キャビティ内流れ問題の解析における境界条件に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第 342 号, pp. 125-134, 1984 年 2 月.
- 18) Taneda, S. and Honji, H. : Unsteady flow past a flat plate normal to the direction of motion, *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 30, No. 1, pp. 262-272, 1971.
- 19) Okajima, A. : Strouhal numbers of rectangular cylinders, *J. Fluid Mech.*, Vol. 23, pp. 379-398, 1982.
- 20) Davis, R.W., Moore, E.F. and Crowe, C.T. : Numerical modeling of unsteady gas-particle flows around rectangular inside channels, *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow* (eds. C. Taylor, et al.), Pineridge Press, Swansea, pp. 1037-1046, 1983.