

委員会報告

水工学における固液混相流

SOLID-LIQUID TWO-PHASE FLOWS IN HYDRAULIC ENGINEERING

水理委員会固液混相流の力学小委員会

*By Task Committee on Dynamics of Solid-Liquid Two-Phase Flows
in the Committee on Hydraulics and Hydraulic Engineering, JSCE*

1. ま え が き

混相流の研究は、その構成要素の物理的、化学的性質の多様性のゆえにきわめて多岐にわたり多くの学問分野にまたがっている。このため、混相流の問題は個々の専門分野で取り上げられ研究されていた反面、学際領域の学問としてはいまだ統一性に欠けていた。しかし、昭和40年代の半ば頃から工学のいろいろな分野で混相流の力学の体系化という観点から、それまでの各応用問題としてのその位置づけの見直しが生活に行われるようになり、昭和40年代の後半から50年代の前半にかけては日本学術会議水力学・水理学研究連絡委員会（当時委員長：京都大学 故石原藤次郎教授）はこのような混相流研究の体系化を推進した。

このような機運の高まりの中で土木学会水理委員会は、河川・貯水池・海岸等における土砂や浮遊物質の問題に関する混相流の力学に統一性を与え、混相流として取り扱われるものの学問体系を整えることの必要性を認めて同委員会の研究小委員会活動の一環として、土木工学の水工学に広く関係の深い固液混相流をテーマとして取り上げ、その力学についての研究調査を行うため昭和53年2月に「固液混相流の力学研究小委員会」を設置した。

以来、本研究小委員会はその調査研究を行い、次の3項目についての昭和54、55年度段階までの研究成果を取りまとめた。その3項目とは

- (1) 混相流に関する数学モデル
- (2) 開水路における固体粒子浮遊流
- (3) 流体輸送管路の固液混相流

である。しかしその後その印刷が諸般の事情で遅れたの

で、改めて57-58年度においてその内容を一部改訂再編成するとともに54、55年度段階以後の研究を補足するため

(4) 混相流に関する最近の研究の動向の項目を追加して報告書を作成し、昭和58年6月に「固液混相流の力学」と題する研究報告書を水理委員会に提出した。

本文はその報告書を論文集用にまとめ直したものである。紙数の関係で大切な部分でも割愛したものがあるが、これからこの分野の研究の一層の発展の契機を与え得るものとなれば幸いである。

本研究小委員会の構成は下記のようなものである。

委員長：林 泰造（中央大学）

委員兼幹事：福岡捷二（東京工業大学）

混相流に関する数学モデル分科会

主 査：日野幹雄（東京工業大学） 山田 正（防衛
大学校）

ニュートン流体としての固液混相流分科会

主 査：岸 力（北海道大学） 板倉忠興（北海道開
発局） 今本博健（京都大学） 福岡捷二（東
京工大）

非ニュートン流体としての固液混相流分科会

主 査：松尾友矩（東京大学）

流体輸送管路の固液混相流分科会

主 査：林 泰造（中央大学） 那須浩平（高知高専）

混相流に関する最近の研究の動向分科会

主 査：林 泰造（中央大学） 福岡捷二（東京工大）
山田 正（防衛大学校）

2. 混相流に関する数学モデル

一般に単相の流体に相の異なった物質が混入した流れは混相流と呼ばれており、単相の流体とは異なった流れの特性を有している。本章では、混相流の数学モデルに関する研究の現況を整理・報告する。

(1) 個々の粒子の運動

a) 単一粒子の運動方程式

① Basset 方程式

静止流体中を運動する球に関する運動方程式は、Basset 方程式と呼ばれている¹⁾。

② Tchen の方程式

乱流場における粒子運動に関して Tchen²⁾は基礎式を与えている。Lucian³⁾は Tchen の式を解析し、Basset 項等の各項のオーダー評価を行っている。

b) 静止流体中の粒子の回転運動による力

1 個の球が無限静止流体中を一定角速度で回転し、かつ一定速度で並進しているときの球に働く抗力と揚力は Rubinow・Keller⁴⁾によって理論的に解かれている。この揚力、抗力に関する研究は Happel・Brenner の書⁵⁾に詳述されている。

c) せん断流中の粒子に働く抗力・揚力

せん断流中の粒子は抗力のほかに揚力も受ける。研究の対象とされる粒子の形としては球形、楕円体、円板等がある。壁面近くの球やせん断流中の球に働く抗力、揚力については Lighthill⁶⁾の研究が初期のもので、その後多くの研究者によって研究されている。そのうち様なせん断力が働いている流体中の球に作用する揚力として Saffman⁷⁾の得た揚力に関する結果は、前に言及した Rubinow・Keller 解とは異なり、球の回転角速度に無関係となっている。

d) せん断流中の粒子の運動

一般に低レイノルズ数の範囲では流体中の粒子の運動は、せん断応力の効果、壁面の効果、回転の効果、粒子の形の効果が複雑に絡み合い、また液中の粒子濃度の効果も入ってきて、さまざまな運動形態が現われてくる。これらに対する実験的研究の報告は、松信⁸⁾、岡⁹⁾、Eirich¹⁰⁾らによって軸集中、シグマ効果、管壁効果等として詳細に報告されている。

ところでせん断力中を運動する粒子は流れによりモーメントを受けて回転するが、その姿勢変化に関しては、Masson¹¹⁾、Goldschmidt¹²⁾のものがある。また従来の実験研究をまとめたものに、Cox, Mason¹³⁾の報告がある。

e) 静止流体中の粒子の沈降

① 1 個の粒子の沈降

静止流体中の粒子の沈降に関して最終沈降速度や抵抗係数を、理論的に求める試みは 1851 年の Stokes の研

究以来、Oseen, Goldstein などにより古くから行われている。一方実験的研究も数多くあり、形状の効果、底面および側面の影響等が論じられている。これらに関しては次に述べる複数個の粒子沈降の場合も含めて河村の成書¹⁴⁾に詳述されている。

② 複数個の粒子の沈降

この問題は通常クリーブ運動の方程式を解いて求められるが、流体の慣性を無視するために、粒子に働く揚力（壁に直角方向）が欠落してしまう。最近 Vasseur・Cox¹⁵⁾は、singular perturbation 手法により壁面と 1 個の粒子、壁面と（または無限の広がりの中での）2 粒子の沈降の理論を発表し、実験との一致を示している。

③ 粒子群の沈降

上記①、②の問題は粒子レイノルズ数が小さいとして理論的に論じられているが、粒子レイノルズ数が増加すると後流部にカルマン渦が発生し、粒子の挙動は確率的になる。また粒子レイノルズ数が小さいときの粒子群の沈降の問題は Saffman¹⁶⁾によって取り扱われており、粒子を点とみなす point particle approximation を用いて解析が進められている。

(2) 粒子懸濁液——単一相としての取扱い——

a) 粒子懸濁液の有効粘性係数

有効粘性係数とは、混相流を一つの特性をもった流体とみなしたときに現われるみかけの粘性係数であるがこれを最初に理論的に導き出したのは A. Einstein¹⁷⁾である。この理論の紹介は数多くの流体力学の成書にみられる（たとえば Landau・Lifshitz¹⁸⁾）。より一般的な場合は、Taylor によって行なわれ Batchelor の書¹⁹⁾にみることができ。濃度 c が低く、粒子相互間の干渉を無視し得る場合には、

$$\mu^* = \left[1 + c \left(\frac{\mu + 2.5\bar{\mu}}{\mu + \bar{\mu}} \right) \right] \mu \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。ここに、 μ^* ：混相流の有効粘性係数、 $\bar{\mu}$ ：混入粒子の粘性係数、 c ：粒子濃度である。特に混入物質が固体の粒子の場合 $\bar{\mu} \rightarrow \infty$ とすると、上式は Einstein 公式

$$\mu^* = \mu(1 + 2.5c) \dots\dots\dots (2)$$

となり、 c が 0.02 以下の場合には十分な精度を有しているといわれている。なおより高濃度の混相流の場合に適応し得る実験式が Happel・Brenner²⁰⁾の書に示されている。また Jeffery は Einstein とほぼ同様の理論展開を行い固体が楕円体の場合の有効粘性係数を求めている。この問題はその後 1970 年代に入り、Batchelor²¹⁾を中心に再び理論的に取り上げられ、濃度の二乗のオーダー $O(c^2)$ までの議論や Brown 運動の影響が論じられており、また細長い物体を混入した流れでは非常に大きな応力の発生がみられること等が報告されている。一方

Lundgren²³⁾はBrinkman²⁴⁾によって浸透流の解析に用いられた手法にSaffman¹⁶⁾によって提案されている統計的手法を加えて、有効粘性率、粒子の沈降速度等を導いている。このほかにも粒子の濃度が高くなった場合の有効粘性係数について半理論式がいくつか提案されており、化学工学あるいは粉粒体工学の分野での成果も数多い。

b) 粒子懸濁液のバルク方程式

粒子懸濁液では流体中に無数の粒子が存在するため、粒子の存在を確率的に取り扱う必要がある。無数の粒子の存在効果を統計的に平滑化して導かれた均質な流体としての方程式は、“懸濁液のバルク方程式”あるいは“構成方程式”と呼ばれ、これに関して、Batchelor²²⁾、Murray²⁵⁾、Drew²⁶⁾、Hinch²⁷⁾などの多数の論文がある。

この場合問題となるのは、①どのような統計的手法(平均化操作)を用いるか、②応力をどのように定式化するのか、③その結果、有効粘性係数等はどのように表現されるのか、といった点であり、これらの点に各論文の相違がみられる。上述の平均化操作にはLandau・Lifshitzによる体積平均(volume average)や、Batchelorによるアンサンブル平均(ensemble average)がある。通常の目的のためには両者のうちどちらを用いても結果に変わりはないが、より広範囲の問題に適用する際や、より精密な議論を行うときには、SaffmanやLundgrenの条件付きアンサンブル平均が必要となる。またHinchはこれらの方法とは別に、1個の粒子に着目し、これらを固定したまま、アンサンブル平均を行い、1回目のバルク方程式を得る。次に2個の粒子を固定したまま、上記の方程式にさらにアンサンブル平均を施し、この操作を繰り返すといういわゆる“renormalization”の手法を提案し、有効粘性係数のほか、懸濁液中の重い粒子の沈降速度や多孔質の透水係数を導いている。

c) 懸濁液中の沈降粒子

懸濁液中を懸濁粒子より大きな粒子が沈降する場合には、流れの場のスケールが懸濁粒子の間隔より大きくなる。このため、球に働く抗力には、ストークスの抵抗則とは異なり濃度の効果が入ってくる。これに関してはBrinkman²⁴⁾らの研究がある。

(3) 混相流の基礎方程式

——多相流としての取扱い——

a) 基礎方程式

混相流の基礎方程式は、Hinze²⁸⁾、Soo²⁹⁾、Murray²⁵⁾により一般的に論じられている。一方Drew²⁶⁾は数学的により厳密に一般化された形でこれを導いている。ここでは混相流の基礎方程式として最近提案されているDelhaye³⁰⁾あるいはIshii³¹⁾による基礎式を記しておく。粒子系に関する質量の保存式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot c \mathbf{v}_s = 0 \dots\dots\dots (3)$$

流体に関する質量の保存式

$$\frac{\partial(1-c)}{\partial t} + \nabla \cdot (1-c) \mathbf{v}_f = 0 \dots\dots\dots (4)$$

粒子系に関する運動量方程式

$$c \rho_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \nabla \cdot \mathbf{v}_s \right) = -c \nabla p_s + c \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_s + \mathbf{M}_s \dots\dots (5)$$

流体に関する運動量方程式

$$(1-c) \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \nabla \cdot \mathbf{v}_f \right) = -(1-c) \nabla p_f - (1-c) \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_f + \mathbf{M}_f \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 c は粒子の体積濃度、 $\rho_s, \rho_f, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f$ はそれぞれ粒子系と流体の密度と速度、 $p_s, p_f, \boldsymbol{\tau}_s, \boldsymbol{\tau}_f$ はそれぞれの圧力とせん断応力(粒子が気泡の場合には、 $p_s = p_f + 2S/a$ が成立している。ここに、 a は気泡の半径、 S は表面張力である)、 $\mathbf{M}_s, \mathbf{M}_f$ は粒子系と流体との相互干渉の効果を示している。他の多くの研究者が提案している基礎式はほぼ上記の式と同じ形式を有しているが、その相違点は運動量方程式の右辺の抵抗項の表現にあるようである。たとえば、Ungarish・Greenspan³²⁾らは次式を与えている。

$$\rho_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \nabla \cdot \mathbf{v}_s \right) = -\nabla p_s + D(c) \mu_s \nabla^2 \mathbf{v}_s + D(c) \frac{9}{2} \mu \kappa \frac{1}{a^2} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \dots\dots\dots (7)$$

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \nabla \cdot \mathbf{v}_f \right) = -\nabla p_f + D(c) \mu_f \nabla^2 \mathbf{v}_f - \frac{c}{1-c} D(c) \frac{9}{2} \mu \kappa \frac{1}{a^2} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 a は粒径、 $D(c)$ は混相流の体積濃度に関する係数、 μ_s, μ_f はそれぞれの系の粘性係数、 κ は2つの粘性係数の比である。

b) 種々の流れへの応用

- 得られた方程式により、種々の場の流れ、たとえば、
- 平板に沿う混相流(層流)
 - 平板に沿う混相流—粒子の沈降や拡散を伴う場合(層流)
 - 平板に沿う混相流(乱流)
 - 混相噴流

等が解かれている。これらの場合にはいずれも境界層近似が可能であり、流体、固体の各相についての境界層方程式を“運動量積分法”で解くことができる²⁸⁾。

c) 混相乱流の取扱い

こうした二相流としての取扱いを乱流の場合に拡張するためには、粒子運動により発生するレイノルズ応力について完結問題(レイノルズ応力を平均量その他でいかに表現し、方程式を閉じるかという問題)が生じる。これについては、3. で述べられるように混合距離理論、

加速度平衡方程式，エネルギー平衡方程式，Monin-Obukhov 相似理論のもとに開水路土砂浮遊流の乱流構造が論じられている。

3. 開水路における浮遊砂流

(1) 浮遊砂濃度分布

浮遊砂現象は，水流の乱れによる拡散によって起こることから，拡散方程式に基づく取扱いが一般的である。すなわち，二次元定常等流の浮遊砂濃度分布の基礎式は，次式で表現される。

$$\epsilon_s \frac{dc}{dy} + w_0 c = 0 \dots\dots\dots (9)$$

ここに， c ：浮遊砂濃度， ϵ_s ：濃度拡散係数， w_0 ：沈降速度， y ：水路底からの高さである。運動量輸送係数 ϵ_m は，せん断力の鉛直分布が直線的で流速分布の log law が成立するとすると，式 (10) となる。

$$\epsilon_m = k u_* h (1 - y/h) \dots\dots\dots (10)$$

ここに， h ：水深， u_* ：摩擦速度である。いま ϵ_s と ϵ_m が等しいと仮定すると次の浮遊砂濃度分布式が求まる。

$$\frac{c}{c_a} = \left(\frac{h-y}{y} \cdot \frac{a}{h-a} \right)^z \dots\dots\dots (11)$$

ここに，

$$z = \frac{w_0}{x u_*} \dots\dots\dots (12)$$

上式は Rouse の濃度分布³²⁾と呼ばれる。式 (11) では流路床付近 ($y=a$) の濃度 c_a を知れば，濃度分布を求めることができる。 ϵ_s に (12) と異なる関数形を採用すれば，異なった式形の濃度分布式が得られるが^{33)~35)} 拡散方程式を用いる限りは Rouse 型の濃度分布とそれほど差はない。Rouse の濃度分布は， w_0/u_* が小さいところでは実測濃度分布をよく説明するが， w_0/u_* が大きくなると Rouse 式で求まるものよりも一様な分布に近づく。

$$\epsilon_s = \beta \cdot \epsilon_m \dots\dots\dots (13)$$

とおき， $\beta=1.2$ とおくと，実測値との対応が平均的によくなる。両者の関係を式 (13) で表現し，実用上は $\beta=1.0$ にとることが多い³⁶⁾。

β の値について，Carstens³⁷⁾，Ismail³⁸⁾，Simgasetti³⁹⁾，Jobson・Sayre⁴⁰⁾らの研究があるが，実験者ごとに異なる。この理由は，それぞれの対象とするせん断乱流の場が異なることや測定精度が必ずしも満足のゆくものではないことと関係する。しかし，両者の拡散特性に差が現われる機構についての説明はまだまだ十分にされていない。

拡散方程式では境界の存在を直接基礎方程式の解の中に取り込めないために，境界がある場

合には便宜的な境界条件 (Rouse の式では $y=a$ の濃度 c_a) を与えて濃度分布を求めている。粒子を含む流れの底面の境界条件は粒子が壁面を通り抜けない⁴¹⁾ことであり，拡散方程式による限りは， c_a の値をいかに精度よく求めるかという問題に帰着する。

Yalin・Krishnappan⁴²⁾は，二次元定常等流中での浮遊粒子の運動をラグランジュ的に追跡することによって濃度分布式を導いている。そこでは流体塊が鉛直方向変動速度 v' によって $v' \cdot \delta t$ 変化する間に，固体粒子は $(v' - w_0) \delta t$ だけ変位するものとし，浮遊粒子の変位の確率密度関数を

$$f(y_{n+1}, y_n) = \frac{1}{\sigma_y \cdot \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\{y_{n+1} - (y_n - w_0 \cdot \delta t)\}^2}{2\sigma_y^2} \right] \dots\dots\dots (14)$$

で表わしている。基準点濃度を c_a とすると濃度分布式として式 (15) を得る。

$$\frac{c}{c_a} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(y_n; y_*)}{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(y_a; y_*)} \dots\dots\dots (15)$$

ここに， y_* は浮遊粒子の初期高さである。Yalin らの濃度分布は $1.25 \leq u_*/w_0 \leq 10.0$ の範囲で実測値をよく説明する。

吉川，石川⁴³⁾は，平衡な浮遊砂濃度分布の形成には粒子が壁を通り抜けないという境界条件を取り込むことが必要であるとの考えのもとに，Yalin らと同様に粒子運動を確率的に取り扱い，濃度拡散係数を求め，これより Rouse の濃度分布式の指数 z_1 として，

$$z_1 = \frac{z}{\beta'} = 1.18(1-w) \dots\dots\dots (16)$$

を得ている。ここに， w は

$$w(2-w) = \exp \left\{ -1.77(1-w) \frac{w_0}{u_*} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

より求める。図-1 は式 (16) と実測値の比較を示す。

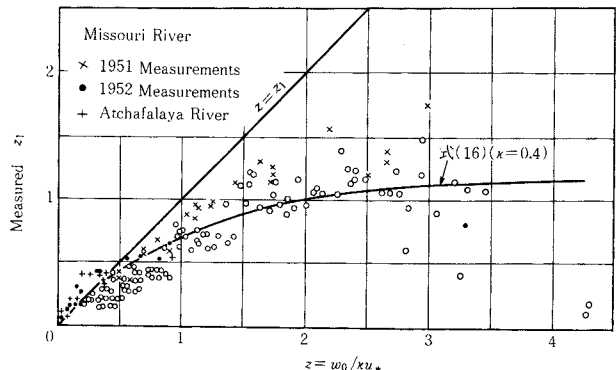


図-1 Rouse 分布の指数の変化

(2) 流れと浮遊砂の相互作用

a) 固体粒子浮遊流の特性

浮遊砂を含む流れの構造が清水流の構造と異なることが Vanoni⁴³⁾ によって指摘されて以来、浮遊砂流は流れの抵抗との関連で水工学の中心課題の1つとなった。

浮遊砂流と清水流の大きな相違は流速分布にみられ、同一の水理条件のもとでも浮遊砂流では濃度増加とともに流れの流速勾配が急になり、対数速度分布式の Kármán 定数が減少する。Vanoni は、乱れエネルギーと平均流の関係からこのことを最初に考察した。

Einstein・Chien⁴⁴⁾ は、粒子浮遊に費やされるエネルギー \dot{P}_s と流れが摩擦によって失うエネルギー P_f の比

$$\frac{P_s}{P_f} = \sum \frac{\bar{c} w_0}{\bar{u} I_e} \frac{\rho_s - \rho_0}{\rho_0} \dots \dots \dots (18)$$

と Kármán 定数の変化を関係づけ、実験資料によって確かめている。ここに、 \bar{c} は浮遊砂体積濃度の断面平均値、 I_e はエネルギー勾配、 \bar{u} は平均流速、 \sum は各粒径ごとの和である。Kármán 定数の濃度による変化が式 (18) の関係で表現されることにより、2. b) に述べる流体と粒子の相互作用を理論的に研究する糸口が与えられることとなった。

最近、今本・大年^{45), 46)} は滑面と粗面水路における浮遊砂流の抵抗係数について系統的な実験を行い、次の結果を得ている。浮遊砂流の抵抗係数の増減は粗度レイノルズ数に支配され、滑面上の浮遊砂流では濃度増加とともに抵抗係数が増大するが、完全粗面領域では減少する。一方、不完全粗面領域では粗度レイノルズ数に応じて抵抗係数の増減傾向は異なる。また抵抗係数の変化はフルード数が小さいほど顕著であり、レイノルズ数によっては、ほとんど影響されない。固体粒子浮遊流の乱れ構造に関しては、乱れ計測用の測定機器の開発によって、数多く調べられるようになったが^{45), 47)}、固体粒子が流速分布や抵抗係数に及ぼす影響ほど明確ではなく、いまだ統一的な解釈を行えるほど確度の高い結果は得られていない。

浮遊砂の運動が浮遊砂自身の沈降速度と乱れ速度という分離して評価しにくい2つの要素に強く影響されるため、浮遊砂流の内部構造の理解には、必然的に沈降速度が無視できる中立粒子を浮遊した流れの内部構造の研究へと進んでいった⁴⁸⁾。Elata・Ippen⁴⁹⁾ は、二次元開水路流の実験により、中立粒子浮遊流でも流速分布は浮遊砂流と同様に粒子濃度の増加とともに勾配が急になるが、抵抗係数と乱れの強度は逆に増加することを見出した。この実験事実は、粒子浮遊流に対する考え方を今一度見直す必要性を示すこととなった。粒径のやや大きい中立浮遊粒子を用いた管水路実験においても、開水路流におけるものとはほぼ同様な実験結果が得られた⁵⁰⁾。

b) 流れと浮遊砂の相互作用を考慮したモデル

粒子浮遊流の内部構造を清水流と同じ精度で議論することは現状では困難であるところから、実験で得られた知識を基礎に理論的な面から粒子浮遊流の力学を探ろうとする試みがなされている。流水中に固体粒子が存在すると、流速分布、抵抗係数、乱れの構造に影響を及ぼすので、浮遊砂の存在を考慮した乱れエネルギーの平衡式と連続条件を用い、流れと固体粒子の相互作用を考慮した解析が行われている。

流体と固体粒子の相互作用の研究は、Ippen^{51), 52)}、岸⁵³⁾、福岡⁵⁴⁾によってレビューされている。

志村⁵⁵⁾は、二次元等流の場合で乱れエネルギーの平衡式として粘性底層 δ から水面 h まで積分した形

$$\int_{\sigma}^h \tau \frac{du}{dy} dy - \int_{\sigma}^h \bar{D}' dy - \int_{\sigma}^h \rho_0 (\gamma_s - 1) \bar{c}' v' g dy = 0 \dots \dots \dots (19)$$

を用いた。粘性によるエネルギー逸散項 \bar{D}' は、乱れの2乗平均平方根 \bar{u} と乱れの平均渦径 L を用い、 $\bar{D}' \propto \rho \cdot \bar{u}^3 / L$ で表現し、これと連続式より浮遊砂流の Kármán 定数に関する式を導いた。この式は、Kármán 定数の濃度による減少を説明し、物理的考察によって導かれた式 (18) に理論的裏付けを与えた。

日野⁵⁶⁾は土砂流および中立粒子浮遊流を統一的に説明する粒子浮遊流の理論の構築をめざし、式 (19) に新たに粒子の存在による乱れの有効逸散体積の減少を加えた乱れのエネルギー方程式を用い、これと乱れの加速度平衡方程式から Kármán 定数の変化、乱れの強さの変化の式を導いた。

$$\frac{x_0}{x} = \frac{L_0}{L} = \frac{(1 + \beta \bar{c})}{2} [1 + |1 + 4 B_1 x_0 (1 + \beta \bar{c}) S_1|^{1/2}] \dots (20)$$

$$\frac{\bar{u}}{u_0} = \left(\frac{1}{1 - \alpha^2 \bar{c}} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/2} \cdot \left[1 - \frac{2 x_0 \sigma S_1}{(1 + \beta \bar{c}) [1 + |1 + 4 B_1 x_0 (1 + \beta \bar{c}) S_1|^{1/2}]} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (21)$$

$$\frac{t_*}{t_{*0}} = \frac{2(1 - \alpha^2 \bar{c})^{1/2} (\rho / \rho_0)^{1/2}}{(1 + \beta \bar{c}) [1 + |1 + 4 B_1 x_0 (1 + \beta \bar{c}) S_1|^{1/2}]} \cdot \left[1 - \frac{2 x_0 \sigma S_1}{(1 + \beta \bar{c}) [1 + |1 + 4 B_1 x_0 (1 + \beta \bar{c}) S_1|^{1/2}]} \right]^{-1/2} \dots \dots \dots (22)$$

ここに、

$$S_1 = \frac{g(\gamma_s - 1) w_0 \bar{c} (h - \delta)}{u_*^3 \ln h / \delta} \dots \dots \dots (23)$$

\bar{u} : 乱れ、 t_* : 渦の寿命時間である。

図-2 は、Kármán 定数の濃度による減少に関する理論と実験の比較を示す。日野の研究は固体粒子浮遊流の乱れの構造まで説明しようとするもので先導的な研究で

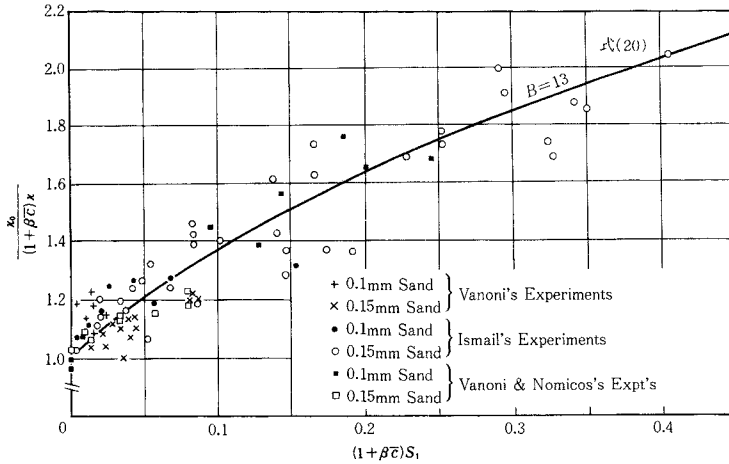


図-2 浮遊砂流の濃度と Kármán 定数減少の関係

あり、その時点まで発表された乱れのデータを説明する。最近、板倉・岸⁵⁷⁾も浮遊砂流の乱れの構造を検討している。しかし、乱れの構造に関しては、確度の高い実験データが乏しく理論の構築の過程・仮説を検証できる精度の高いデータの蓄積が最も望まれるところである。吉川・福岡・石田⁵⁸⁾は、乱流中の粒子の運動を式(19)の左辺第3項のように平均的な運動として記述するよりも乱流場を近似的にでも表現し、その中での粒子と流体の相対運動を論じることができれば、より精度の高いエネルギー平衡式を定式化できると考えた。このため、流れを振動流で、定常な濃度分布をもつ土砂浮遊流を一定の砂粒子配列をもった格子でモデル化し、流体と砂粒子の相対速度に起因する抵抗によるエネルギー逸散を求め、その適合性の検討を行っている。

Itakura・Kishi²⁶⁾は、エネルギー平衡方程式に気象学分野で一般的な Monin-Obukhov の理論を適用し、浮遊砂流の流速分布、濃度分布式を導いた。

流速分布は次式で示される。

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{u_* y}{\nu} + \phi \frac{u_* y}{\nu} \right) + \left[B \left(\frac{u_* k_s}{\nu} \right) - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* k_s}{\nu} \right] \dots \dots \dots (24)$$

ここに、 $\phi = \alpha \cdot \bar{v} / u_* \cdot L$ 、 $\kappa = 0.4$ 、 $\alpha \approx 7.0$ 、 $1/L = \kappa g(\gamma_s - 1) \cdot w_0 c / u_*^3$ 、 k_s ：浮遊砂流の相当粗度、 \bar{v} ：浮遊砂流における動粘性係数、 B ： $u_* k_s / \nu$ の関数である。特性長 L は、浮力によるエネルギー輸送速度と粘性によるエネルギー逸散速度の比で Monin-Obukhov 長⁵⁹⁾に相当する。式(24)によれば、浮遊砂の流速に及ぼす影響は底面近くよりも $u_* y / \nu$ が增大する水面近くで大きいことがわかる。

次に、得られた流速分布と拡散方程式(9)から濃度

分布式

$$\frac{c}{c_a} = \left[\left(\frac{h-y}{h-a} \right)^{1+\phi_2} \cdot \left(\frac{a}{y} \right)^\alpha \right]^z \dots \dots \dots (25)$$

を得る。ここに、 $\phi_2 = \alpha \frac{h}{L}$ である。

上式は $\phi_2 = 0$ のとき Rouse の式(11)に一致する。

4. 貯水池の水温分布と濁水の挙動

自然河道に築造されたダムにより貯水池内に河川水が長期間滞留するとき、水温の変化、微細な粘土鉱物の浮遊による濁水化、富栄養化などダム建設以前には存在しなかった新しい水質問題が現われ

てきた。大規模貯水池の建設に伴う自然環境へのインパクトを軽減するためには、濁水軽減対策と並行して貯水池水の水温分布、成層場での洪水に伴う濁水の挙動を十分理解し、それらを予測する解析・数値モデルを構築することが必要である。

貯水池水は、日射、大気圏との熱のやりとり、流入水・放流水に伴う熱の流出入に応じて水温分布を形成する。水温分布は池内水の流動形態を支配するため、貯水池水質現象の把握には、第一に水温成層型貯水池水の挙動を明らかにすることが必要である。

(1) 貯水池内の水温分布とその解析

自然湖沼の水温分布を求める試みは古くからなされているが、近年は水の有効利用を図るうえからダム貯水池の水温予測の必要性が生じてきた。吉川・山本⁶⁰⁾は、自然湖および全国26か所のダム貯水池の水の流動の年周変化、温度躍層の発達・破壊・消滅とその原因について詳細に調べ、水理学的アプローチにより水温分布形成の大略把握を行い、ダム築造前と築造後の放流水の水温変化を予想する方法を提案した。

貯水池の流動は、水温分布の特性から成層型および混合型に分けられる。安芸・白砂^{61,62)}は、貯水池の流動がどちらの形態をとるかの判断基準として

$$\alpha = \frac{\text{貯水池年間総流入量}}{\text{貯水池総容量}}, \beta = \frac{1 \text{ 洪水総流量}}{\text{貯水池総容量}} \dots \dots (26)$$

を用いている。すなわち、 $\alpha < 10$ 程度ならば安定した成層型、 $\alpha > 20$ 程度ならば混合型になる。

岩佐・野口・児島⁶³⁾は、貯水池の成層形式を分類するための指標として貯水池の平均的内部フルード数 Fd を用いている。

$$Fd = \frac{LQ}{DV_i} \sqrt{\rho_0 / \left(-g \frac{d\rho}{dy} \right)} \dots \dots \dots (27)$$

ここに、 L ：貯水池の長さ、 D ：平均水深、 Q ：流出量、 V_t ：総貯水容量、 ρ_0 ：代表密度、 ρ ：貯水池内密度、 y ：鉛直上向きにとった座標、である。

岩佐らは、わが国のダム貯水池を次の4つの成層形式に分類した。

- (a) 成層Ⅰ型：水文気象要因によって成層化がなされる貯水池
- (b) 成層Ⅱ型：水温成層の形成に対し移流熱量の占める割合が大きい貯水池
- (c) 混合型：夏期のごく短い期間を除けば1年を通じて顕著な成層がみられない貯水池
- (d) 中間型：これらの性格をあわせもつ貯水池

年総流出量 Q_0 と総貯水容量 V_t の比 (Q_0/V_t) と F_d の関係から成層型の分類を示したものが図-3である。この図より、わが国の貯水池では成層化と非成層化の境界は $F_d=0.01$ で与えられ、貯水池の成層化の目安として $\alpha=18.5$ が得られている。「ダム貯水池に関する水質調査委員会」では、全国の85の既設ダムについて貯水池の成層型と水理指標の関係を調べ、表-1の結果を得ている⁶⁴⁾。ここに、 α_1 は7月総流入量と貯水池総容量の比である。

Huber・Harleman・Ryan⁶⁵⁾は、成層化貯水池においては、等温線は年間を通じて縦断方向、横断方向にほぼ一様で、貯水池の水温構造は鉛直温度分布で表現できることに着目し、水温分布の一次元予測モデル(MITモデル)を構築した。貯水池は各標高の平均幅をもつ厚さ Δy 長方形の水平層の積み重ねで構成されているものと考え、それぞれの層について質量保存式、熱の保存式を

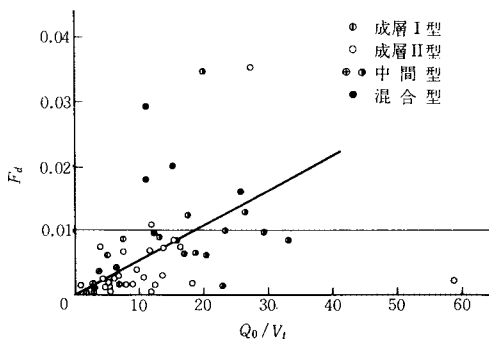


図-3 F_d と Q_0/V_t の関係

表-1 貯水池の成層型と水理指標の関係

評 価	α	F_d	α_1
成層が形成される可能性が十分ある	<10	<0.01	<1
成層が形成される可能性が程度ある	10~30	0.01~0.05	1~5
成層が形成される可能性がほとんどない	30<	0.05<	5<

適用する。

$$\frac{\partial Q_v}{\partial y} = q_i - q_o \dots \dots \dots (28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial y} (Q_v \cdot T) = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial y} \left[A(D_m + E) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{q_i \cdot T_{in} - q_o T}{A} - \frac{1}{\rho_c A} \frac{\partial (\phi_0 \cdot A)}{\partial y} \dots \dots \dots (29)$$

ここに、 Q_v ：標高 y の鉛直方向流量、 q_i 、 q_o ：貯水池への水平方向流入量、流出量、 $T(y, T)$ ：標高 y の貯水池内水温、 D_m ：分子拡散係数、 $E(y, t)$ ：乱流拡散係数、 $T_{in}(t)$ ：流入水の水温、 $\phi_0(y, t)$ ：標高 y に達する熱輻射、 $A(y)$ ：標高 y の貯水池水面積である。

池内流れおよび流出流れの流速分布は運動方程式を解かず、選択取水の式を用いる。適切な初期条件、境界条件のもとで、これらの基本式を解くことにより貯水池内水温分布および取水水温をよい精度で予測している。

貯水池水温の一次元予測モデルはわが国の電力中央研究所においても開発されている(電研モデル)⁶⁶⁾。電研モデルはMITモデルを改良し、濁度解析も可能なように拡張され、多くの貯水池の濁度解析に用いられている⁶²⁾。

(2) 成層化貯水池の濁質挙動とその解析

温度成層がある貯水池に濁水が流入すると、一般に濁水は貯水池と同じ密度の層に侵入することが観察されている。洪水時に池内に貯留された濁水が沈殿することなく滞留し常時の放流によって長期間下流の河川に放流される現象を濁水の長期化現象という。この現象は洪水終了後数か月に及ぶ事例も報告されており、ダム建設後の水質変化の予測および水質保全対策の効果の評価のために水理学的面からとらえた予測法を確立することが重要である。

a) 成層型貯水池における流入濁質の運動

洪水時の濁水が貯水池に流入すると、潜入部で貯水池水と激しく混合し、それ自身が広い密度分布をもつようになる。このような濁水が成層している貯水池内を進入するとき、周囲水との密度の大小関係により濁水の流動は図-4に示すような5つの代表的な領域に分けられる。

- (1) 流入部の希釈混合と潜入
- (2) 下層密度流等流部
- (3) 下層密度流先端部
- (4) 中層密度流と下層密度流分岐部
- (5) 中層密度流上流部
- (6) 中層密度流先端部

① 潜入点位置

貯水池流入端の潜入点位置は、貯水池密度流の境界条件となるので重要である。江頭・芦田⁷⁵⁾は、潜り込み位置付近の流れに対し運動量式をたて、これと等流水深から潜り込み水深 h_p の推定式を求めている。 h_p は単位幅

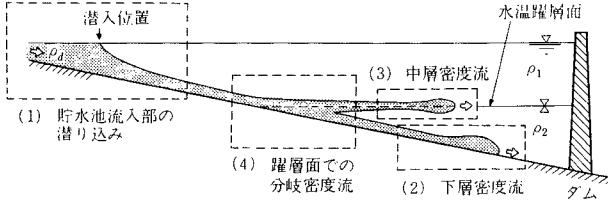


図-4 成層型貯水池の密度流

流量 q の $\frac{2}{3}$ 乗, 密度差と流路床勾配の積の $\frac{1}{3}$ 乗に比例する式形をとる.

福岡・福岡・中村⁷³⁾は潜入位置付近の密度流は急変流となることに注目し, 急変流解析に基づき潜入点水深, 界面形状を求めている. 潜入点水深 h_p または H_p は $\sin \theta$ を底勾配とすると式 (30), (31) で表わされる.

$$H_p = \frac{h_p}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\frac{1}{F_p^2} \frac{q^2}{\varepsilon g}} \dots\dots\dots (30)$$

$$F_p^2 = \frac{(1-h_2^*)^2 \cos \theta + (1+h_2^*)x_{II} \sin \theta}{2\beta' + \lambda' \cos \theta - 1 / (1-x_I \tan \theta)} \dots\dots\dots (31)$$

ここに, $h_2^* = h_2/h_p$, $x_I = L_I/h_p$, $x_{II} = L_{II}/h_p$, h_2 : 断面 II の下層水深, L_I , L_{II} : 断面 I と II の位置, $\beta' = \int_0^{h_2} u_0^{*2} dy^*$, $y^* = y/h_p$, $u_0^* = u_0/\bar{u}_p$, u_0 : 断面 II の流速, \bar{u}_p : 代表流速, $\lambda' = \int_0^{h_2} p'^* dy^*$, $p'^* = p'/\frac{1}{2} \rho_2 \bar{u}_p^2$, p' は静水圧からの差圧, である. 未知の係数 β' , λ' は, 貯水池密度流に類似のキャピティー流れ⁷⁶⁾の解を用いて計算され, $x_{II} = 0.1$ で $h_2^* = 0.882$, $\beta' = 1.142$, $\lambda' = 0.396$ である.

式(30)と実験室, 野外の実測との比較を図-5に示す.

② 下層密度流・中層密度流・分岐密度流

図-4に示すような濁水密度流については, 福岡ら⁷⁰⁾⁻⁷⁴⁾が室内実験によって調べ, 流動機構を明らかにしている. さらに, 非定常運動量方程式, 連続式を用い, 下層流から中層流と新たな下層流に分岐する位置, 分岐流量, 先端部の移動速度, 濁水の最大厚さなどについてモデルを提案し, 二次元・三次元成層型貯水池の濁水の流動過程の総合化を行っている.

芦田・江頭・中川^{77), 78)}は, 下層密度流について先端部への周囲水の混入を考慮することにより, 平野・羽田野⁷⁹⁾も, 混入を考慮に入れ, 特性曲線法を用いることにより先端部高さ, 先端速度および濃度の流下方向変化の式を導き実験と比較を行っている. このほか, 躍層上を進入する濁水がダム壁に衝突することによって形成される段波の挙動について研究がされている⁸⁰⁾.

b) 貯水池濁度の予測モデル

濁水の長期化現象を解明するため, 安芸ら^{66), 67)}は MIT の水温予測のための一次元モデルに濃度収支式

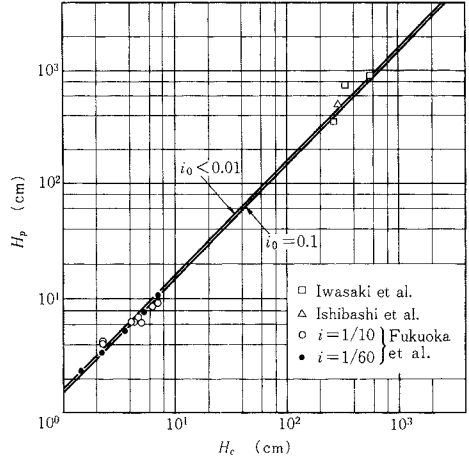


図-5 潜入点水深

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial y} (Q_v c) = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ A(D_m + E) \frac{\partial c}{\partial y} \right\} + \frac{1}{A} (q_i c_i - q_o c) - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial y} (w_o A c) \dots\dots\dots (32)$$

を加えて濃度予測を行った. ここに, $c(y)$: 標高 y の濃度, w_o : 懸濁粒子の沈降速度である. このモデルは等温度線が水平面内ではば一様であることが要求されており, この条件が満たされている貯水池の濁度分布の予測には有効である. 式 (32) は, 貯水池の濁度分布が移流・拡散・沈降に支配され, 各項の見積りの正確さがモデルの予測精度を支配することを示している. 足立・中村^{81), 82)}は, 横山ダム貯水池の濁度解析を安芸・白砂モデルで行った結果, 沈降速度を一定とした解析では洪水時の流入濁質粒度の変動および分級による貯水池内の濁質粒度の変化を取り込むことができないため濁質現象を十分に把握できない場合があることを指摘し, 流入濁質の変化を考慮し安芸・白砂モデルに改良を加えている. 宮永・安芸⁸³⁾は, 電研モデルにより水温分布, 流れを求め, これに濁質粒度の変化と濁度係数の粒径依存を考慮して新たなモデルを提案している.

以上のモデルはいずれも一次元モデルである. 洪水中・洪水後に濁水塊が貯水池内を流下したり, 成層破壊が起こるような貯水池流動の場合には一次元解析法では不十分となる. この場合には現象の一様性を満足する程度に流下方向にも分割したコントロールボリュームをとる二次元解析が必要となる.

芦田・江頭⁸⁴⁾は, 潜入点位置より上流を一次元分散方程式, 下流では二次元拡散方程式で表現し, 二次元領域を下層密度流と中層密度流に分割し, 濁度分布の解析を行っている. 岩佐ら^{68), 69)}は, 貯水池を水平と鉛直要素に分割し, それぞれの要素で水流の連続式, 流下方向・鉛

直方向の運動方程式、濁度収支式、水温収支式を適用し、さらに、これらの式を階差式に変形し、与えられた初期条件、境界条件のもとに濁度と水温の変化について解いている。このモデルは、1日程度の時間スケールでの水温分布変化、濁度分布変化、濁度の伝播過程を比較的よく説明することができる。

以上のことから、予測精度、計算時間などを考慮すると、年間を通じての水温・濁度予測には原則として一次元モデルを用い、洪水時など短期間予測には二次元モデルを用いるのが適当であるといわれている⁶²⁾。

濁水の予測法の確立のほかには濁水の軽減対策も重要である。このためには、まず流域の管理を適切に行うこと、次に、洪水中の貯水池内濁水を早く流下させることおよび貯水池密度分布を利用した選択取水を行うことが必要である⁸⁵⁾。

5. ビンガム流体の流動特性

上水、下水の水処理プロセスにおいて形成される各種のフロックは多くの場合汚泥と呼ばれる固液混相流体として扱うことが行われる。汚泥+流動に関してはビンガム流体として挙動することが知られているが、ここでは、ビンガム流体の流動特性という観点から汚泥の管路輸送系における摩擦損失について整理し考察を加えていく。

(1) ビンガム流体の層流流動と摩擦抵抗

a) 基礎的關係式の整理

通常のニュートン流体を対象とする管路流においては、摩擦損失水頭はDarcy-Weisbachの關係式(33)によって表わされる。

$$h_f = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{u}^2}{2g} \dots\dots\dots(33)$$

ただし、 h_f :摩擦損失水頭、 f :摩擦抵抗係数、 L :管長、 D :管径、 \bar{u} :断面平均流速

ニュートン流体の層流条件下にあっては抵抗係数 f はレイノルズ数 ($Re = D\bar{u}/\nu_0$ 、ただし、 ν_0 :ニュートン流体の動粘性係数)の関数として式(34)のように示される。

$$f = 64/Re \dots\dots\dots(34)$$

これに対して、ビンガム流体の場合にあってはパラメーターとなる物性値が、ビンガム流体の粘性係数 η とビンガム流体の降伏値 τ_y との2つになるため解析は若干複雑になる。この問題に対して、Hedström (ヘッドストレーム) は次元解析の観点から式(35)の関係を導入した。

$$\tilde{f} = F \left[\tilde{Re} = \frac{D\bar{u}\rho}{\eta}, He = \frac{\tau_y D^2 \rho}{\eta^2} \right] \dots\dots\dots(35)$$

ただし、 \tilde{f} :ビンガム流体の摩擦抵抗係数、 $F[]$:未知の関数、 ρ :ビンガム流体の密度

ここに導入された無次元量 \tilde{Re} 、 He はそれぞれビン

ガム流体のレイノルズ数、ヘッドストレーム数と呼ばれる。 He はビンガム流体の特徴である降伏応力に関する指標とみなすことができる。ここに定義される \tilde{f} を使うとビンガム流体の損失水頭 (\tilde{h}_f) は式(33)と同様に式(36)で表わされる。

$$\tilde{h}_f = \tilde{f} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{u}^2}{2g} \dots\dots\dots(36)$$

Hedström は式(35)の関数形について式(37)のような関係を与えた。

$$\frac{1}{\tilde{Re}} = \frac{\tilde{f}}{64} - \frac{1}{6} \frac{He}{\tilde{Re}^2} + \frac{64}{3} \frac{He^2}{\tilde{f}^2 \tilde{Re}^2} \dots\dots\dots(37)$$

b) 粒子浮遊流のビンガム流体としての粘性係数の表示

水処理汚泥もその一つの例であるが、粒子浮遊流は固体粒子を浮遊しているという理由によって固体を浮遊しない液体の粘度とは異なる粘度(粘性係数)を示す。粒子浮遊流は多くの場合ビンガム流体として挙動し、それに対する粘性係数(η)は歴史的にはEinsteinの粘性式⁸⁷⁾(式(56))を原形として体積分率で表わした固体濃度(ϕ)の関数で表示する方法がとられる。ここではEinstein, Brinkman⁸⁸⁾、森・乙竹⁸⁹⁾、らが提示した粘性式を結果だけ示しておく。

(a) Einsteinの粘性式

$$\eta = (1 + 2.5 \phi) \eta_0 \dots\dots\dots(38)$$

ただし、 η :粒子浮遊流の粘性係数、 η_0 :液体側の粘性係数(ニュートンに流体の粘性係数)、 ϕ :固体の体積分率

(b) Brinkmanの粘性式

$$\eta = (1 - \phi)^{-2.5} \eta_0 \dots\dots\dots(39)$$

(c) 森・乙竹の粘性式

$$\eta = [1 + 3/(1/\phi - 1/0.52)] \eta_0 \dots\dots\dots(40)$$

ただし、固体粒子は球形粒子と仮定している。

以下においては、疑似水処理汚泥として、凝集性フロック、微細カオリン粒子、活性汚泥フロックを浮遊させた粒子浮遊流を使って、①Hedström数を導入することの有効性、②汚泥流動に際しての粘性係数の推定式の適用性、③粘性式中での液体側+粘性係数のかかわり方の確認、の諸点を検討するために行った実験結果を簡単に紹介していく。

c) 実験および実験結果の概要^{90),91)}

層流流動特性を測定する装置としては大型の毛細管型の粘度計を使用した。管路部を約1mと長くすることによって安定的に高精度を得るようにしてある。貯留槽は容量約37lで温度調節・加温用のヒーターを備えている。

対象とした疑似汚泥は前述した3種の粒子浮遊流であ

る。いくつかの実験を行っているが、ここでは前項において列挙した3点について実験結果の概要を示すことにする。

(a) 汚泥をビンガム流体とした場合の粘性係数の推定式の適用性の検討結果は、図-6に示される。粘性係数と固形物濃度（体積分率）の関係としては、低濃度域ではBrinkmanまたはEinsteinの関係式が、高濃度域では森・乙竹の関係式がよく適合しているといえる。

なお、体積分率の求め方としては、500 ml のメスシリンダーに粒子混合液をとり20時間静置したときの粒子界面の沈降高さに対する初期高さに対する比率をとる方法を使った。

(b) 液相の粘度の影響を温度を変化させることによって調べた。ビンガム流体の粘性係数に対する温度変化の影響は非常に高い固形物濃度の場合を除いて、ほぼ

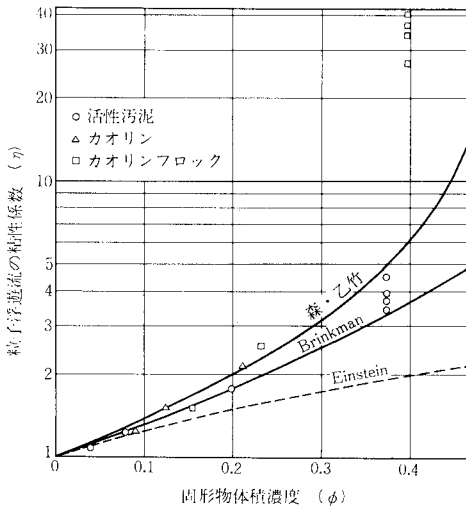


図-6 ϕ の関数としての相対粘性の変化

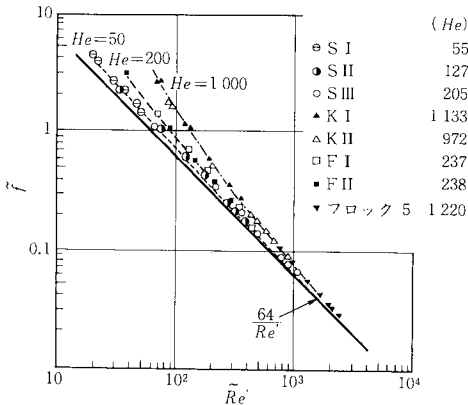


図-7 ヘッドストリーム数をパラメーターとする層流抵抗係数

液相側の粘性係数の温度依存性で説明することができる。

(c) ヘッドストリーム数をパラメーターとする解析結果は図-7に示される。 \tilde{R}_e , He , \tilde{f} を求めるためには実測された η および τ_y を使っている。同図中に示された点線、破線、一点鎖線は He をそれぞれ 50, 200, 1000 とした場合の計算値である。実測結果とのよい対応が認められる。

(2) ビンガム流体の乱流下での摩擦抵抗

式 (57) に定義されたビンガム流体の摩擦損失水頭の表示式における \tilde{f} , \tilde{R}_e の関係をニュートン流体における f と Re の関係のアナロジーで解析した結果について報告する。定性的には乱流条件下における流れのせん断応力が管断面の全領域において大きくなり τ_y の影響は相対的に小さくなるのが予想される。しかし、 η の影響についてはニュートン流体の場合と同様な影響が現われることが予想される。このような傾向は従来からも汚泥の乱流の場合の解析にニュートン流体における Hazen-Williams の関係を適用し、Hazen-Williams の係数を補正することで実用的な解析が進められてきていたことから裏付けられる。

以下においてはビンガム流体の特性値でもある \tilde{R}_e と \tilde{f} の関係を検討した結果を示す。対象とする固形粒子としては、非常に破壊されやすい凝集フロック、破壊はされないが微細なカオリン粒子、破壊されないプラスチック粒子、を使ってそれぞれが示す \tilde{R}_e と \tilde{f} の関係を調べ清水が示す Re と f の関係と比較した。

実験および実験結果の概要は次のようである⁹²⁾。

実験装置としては、6 m の測定区間をもつ管路系を使い、損失水頭を求め解析を行った。各粒子浮遊流の η は別途定めている。

解析結果は図-8に示される。縦軸は \tilde{f} または f の測定値を、横軸は \tilde{R}_e を取っている。

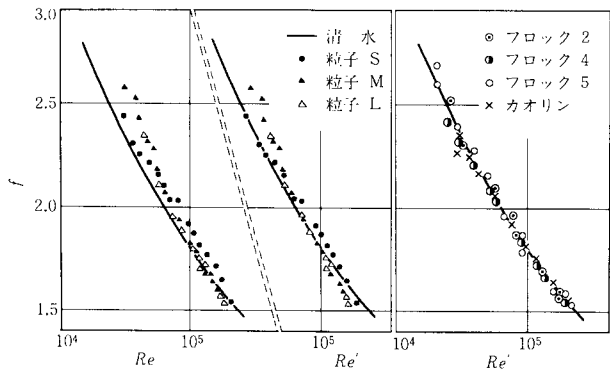


図-8 乱流における抵抗係数

相対的にいって、破壊されやすい凝集フロックおよび微細カオリン粒子については \bar{R}_e を使えば摩擦抵抗係数とレイノルズ数の関係はニュートン流体（清水）の場合とはほぼ同様に整理されることがわかる。しかし、破壊されないプラスチック粒子の場合は \bar{R}_e を使っても清水の場合の関係式とは若干の乖離が認められる。粒子径の影響あるいは強度の影響をいかに評価していくかは今後の問題となろう。

本論においては、水処理汚泥といった扱いにくい固形物を対象とした固液混相流の流動状態をいかに整理していくという観点からビンガム流体に特有の降伏応力、粘性係数を解析の主要なパラメーターとしていく方法の有効性を示した。ニュートン流体への単なるアナロジー、補正係数の導入という解析法から、今後はその流体の物性値を直接評価の対象として研究を進めていくことが重要である。

6. 流体輸送管路の固液混相流

固体粒子群の管路による輸送は、固体粒子群を液体の管路流送と同じ形態として流体輸送するもので、固体の輸送が連続的に行えること、輸送コストが他の方法に比べて一般に低廉となること、粉塵の発生など環境汚染がないこと、管路設置に場所をとらず地下埋設も可能なこと、等多くの利点を有している。

この輸送方法の採用にあたって生ずる諸問題の大部分は次の2点に集約されよう。それは、1) 輸送エネルギーの効率を高めること、2) 管路閉塞の防止、である。

(1) 固体粒子群の管路内流動形態

Durand⁹⁴⁾ は Durand & Condolios⁹⁵⁾ が行った水平管路内の砂礫の流送についての広範な一連の実験から、その管内流動形態を次の4つに分類した。

- I. 粒子は完全浮遊、断面内一様濃度の流れ（均質浮遊流）
- II. 粒子は完全浮遊、しかし断面内濃度は一様でない流れ（非均質浮遊流）
- III. 粒子は浮遊と跳躍（saltation）により運ばれる流れ（摺動層を伴う非均質流）
- IV. 静止堆積層を形成、粒子はその層上の跳躍をして運ばれる流れ（静止堆積層を伴う非均質流）

管路の動水勾配 i と V_m との関係、流送濃度（吐出し濃度）（体積比） C_v をパラメーターとして図示すると、典型的な変化の様子は図-9 のようになることがわかって⁹⁵⁾、すなわち、一定濃度で流した場合、動水勾配 i の値は V_m のある値に対して極小値をとる。同図中の破線はこの極小となる点を連ねたもので、このときの流速を限界流速（critical velocity）（記号 V_c ）という。また、同図中の斜線を施した部分は静止堆積層を伴う領

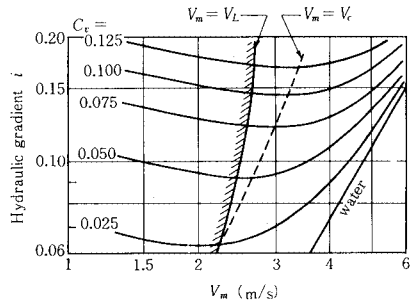


図-9

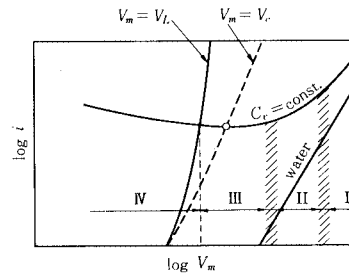


図-10

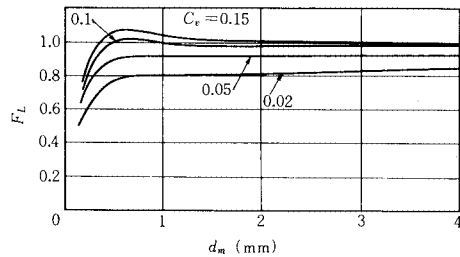


図-11

域、すなわち流動形態IVの領域であり、その領域の右端の流速を限界堆積流速（critical deposit velocity）（記号 V_L ）という。

図-9の濃度一定の線に沿っての流動形態区分を概念的に書き入れたものが図-10である。

(2) 限界堆積流速

Durand & Condolios⁹⁵⁾ は限界堆積流速 V_L について $V_L/\sqrt{2gD(\gamma_s-1)} = F_L$ (41) で与えられた無次元値 F_L をとり、この値を混合砂礫について図-11のように与えた。ただし、 γ_s : 粒子の比重、 D : 管径、 d_m : 平均粒径、である。 d_m が 1 mm 以上になると F_L の値は d_m にほとんど無関係となることがこの図から認められる。

(3) 管路の流送抵抗

Durand & Condolios⁹⁵⁾ は $D=40\sim580$ mm、 $d_m=0.2\sim25$ mm、 $C_v=2\sim22.5\%$ 、流動形態IVを含めぬ 310 個の測定値を整理して次式を導いた。

$$\frac{i-i_w}{iC_v} = 173 \left[\frac{V_m \sqrt{C_D}}{gD} \right]^{-3/2} \dots\dots\dots(42)$$

ただし、 i ：粒子混合体流速時の管路の動水勾配、 i_w ：固液混合体の断面平均流速 V_m と同一の流速で清水のみを流送するときの動水勾配、 C_D ：粒子の抗力係数、 C_v ：粒子の流送濃度（吐出し濃度）（体積比）である。これが $\gamma_s=2.65$ の砂礫のみを流送対象物としたときの Durand の式である。 w_f を静水中の粒子の沈降速度とすると、 C_D は

$$C_D = \alpha(\gamma_s - 1)gd/w_f^2 \dots\dots\dots(43)$$

で表わされる。粒子が球形の場合には $\alpha=4/3$ である。式 (42) は $\gamma_s=2.65$ の砂礫の実験結果のみに基づいてつくられた式であり、それ以外の比重をもつ流送物質についてのこの式の適用性は検討されていなかった。しかし Zandi & Govatos⁹⁶⁾ は $\gamma_s=2.65$ 以外の比重をもつ流送物質について他の研究者のデータにも適合するように式 (42) を次のように書き直した。

$$\phi \equiv \frac{i-i_w}{i_w C_v} = K \left[\frac{V_m^2 \sqrt{C_D}}{(\gamma_s - 1)gD} \right]^{-3/2} \dots\dots\dots(44)$$

K の値としては $K=81$ あるいは 121 の 2 種類の値が用いられている（後出図—12）。 $K=81$ の場合には式 (44) に $\gamma_s=2.65$ を代入すると同式は式 (42) とほとんど一致する。しかし式 (42) より式 (44) の方が一般性があるので、現在では式 (44) で $K=81$ もしくは 121 とおいた式が Durand & Condolios の式といわれて広く用いられている。

（4） Durand & Condolios の式に対する補正

Zandi & Govatos⁹⁶⁾ は彼らより以前の研究者による 2 549 個の測定値を図—12 のように整理した。流送物質は砂礫のほか、石炭、石灰岩粒子、セメント、カオリン、

ハウ砂、それに各種鉱石、リン酸肥料等と多種多様である。横軸 ϕ の値が大きくなると Durand & Condolios の式は実験値との適合性が悪くなるとして彼らは図中に記入した折線式を提案している。同図中の N_i は

$$N_i = V_m^2 \sqrt{C_D} / (\gamma_s - 1)gDC_v \dots\dots\dots(45)$$

で与えられる無次元量であるが、その内容は ϕ との共通部分が多く、この場合に最適なパラメーターであったかどうかは検討の要がある。彼らが整理した実験値の範囲はきわめて多岐にわたり、このため個々の実験値に対する物体形状の影響、物質の粘着性（したがって混合流体の非 Newton 性）の影響、等が明らかにされていない。このため、図—12 の実験値については今後さらに再整理が望まれるもののように思われる。

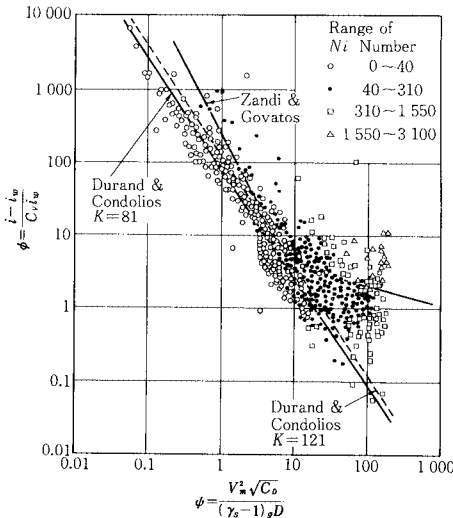
しかし、既述のように Durand & Condolios の式は元来砂礫の流送に対してつくられたものであるから、微細砂や土泥の流送時に対応する ϕ の値の範囲に至ると、この式は実験値としたいに合わなくなる。式 (44) では $V_m \rightarrow \infty$ で $(i-i_w) \rightarrow 0$ となるがこれは理論的には不合理で、 $V_m \rightarrow \infty$ で均質流となるから、 $f \equiv f_w$ と仮定するときには

$$\phi \equiv \frac{i-i_w}{C_v i_w} \rightarrow \frac{\{(1-C_v) + \gamma_s C_v\} i_w - i_w}{C_v i_w} = \gamma_s - 1$$

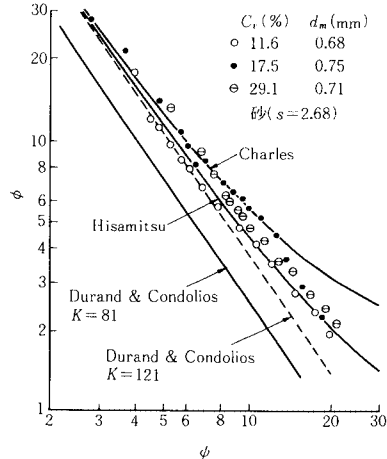
となるはずである。さらに細かく考えると、粒子浮遊流においては乱れが抑制され、管壁の摩擦抵抗係数 f は f_w より小さくなるであろうから、 ϕ の極限值は $\gamma_s - 1$ よりも小さくなることが予想される。このような立場からつくられたものと解釈できる式として Charles の式⁹⁷⁾

$$\phi = 120 \phi^{-3/2} + (\gamma_s - 1) \dots\dots\dots(46)$$

および久光・東海林・小杉の式⁹⁸⁾



図—12



図—13

$$\phi = 120 \phi^{-3/2} + (\sqrt{\gamma_s} - 1) \dots \dots \dots (47)$$

などである。図—13は ϕ の値が大きな範囲における実験値と計算式の比較を示したものである。

(5) 掃流砂、浮遊砂と管内三次元的現象の内部機構

前節までの記述は粒子輸送量、混合体流量、動水勾配等の相互関係を、一次元的な量 V_m , i , C_v , 等を測定することにより求めるいわばグローバルな立場からの考え方からのものであったが、一方、粒子群の管路輸送問題の本質的進展を図るためには管内の三次元的な現象の内部機構を明らかにすることも必要であるとする立場からの研究もいろいろとなされている。その具体的な接近方法は、さしあたり円管内の流砂についても開水路の場合と同様に砂の輸送機構を掃流と浮遊とに分け、この2つの全く異質の力学機構に基づく運動が管路という限定された空間内に共存する場合、これらの全体的な結果として現われる量である V_m や i に対してどのように寄与しているかを調べようとするものである。以下にこのような考え方から行われた特徴的なくつかの研究を記す。

a) 管水路内の掃流砂の抵抗

管路壁面と全体的な摺動層との間に生ずる摩擦力は V_m の増加とともに急激に減少する。鮎川・越智¹⁰⁰⁾は、 V_m 増すと掃流砂の一部が浮遊砂へと移行するための摺動層自体の重量が減少し、その結果として流動粒子群と壁面との間の管路単位長当たりのみかけの摩擦力 F が減少するとして、減少の割合を次元解析と実験により次式を得ている。

$$i - i_w = 1.8(\gamma_s - 1)\xi_s C_v \left(\frac{d_m}{D}\right)^{-0.707} \cdot \left(\frac{V_m}{\sqrt{(\gamma_s - 1)gd_m}}\right)^{-2.72} \left(\frac{V_m}{w_0}\right)^2 \dots \dots \dots (48)$$

ここに、 ξ_s : 粒子の空気中の固体摩擦係数、他の記号はすべて既述のとおり、

b) 沈殿堆積を伴う掃流

管路内を流れる固液混合体の V_m を低下させてゆくと、液体の掃流力は低下し、固相と液相の分離が進み、ついには管底を摺動している粒子の動きが止まり、静止堆積層を形成するようになる。この状態は管路輸送では最も警戒を要する管路閉塞の初期的段階ともいえるものである。しかし、図—9に示したように、限界堆積状態に相当する流れにおいては $i - i_w$ の値はいまだその極小値の近くに止まっており、このため限界堆積流の機構を研究することは $i - i_w$ の極小値の力学的内容を把握するうえで有用である。那須・林¹⁰¹⁾はこのような考え方から限界堆積状態にある静止堆積層を有する管路の掃流の問題を研究し、その場合の掃流砂量を求めるための連立方程式群を立て、これによりこの状態における掃流砂量

を計算することにより管路の輸送砂量を求める方法を提案している。

c) 管水路の粒子浮遊流

水平な管路の粒子浮遊流に対して式(9)が基本的には成り立つことが Hsu, Beken, Landweber & Kennedy¹⁰²⁾により検証されている。式(9)に基づいて解析を行う場合、次の点に開水路移動床の場合とは異なった問題がある。

(1) 内管壁からの粒子のはね返り。

(2) 管路輸送物質の粒径、したがって w_0 の値が大きい場合が多く、また c の値も一般の開水路の浮遊流の場合より大きいのが普通である。このため cw_0 の値は開水路の場合に比べてはるかに大きく、オーダー的に異なることもまれではない。

円管内の y 方向の濃度および流速の各分布を明らかとしたものに是石・八木・奥出の研究¹⁰³⁾がある。彼らは 100 mm 径のガラス管内に $d_m = 0.25$ mm, $\gamma_s = 2.65$, $w_0 = 35$ mm/s の細砂を流して実験を行い、濃度および流速の各分布式として次式を得ている。

$$\frac{c}{C_v} = (1 + 54.7 \phi^{-1.38}) \cdot \exp\left(-\frac{26.5}{\phi} \frac{y}{D}\right) \dots \dots \dots (49)$$

$$\frac{v}{v_w} = 1 + \phi^{-1.25} C_v \xi \dots \dots \dots (50)$$

ただし、 y は管底より鉛直上向きの座標

$$\xi = \begin{cases} 30 + 87 \log_{10}(y/D) & (0 < y/D \leq 0.5) \\ 15 + 36.6 \log_{10}(y/D) & (0.5 \leq y/D < 1) \end{cases} \dots \dots (51)$$

V_m : 混合体の断面平均流速。 v : 粒子を含んだ水流の局所流速。 v_w : V_m の値を同じくする清水流送時の同じ場所での局所流速。 ϕ , C_v , D の記号は前と同じ。

式(51)から $y/D < 0.45$ では $\xi < 0$ となるから v/v_w の値は C_v の増加とともに減少し、 $y/D > 0.5$ では $\xi > 0$ となるから v/v_w の値は C_v の値とともに増加する様子が表わされている。

7. 固液混相流に関する最近の研究の動向

本章は固液混相流の最近の研究の動向をとりまとめたものである。

(1) 固液混相流の流速分布

図—14は、Lumleyの論文¹⁰⁴⁾の中で紹介されている Kolansky らによって測定された微粒子を含む空気流の流速分布である。図—15は Mizushina ら¹⁰⁵⁾によって測定された高分子を含んだ管路流れの流速分布を示す。

図—14では粒子濃度の増加に伴う Kármán 定数の変化は見出されず、粘性底層の厚さのみが変化している。図—15では粘性底層は厚くなっているが平均流速分布は必ずしも対数則に乗っているようにはみえない。しい

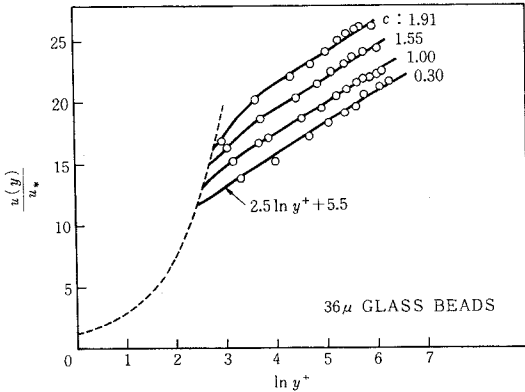


図-14 Lumley の論文¹⁰⁴⁾にみられる Kolansky らによる微粒子を含む空気流の流速分布

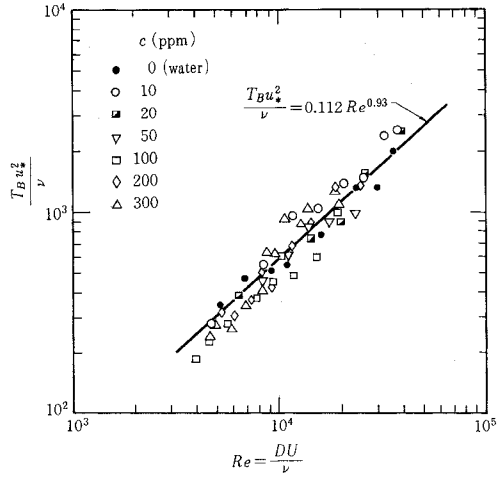


図-16 高分子浮遊流におけるレイノルズ数-バースティング発生周期 T_B の関係¹⁰⁵⁾

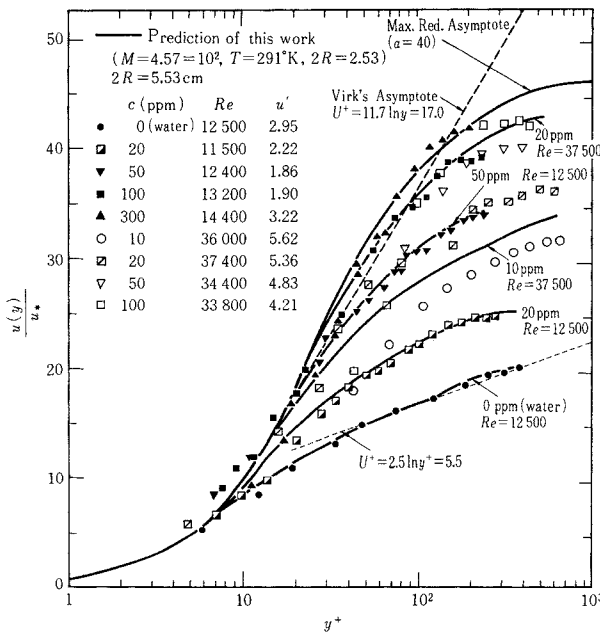


図-15 Mizushina ら¹⁰⁶⁾による高分子を含む管路流れの流速分布

て対数分布に合わせると、カルマン定数は大きく減少している。

一方、土砂浮遊流で先駆的な研究である Vanoni の流速分布の測定値¹⁰³⁾はカルマン定数が大幅に減少している。これら3つの異なる混相流は抵抗の減少という意味ではすべて共通の特性を有しているが、流速分布形は異なっている。しかしこのようなタイプの異なる混相流について同じ程度の精度で平均流速分布を測定した例が少ないために、カルマン定数が変化すると断定することはできない。従来の実験データの中には本来適用することが不適当である管路中央部や開水路の水面近くの流速分布にまで対数分布則を適用しているため、得られたカル

マン定数は平均値的なものになっている。

熱線流速計や、レーザードップラー流速計による測定結果が集積されてくるにつれて、清水の流れといえども水面まで、あるいは管路中央部まで対数分布則は成立していないことが明らかになってきた。これらのことを考えるとき、混相流の平均流速分布についてもさらに検討されなければならないであろう。

(2) 混相流の乱流構造

——組織的運動と抵抗——

粒子浮遊流の場合には実験結果の集積が不十分なのに対して、高分子を添加した流れについては近年精度の高い実験が行われるようになってきている。高分子添加流では、浮遊粒子を含んだ流れにみられるような効果(成層効果、有効体積の減少、粒子間相互作用)は存在しない。しかし抵抗の減少という意味では(中立浮遊粒子では抵抗は増大するが)両者は共通している。したがって高分子を含んだ流れの抵抗則を考えることは、今後土砂を含んだ流れの抵抗則を検討するうえで役立つものと思われる。

土砂浮遊流の場合には有効粘性の増大により粘性底層厚さが増大し、その結果として抵抗が減少するという解釈が多いが、高分子添加流では粘性係数の増大は高々1%程度であり、粘性係数の変化からだけでは粘性底層厚さの増大は説明できない。それにもかかわらず抵抗は最大40%近くも減少する。そこで、このような混相流の抵抗の減少の原因を乱流境界層中の組織的運動との関連のもとで考えてみる。図-16は Mizushina ら¹⁰⁶⁾によって測定された管路の高分子添加流におけるレイノル

ズ数 ($R_e = UD/\nu$)-パースティング発生周期 T_B の関係を示す。この図よりわかるように清水の流れと高分子添加流では抵抗が異なるが両者の R_e-T_B 関係には変化はみられない。このことは抵抗の減少により摩擦速度 u_* が減少するときにはパースティングの発生周期 T_B は大きくなっていることを示す。この結果、レイノルズ応力の大部分を生産するパースティングの発生頻度が減り、抵抗の減少が生じたものと推論される。粒子浮遊流においても同様の考えに基づく実験が望まれるが、そのためには粒子浮遊流の新しい計測技術の開発が必要となる。

(3) 混相流における抵抗の増減とその理論的研究

混相流の乱流の中に見出される組織的運動に関連して、これを少し異なった観点から研究したのとして Saffman¹⁰⁷⁾ や Landahl¹⁰⁸⁾ に始まる混相流の微小攪乱に対する安定性の研究がある。Landahl は混相流について粘弾性モデルをつくり、変曲点分布をもつ流れの安定計算を行っている。その結果混相流では変曲点不安定は安定化の方向に向かうことを確かめている。すなわちそれだけレイノルズ応力の生産が減少し、抵抗は減少するわけである。表一2 は Landahl によってまとめられたいくつかのタイプの流れの安定性と抵抗の増減の関係を示すものであり、流れの安定性と抵抗の増減は強い関係をもっていることがわかる。

これに対して Lumley¹⁰⁴⁾ は浮遊粒子の存在は平均運動に対しては流れの粘性係数を変えないが、乱流運動に対してはみかけの粘性を増すように働くと考えている。このように考えると Kolmogoroff スケール $\eta (= \nu^{3/4} \epsilon^{-1/4})$ は清水に比べて大きくなり、粘性逸散に関与する波数 ($\propto 1/\eta$) は逆に大きくなる。よって粘性底層のすぐ外側の乱れは高波数成分が減り、結果として粘性底層の厚さが清水に比べて厚くなり、抵抗は減少するということになる。このような解析は今のところすべて比較的単純な構造をした流れで、かつ粒子濃度も小さい場合に限られている。水工学の分野で現われる混相流は多くの場合複雑な境界条件をもち、かつ粒子濃度もかなり高い場合が多い。工学的に意味のある解析結果を得るためにはある程度大胆な仮定を持ち込んだモデルを設定せざるを得ないであろう。

るを得ないであろう。

以上の研究はすべて滑面固定床上の流れについてのものであった。粗面上の混相流については Saffman¹⁰⁹⁾ によって準渦度 (pseudo vorticity) を導入した乱れの構成方程式の解としてスリップ速度の変化が得られている。移動床上の流れの抵抗則においても、流速分布における壁面でのスリップ速度は今後検討されるべき問題になろう。

(4) 河川工学上の混相流の問題

近年河川を対象として混相流問題の解明を目指した研究も多いが、その主要なものをここで列挙する。

a) 洪水時の浮遊土砂と高水敷への浮遊土砂の堆積

洪水時の水位と浮遊土砂濃度 SS の時間変化について現地観測が行われてきた。すでに吉川¹¹⁰⁾ によって SS ピークが洪水時のピークの前に現われることが指摘されていたが木下¹¹¹⁾ は、石狩川出水 (1981 年の 15 号台風) では SS ピークは水位ピークの出現の 6~7 時間前に起こっていることを報告している。この原因は流れと河床波の相互作用にあるといわれているが、浮遊砂の存在が両者の関係にいかなる影響を与えているかを洪水時の河床形態、浮遊砂の現場実測を通して明らかにしておく必要がある。

伊勢谷¹¹²⁾ は茨城県桜川で洪水時の浮遊土砂の観測をし、次のことを見出した。河道中央部では高水敷の氾濫水位にあたる河岸満水位をこえる高さでは本来浮遊し得ないような粗い砂が低水路沿い 2~4 m の範囲の高水敷上に堆積しており、堆積層の上層ほど粗くなっている。この理由として高水敷が冠水する状態では低水路と高水敷の境界付近で強い boil が発生し、これによって粗い砂が河床から浮遊させられ、それが高水敷上に堆積すると推論している。木下¹¹¹⁾ は 1981 年 8 月の前線と台風 12 号による石狩川の大出水 (12 000 m³/s) で生じた高水敷上の堆積層の調査を行った。洪水時の高水敷上の浮遊砂の堆積現象は、水位上昇期に主に発生しており、堆積機構については伊勢谷の推論を裏づけるものとなった。

b) 浮遊砂を伴う河床変動

浮遊砂量が支配的な河床変動は、河口付近や航路でみられ、また貯水池の堆砂現象もこの種の河床変動に属する。この問題を解明するには浮遊砂の非平衡性および河床での境界条件について十分な検討をする必要があり、今後に残された課題である。

c) 平衡河道横断形状に果す浮遊砂の役割

一般に河川には平衡横断面形状が存在するといわれている。すなわち側岸の底部での侵食量と堆積量が平衡している。このような平衡横断面形状がどのような機構で生ずるかは河道計画に重要な問題となる。河床と河岸の流砂が掃流砂のみの場合は、側岸部の横断勾配のために

表一2 Landahl によってまとめられた流れの安定性と混相流の抵抗増減の関係

混相流の種類	レオロジーモデル	安定・不安定	抵抗の増減
高分子添加流	Maxwell モデル	多少の不安定効果をもつ	多少増加する
糸纖維状の高分子を添加した流れ	剛体の棒を浮遊した流れとして扱う	強安定	減少する
固体粒子浮遊流	粒子浮遊流として扱う	強安定	減少する

境界上の砂粒子は流路中心に向かい掃流され、河道は拡幅され続ける。浮遊砂が存在するときには、浮遊砂は河道中心部で巻き上げられ乱流拡散および二次流によって側岸部へ輸送され、堆積する。この堆積した砂は側岸の横断勾配のために河道中心部へ再掃流される。このように河川の平衡横断形状を保つ浮遊砂の役割は重要である。しかし、このことに着目した研究はわずかに Parker¹¹³⁾の研究があるにすぎず今後検討すべき問題である。

d) 土石流の流動と堆積

近年、土石流の発生機構、堆積機構について多くの研究がなされ、これに関する学問上、工学上の知見が増大し、流路工の設計や、対策にも利用されるようになってきた。固液混相流として土石流をみると、その流動機構、堆積機構の解明が特に重要である。巨礫と泥分からなる複雑な土石流の力学を明らかにするには土石流の流動を適切に記述するモデルの確立が必要である。現在モデルとしては粘塑性流動モデルとダイラタント流動モデルの2つがあるが¹¹⁴⁾、これらのモデルでは、土石流が輸送する巨礫を支える機構が全く異なっている。すなわち前者では剛体的に移動する栓流によって巨礫が支持されており、巨礫を取り巻いている流体部分の性質が重要である。後者では巨礫の下の礫の衝突によって生じる反発力によって支えられており、粒子間の作用が重要で流体の性質は二次的重要性をもつにすぎない。このように現在のモデルは、2つの相反する考え方によって構築されているので、今後は巨礫を取り巻いている流体中の泥分の土石流の流動に及ぼす役割については十分な検討が必要である。

e) 高濃度サスペンションの問題

日本の河川では大きな問題として扱われることは少ないが、黄河を中心とした中国の河川では高濃度サスペンションの問題は重要な研究課題である。Engelund¹¹⁵⁾らは 900 kg/m^3 にもおよぶ高濃度のウォッシュロードを含んだ河川においては、濃度変動に応じて抵抗値が変動するために、河川水位も数分から数十分程度の周期で変化すると報告している。このような問題の解明にあたっては高濃度の浮遊物質を含んだ流れの粘性係数等の基本的な特性を明らかにする必要がある。たとえば文献 116) によると高濃度サスペンション流では粘性係数は清水のそれに比べ、数倍～数 10 倍もの大きな値をとっている。

参 考 文 献

- 1) Basset, A. B. : A Treatise on Hydrodynamics, Vol. 2, Deighton, Bell and Co., Cambridge, 1888.
- 2) Hinze, J. O. : Turbulence, McGraw-Hill, 1975.
- 3) Lucien, M. B., Jr., Ho, H. W. and Yen, B. C. : J. Hydr. Div., ASCE, HY 1, pp. 149~160, 1964.
- 4) Rubinow, S. I. and Keller, J. B. : J. Fluid Mech., Vol. 11, pp. 447~459, 1961.
- 5) Happel, J. and Brenner, H. : 2nd edn, Noordhoff.
- 6) Lighthill, M. J. : J. Fluid Mech., Vol. 3, 1957.
- 7) Saffman, P. G. : J. Fluid Mech., Vol. 22, 1965.
- 8) 松信八十男 : 日本物理学会誌, 第 27 卷, 第 2 号, 1972.
- 9) 岡 小天 : 高分子 16, 180~185 号, 1967.
- 10) Eirich, F. R. (editor) : Rheology, Vol. 4, pp. 85~250, 1967.
- 11) Masson, S. G. and Manley, R. St. J. : Proc. Roy. Soc. A. 238. 1956.
- 12) Goldschmidt, V. W., Householder, M. K., Ahmadi, G. and Chung, S. C. : Progress in heat and mass transfer, Vol. 6, edited by G. Hetsroni, Pergamon Press.
- 13) Cox, R. G. and Mason, S. G. : Ann. Review Fluid Mech., Vol. 3, 1971.
- 14) 河村三郎 : 土砂木理學 1, 森北出版, pp. 17~38.
- 15) Vasseur, P. and Cox, R. G. : J. Fluid Mech., Vol. 80, 1977.
- 16) Saffman, P. G. : Studies in applied mathematics, Vol. L 11, No. 2, June., 1973.
- 17) Einstein, A. : Ann Phys, 17, 1905, Ann. Phys., 19, 1906.
- 18) Landau, L. and Lifshitz, E. M. : Fluid Mechanics, Pergamon Press, 1958.
- 19) Batchelor, G. K. : An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge Univ. Press, 1967.
- 20) Happel, J. and Brenner, H. : Low Reynolds Number Hydrodynamics, Pentice-Hall, 1965.
- 21) Jeffery, G. B. : Proc. Roy. Soc. A, 102, 161, 1922.
- 22) Batchelor, G. K. and Green, J. T. : J. Fluid. Mech., Vol. 56, 1972 (b).
- 23) Lundgreen, T. S. : J. Fluid Mech. 51, 1972.
- 24) Brinkman, H. C. : Appl. Sci. Res. A1, 1947.
- 25) Murray, J. O. : J. Fluid Mech., Vol. 21, part 3, 1965.
- 26) Drew, D. A. : Studies App. Math., Vol. L, No. 2, 1971.
- 27) Hinch, E. J. and Leal, L. G. : J. Fluid Mech., Vol. 52, 1972.
- 28) Soo, S. L. : Fluid Dynamics of Multiphase Systems, Blaisdell Waltham.
- 29) Delhaye, J. M. : Hemisphere, pp. 40~97, 1981.
- 30) Ishii, M. : Thermo-fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow, Eyrolles, Paris, 1975.
- 31) Ungarish and Greenspan, H. P. : Studies in Applied Mathematis, 69, pp. 145~175, 1983.
- 32) Rouse, H. : Trans. ASCE, Vol. 102, pp. 463~543, 1937.
- 33) Zagustin, K. : J. of Hydraulic Research, Vol. 6, No. 2, pp. 129~162, 1968.
- 34) Willis, J. C. : Water Resources Res., Vol. 5, No. 6, pp. 1322~1329, 1969.
- 35) Fukuoka, S. and Kikkawa, H. : Tech. Rep. No. 10 Dept. of Civil Eng., Tokyo Institute of Tech., pp. 99~173, 1971.
- 36) Task Committee : J. of Hydraulic Div., ASCE,

- Vol. 89, pt. 1, No. Hy 5, pp. 45~77, 1963.
- 37) Carstens, M. R. : Trans. AGU, Vol. 33, No. 5, pp. 713~721, 1952.
- 38) Ismail, H. M. : Trans. ASCE, Vol. 117, pp. 409~446, 1952.
- 39) Singamsetti, S. R. J. : J. of Hydraulics Div., Proc. ASCE, Vol. 92, No. Hy 2, 1966.
- 40) Jobson, H. E. and Sayre, W. W. : J. of Hydraulics Div., Proc., ASCE, Vol. 96, No. HY 10, pp. 1983~1996, 1970.
- 41) 吉川秀夫, 石川忠晴 : 土木学会論文報告集, 第 269 号, pp. 53~64, 1978.
- 42) Yalin, M. S. and Krishnappan, B. M. : Proc. 1st Symp. on River Mechanics, Bangkok, 1973.
- 43) Vanoni, V. A. : Trans. ASCE, Vol. 111, pp. 67~102, 1946.
- 44) Einstein, H. A. and Chien, N. : M. R. D. Sediment Series No. 3, Corps of Engineers, Missouri River Div., Omaha, 1954.
- 45) 今本博健・大年邦雄 : 京大防災研究所年報, 第 22 号 B-2, pp. 453~468, 1979.
- 46) 今本博健・大年邦雄 : 京大防災研究所年報, 第 23 号 B-2, pp. 373~392, 1980.
- 47) 三村信男・松尾友矩 : 土木学会論文報告集, 第 284 号, pp. 49~58, 1979.
- 48) Daily J. W. : 土木学会誌, Vol. 49, No. 6, pp. 42~47, 1964.
- 49) Elata, C. and Ippen, A. T. : Hydrodynamic Lab., Tech. Rep. No. 45, Dept. of Civil and Sanitary Eng., MIT, 1961.
- 50) Daily, J. W. and Chu, T. K. : Hydrodynamic Lab., Tech. Rep., No. 48, Dept. of Civil and Sanitary En., MIT, 1961.
- 51) Ippen, A. T. : Boston Society of Civil Engineers, Vol. 58, No. 3, 1971.
- 52) Ippen, A. T. : Int. Symp. on River Mechanics, Bangkok, pp. 341~369, 1973.
- 53) 岸 力 : 水工学シリーズ 75-A-9, 土木学会水理委員会, 1975.
- 54) Fukuoka, S. : Chapt. 9, Application of Stochastic Processes in Sediment Transport, edited by H. W. Shen and H. Kikkawa, Water Resources Publication, 1980.
- 55) 志村博康 : 土木学会論文集, 第 46 号, 1957.
- 56) 日野幹雄 : 土木学会論文集, 第 92 号, 1963.
- 57) Itakura, T. and Kishi, T. : J. of Hydraulic Div., Proc. ASCE, Vol. 106, No. HY 8, pp. 1325~1343, 1980.
- 58) 吉川秀夫・福岡捷二・石田 貴 : 第 20 回水理講演会論文集, pp. 59~64, 1975.
- 59) Turner, T. S. : Buoyancy Effects in Fluids, Cambridge Univ. Press, 1973.
- 60) 吉川秀夫・山本晃一 : 土木学会論文報告集, 第 186 号, pp. 39~54, 1971.
- 61) 安芸周一・白砂孝夫 : 第 18 回水理講演会論文集, pp. 187~192, 1974.
- 62) 安芸周一 : 水工学シリーズ 75-A-1, pp. A-1-1~A-1-26, 土木学会水理委員会, 1975.
- 63) 岩佐義朗・野口正人・児島 彰 : 京大防災研究所年報, 第 18 号 B, pp. 446~447, 1975.
- 64) 中村 昭・今村瑞穂・横道雅己 : 第 24 回水理講演会論文集, pp. 259~264, 1980.
- 65) Huber, W. C, Harleman, R. F. and Ryan, P. J. : J. of Hydraulic Div., Proc. ASCE, HY. 4 pp. 645~665, 1972.
- 66) 安芸周一・白砂孝夫 : 発電水力, No. 134, pp. 37~50, 1975.
- 67) 岩佐義朗・松尾直規・遠藤正昭 : 京大防災研究所年報, 第 19 号 B, pp. 221~236, 1976.
- 68) 岩佐義朗・松尾直規・遠藤正昭 : 京大防災研究所年報, 第 20 号 B, pp. 259~270, 1977.
- 69) 岩佐義朗・松尾直規・井上素行 : 京大防災研究所年報, 第 21 号 B, pp. 319~329, 1978.
- 70) 福岡捷二・水村和正・加納敏行 : 土木学会論文報告集, 第 274 号, pp. 41~55, 1978.
- 71) 福岡捷二・福岡祐介・村田和夫・荒井 健 : 土木学会論文報告集, 第 293 号, pp. 65~77, 1980.
- 72) 福岡捷二・福岡祐介 : 土木学会論文報告集, 第 294 号, pp. 73~84, 1980.
- 73) 福岡捷二・福岡祐介・中村健一 : 土木学会論文報告集, 第 302 号, pp. 55~65, 1980.
- 74) 福岡捷二・福岡祐介・宮本高行 : 東京工業大学研究報告, No. 26, pp. 67~103, 1980.
- 75) 江頭進治・芦田和男 : 第 15 回自然災害科学総合シンポジウム, pp. 481~482, 1978.
- 76) Benjamin, T. B. : J. of Fluid Mech., Vol. 31, Part 2, pp. 209~248, 1968.
- 77) 芦田和男・江頭進治・中川 一 : 京大防災研究所年報, 第 24 号 B-2, pp. 265~282, 1981.
- 78) 芦田和男・江頭進治・中川 一 : 京大防災研究所年報, 第 25 号 B-2, pp. 597~613, 1982.
- 79) 平野宗夫・羽田野袈袈義 : 土木学会論文報告集, 第 314 号, pp. 67~73, 1982.
- 80) 福岡捷二・角田 学・稲葉清美 : 第 27 回水理講演会論文集, pp. 109~116, 1983.
- 81) 足立昭平・中村俊六 : 第 21 回水理講演会論文集, pp. 15~20, 1977.
- 82) 中村俊六・足立昭平 : 第 279 号, pp. 61~68, 1978.
- 83) 宮永洋一・安芸周一 : 土木学会論文報告集, 第 296 号, pp. 49~59, 1980.
- 84) 芦田和男・江頭進治・古屋 健 : 京大防災研究所年報, 第 22 号, B-2, pp. 383~398, 1979.
- 85) 白砂孝夫・安芸周一 : 発電水力 No. 126.
- 86) Hedström, B. O. A. : E. C., Vol. 44, No. 3, 1952.
- 87) Happel, J. and Brenner, H. : Low Reynolds Number Hydrodynamics, Prentice-Hall, Chap. 9, 1965.
- 88) Brinkman, H. C. : J. Chemical Physics, Vol. 20, No. 4, 1952.
- 89) 森 芳郎・乙竹 直 : 化学工学, Vol. 20, pp. 16~21, 1956.
- 90) 大垣真一郎・松尾友矩 : 土木学会論文報告集, No. 210, 1973.
- 91) 三村信男 : 東京大学博士論文, 1978.

- 92) 三村信男・松尾友矩：土木学会論文報告集，No. 284, 1979.
- 93) 川島俊夫：日本機械学会誌，第83巻，第745号，pp. 1513~1521, 1980.
- 94) Durand, D. : Proc. 5th Congr. of IAHR (Minneapolis), pp. 89~103, 1953.
- 95) Durand, R. and Condolios, E. : J. d' Hydraulique, Société Hydrotechnique de France, Juin, 1952.
- 96) Zandi, I. and Govatos, G. : Proc. ASCE, Vol. 93, No. HY 3, May, pp. 145~159, 1967.
- 97) Charles, M.E. : Proc. Hydrotransport 1, B.H.R.A., pp. A 3-25~36, 1970.
- 98) Hisamitsu, N., Shoji, Y. and Kosugi, S. : Proc. Hydrotransport 5, B.H.R.A. pp. D 3-29~50, 1978.
- 99) 岡田 剛：混相流シンポジウム，pp. 11~28, 1982.
- 100) 鮎川恭三・越智順治：日本機械学会論文集，第33巻，第254号，pp. 1625~1632, 1967.
- 101) 那須浩平・林 泰造：土木学会第26回水理講演会論文集，pp. 123~131, 1982.
- 102) Hsu, S.T., Beken, Van der, Landweber, L. and Kennedy, J.F. : Symp on Solid Transport in slurries, Am. Inst. Chem. Engrs., 1971.
- 103) 是石昭夫・八木得次・奥出 律：港湾技術研究所報告，12巻3号，pp. 245~259, 1973.
- 104) Lumley, J.A. : Physics of Fluids, Vol. 20, No. 10, 1977.
- 105) Mizushima, T. and Usui, H. : Physics of Fluids, Vol. 20, No. 10, 1977.
- 106) Vanoni, V.A. : Trans, ASCE. 111. 1946.
- 107) Saffman, P.G. : J. Fluid Mech., 1962.
- 108) Landahl, M.T. : Physics of Fluids, Vol. 20, No. 10, 1977.
- 109) Saffman, P.G. : Studies in Applied Mathematics, Vol. L, No. 2, pp. 93~101, 1971.
- 110) 吉川秀夫：建設省土木研究所報告，No. 87, 1954.
- 111) 木下良作：第14回乱流シンポジウム，1982.
- 112) 伊勢谷ふじこ：第23回水理講演会論文集，1979.
- 113) Parker, G. : J. of Fluid Mech., Vol. 89, Part 1, 1978.
- 114) 芦田和男・高橋 保・道上正規：河川の土砂災害と対策，防災シリーズ 5，森北出版，1983.
- 115) Engelund, F. and Wan, Z : Proc. ASCE, Vol. 110, No. 3, pp. 219~233, 1984.
- 116) Junda, Chu : Proc. of the 2nd Int Symp. on River Sedimentation, 1983, Nanjing, China, pp. 265~273.

(1984. 9. 20・受付)