

# ケーブルの面外不安定振動

## OUT-OF-PLANE VIBRATIONS OF SUSPENDED CABLES UNDER INPLANE FORCING

高橋和雄\*・田川 賢\*\*・佐藤秀雄\*\*\*

By Kazuo TAKAHASHI, Masaru TAGAWA and Hideo SATO

It is known that out-of-plane vibrations of suspended cables are observed under inplane forcing. This fact is caused by the geometrical nonlinearity of cables. Single-degree-of-freedom approach for this problem was used in the preceding work. In the present work, out-of-plane vibrations of cables are studied by using multiple-degree-of-freedom approach because cables are continuous system. Nonlinear inplane responses and corresponding out-of-plane vibrations are analyzed by the harmonic balance method. Unstable regions where out-of-plane vibrations occur are obtained. The results of numerical examples show that unstable regions of out-of-plane vibrations whose modal shapes are similar to those of inplane modal shapes are wide and that simple parametric resonances are significant compared with combination resonances.

### 1. ま え が き

ケーブルに面内外力が作用すると、特定の振動数領域で面外振動が生ずることが知られている。この問題はケーブルの幾何学的非線形性に基づく非線形振動に起因するものである。本題に関する研究については山口ら<sup>1),2)</sup>によって面内・面外とも1自由度系とみなした解析が行われ、また、面内加振による面内・面外連成振動実験結果が報告されている。これらの研究によってケーブルの面外不安定振動は弦と異なって主不安定領域が存在することおよびサグ比、傾斜角の形状パラメーターによってその特性が異なることなどが明らかにされている。

ケーブルは無限の自由度を有するために多自由度としての定量的な取扱いが必要である。しかし、面内非線形応答を評価のうえ、面外不安定に関する連立のHillの方程式の解をすべて求めることが困難なこともあって多自由度系としての取扱いは見受けられないようである。そこで、本研究はケーブルの面内加振による面外係数励振振動を多自由度系として取り扱うものである。面内非線

形応答および面外不安定振動の評価には調和バランス法<sup>3),4)</sup>を用いるものである。本法によれば1自由度系としての取扱いでは追従が無理なケーブルの面内非線形応答を評価したうえで、単一の面外振動形をもつ単純共振および2個の面外振動形をもつ結合共振を体系的に明らかにすることが可能である。本ノートはまず、解法の展開ののち、ケーブルの面外振動の性質を明らかにし、次いで面外不安定振動の種類および広さ、これらに及ぼすケーブルの形状の影響を明らかにするものである。

なお、本ノートの面外不安定振動解析は面外振動が生ずる分岐点近傍の挙動のみを明らかにするものである。この取扱いは文献3)の5.(2)の面外非線形分岐応答解析において面外の非線形項を無視した場合に一致する。このような取扱いによって、文献5)のケーブルの運動方程式は面内と面外成分に分離され、それぞれ独立に解析することが可能である。

### 2. 解 法

#### (1) 面内非線形応答解析

面内加振を受けるケーブルの面内非線形運動方程式は次のように与えられる<sup>5)</sup>。

$$L_1(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left( C_0 \frac{1}{x_e} + C_1^2 x_e^2 \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} \right.$$

\* 正会員 工修 長崎大学助教授 工学部土木工学科  
(〒852 長崎市文教町1-14)

\*\* 正会員 (株)日本構造橋梁研究所

\*\*\* 大日本コンサルタント(株)

$$\begin{aligned}
 &+ C_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \\
 &- C_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[ \left( x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 \right] \left( x_e' + \frac{\partial u}{\partial s_e} \right) \right] \\
 &- \frac{p_x \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_2(u, v) = & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left( C_0^2 \frac{1}{x_0'} + C_1^2 y_e'^2 \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} \right. \\
 & + C_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} \\
 & - C_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[ \left( x_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 \right] \left( y_e' + \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \right] \\
 & \left. - \frac{p_y \cos \Omega t}{\rho_0} \right\} = 0 \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

ここに、 $u, v$ ：面内水平、鉛直変位、 $t$ ：時間、その他の記号は文献5)参照。

文献3)の式(4)、(5)、(6)、(7)の面内の項のみを取り出せば、式(1)、(2)の面内非線形応答が得られる。面外振動解析に必要な式のみを示せば次のとおりである。

$$\begin{aligned}
 u &= l \sum_{i=1}^m P_i(t) U_i(s_e) \\
 v &= l \sum_{i=1}^m P_i(t) V_i(s_e)
 \end{aligned} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $l$ ：支点間水平距離、 $U_i, V_i$ ：固有振動形

$$P_i(t) = \sum_{m=0}^i a_m^i \cos m \omega \tau \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\tau = \omega_1 t, \omega = \Omega / \omega_1, \omega_1$ ：弦の1次の固有円振動数

(2) 面外係数励振振動

面外振動の非線形項を無視した自由振動の運動方程式は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left( C_0^2 \frac{1}{x_e'} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right) - C_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[ \left( x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial s_e} \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial s_e} \right] = 0 \dots\dots\dots (5)
 \end{aligned}$$

ここに、 $w$ ：面外変位

式(5)の解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{i=1}^m T_i(t) W_i(s_e) \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $T_i(t)$ ：未知の時間関数、 $W_i(s_e)$ ：面外固有振動形

式(5)に式(3)、(6)を代入し、さらに式(4)において  $m=3$  まで採用した場合<sup>3)</sup>の Galerkin 法による結果は次式となる。

$$\begin{aligned}
 [A_1] \ddot{T}_1 + [A_2] T_1 + k^2 ([D_0^1] + [D_1^1] \cos \omega \tau \\
 + [D_2^1] \cos 2 \omega \tau + [D_3^1] \cos 3 \omega \tau) T_1 = 0 \dots\dots\dots (7)
 \end{aligned}$$

ここに、 $[A_1], [A_2]$ 、係数行列、 $[D_0^1]$ ：面内非線形応答に

よる付加剛性行列、 $[D_i^1], i=1,2,3$ ：係数励振振動の幅種類を決定する行列、 $\{T\} = [T_1, T_2, \dots]^T$

式(7)は連立の Hill の方程式である。式(7)の解を次のように仮定する<sup>4)</sup>。

$$\{T\} = e^{\lambda \tau} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{b}_0 + \sum_{m=1}^n (\mathbf{a}_m \sin m \omega \tau + \mathbf{b}_m \cos m \omega \tau) \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $\lambda$ ：未知定数、 $\mathbf{b}_0, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m$ ：未知のベクトル

上式を式(7)に代入して、再び調和バランス法を適用すれば、次のような同次方程式が得られる。

$$[D] \{X\} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $[D]$ ：係数行列、 $\{X\}$ ： $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_m, \mathbf{a}_m$  からなる列ベクトル

上式に含まれる  $\lambda$  は文献4)に示す方法を用いて固有値問題に変換でき、ケーブルの面外振動の安定、不安定が直接判定される。

3. ケーブルの面外不安定振動の性質

式(7)の微分方程式は次の振動数比  $\omega$  の近傍で不安定領域をもつ。

$$\left. \begin{aligned}
 [D_0^1] : \omega &= 2\omega_i^0 / \bar{i}, \\
 &\omega = (\omega_i^0 \pm \omega_j^0) / \bar{i}, \quad \bar{i} = 1, 2, \dots \\
 [D_0^2] : \omega &= 2\omega_i^0 / \bar{j}, \\
 &\omega = (\omega_i^0 \pm \omega_j^0) / \bar{j}, \quad \bar{j} = 2, 4, \dots \\
 [D_0^3] : \omega &= 2\omega_i^0 / \bar{l}, \\
 &\omega = (\omega_i^0 \pm \omega_j^0) / \bar{l}, \quad \bar{l} = 3, 6, \dots
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\omega_i^0$ ：無次元面外  $i$  次固有振動数

$2\omega_i^0 / \bar{i}$  のように単一の振動数をもつ不安定振動を単純共振といい、 $(\omega_i^0 \pm \omega_j^0) / \bar{i}$  のように2つの振動数からなる不安定振動を結合共振(＋：和形、－：差形)という。 $\bar{i}=1$  が主不安定領域で、 $\bar{i} \geq 2$  が副不安定領域である。したがって、 $[D_0^1]$  行列から得られる不安定領域には奇数次の不安定領域は存在しない。また、 $[D_0^1]$  から得られる不安定領域には主、第2不安定領域は存在しない。結合共振は多自由度としての取扱いはじめて得られるものである。

式(10)で示した不安定振動のうち、いずれの不安定領域が必要であるかは、係数行列  $[D_0^1]$  の要素構成、すなわちケーブルの形状、加振状態および面内非線形応答の振幅によって定まる。ケーブルの場合に  $[D_0^1]$  の対角線要素  $d_{ii}^1 \neq 0$  であるから、必ず単純共振が存在する。また、対称行列  $d_{ii}^1 = d_{ii}^1$  であるから、 $d_{ii}^1$  と  $d_{ii}^1$  は同符号となる。したがって、結合共振は和形のみが存在し、差形は存在しない。

4. 不安定領域の決定法

不安定領域の作成にあたっては、荷重強度  $p_n$  を一定

に保って面内非線形応答を求め、その面内応答のもとにおける面外振動の安定性を吟味する。次に荷重強度  $p_n$  を変化させて、同様な操作を繰り返せば不安定領域が構成される。この不安定領域には Fig. 1 に示すように Type(A)と Type(B)の2個がある。Type(A)は通常の不安定領域で応答曲線上に左側と右側が存在する場合である。これに対して Type(B)は左側の境界線のみが存在し、右側の境界点は応答曲線上に存在しない。しかし、この場合外力の荷重強度  $p_n$  が零である自由振動の応答曲線 (backbone curve) より右側には応答が存在しないために、この曲線によって領域の右側が規定される。この Type(B)の不安定領域は主共振近傍にのみ生ずる。

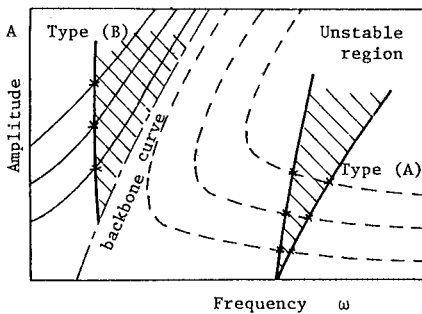


Fig. 1 Construction of unstable regions.

### 5. ケーブルの面外不安定領域

Fig. 2 および 3 に水平ケーブル ( $k=30, \gamma=0.1$ ) の面内対称および逆対称加振の場合の面内非線形応答と面外不安定領域を示す。図中において横軸は外力の加振円振動数を対応する弦の1次固有円振動数で無次元化した振幅

数比  $\omega$  で、縦軸はケーブルの中央点 (対称加振の場合)、もしくは 3/10 点 (逆対称加振の場合) における振幅をスパン長  $l$  で無次元化した振幅比  $A$  である<sup>31</sup>。図中の実線は特定の荷重強度のもとでの外力と同位相の面内非線形応答を、また破線は外力と逆位相の面内非線形応答を表わしたものである。応答曲線上の  $\llcorner$  (または  $\lll$ ) の記号は、応答曲線が鉛直接線をもつ位置を示すもので、斜線部内の応答は不安定な (実現しない) 振幅である。肉太の実線および破線が安定な振幅である。なお、応答曲線に付した記号  $a_n^j$  は、面外  $n$  次振動の  $j$  倍 ( $j=1$  の場合: 主調波,  $j \geq 2$  の場合: 高調波) 振動が卓越することを意味する。

以上の安定な面内非線形応答のもとに生ずる面外不安定領域が図中の斜線部である。右上りの斜線部が単純共振の不安定領域に対応し、右下りの斜線部が結合共振の不安定領域に対応する。不安定領域に示した記号  $2\omega_i/\bar{i}$  は面外  $i$  次振動の単純共振の  $\bar{i}$  番目の不安定領域を示す。また、記号  $(\omega_i^0 + \omega_j^0)/\bar{i}$  は面外  $i$  次と  $j$  次振動の結合共振の  $\bar{i}$  番目の不安定領域を示す。

Fig. 2 の面内対称加振の場合には、ケーブルの2次および3次の非線形項が応答に寄与するために、式(9)の  $[D_{ij}]$  行列がすべて零行列とならない。このために、主および副の不安定領域が存在する。水平ケーブルの場合の結合共振については、面外振動形が対称-対称もしくは逆対称-逆対称の組合せのみが存在する。図のように不安定領域の幅は単純共振の方が結合共振よりも広い。特に  $\omega=3.5$  付近に生ずる面外3次振動の副不安定領域 ( $\omega_3^0$ ) が最も広いといえる。このときのケーブルの面内非線形応答 ( $\omega_1^0$ ) と面外不安定振動 ( $\omega_3^0$ ) の振動形はよく似ている<sup>31</sup>。不安定領域の幅が広いほど固有値入の実数部

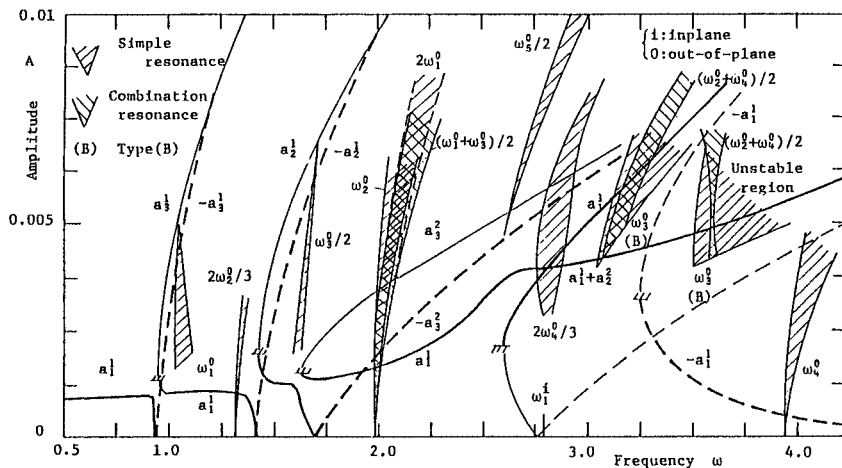


Fig. 2 Unstable regions of out-of-plane vibrations of a cable with  $k=30, \gamma=0.1$  and  $\theta=0^\circ$  under symmetric forcing.

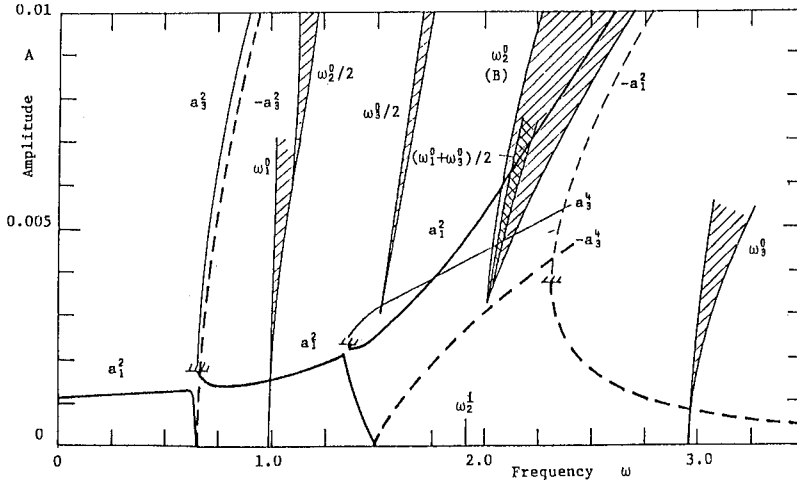


Fig. 3 Unstable regions of out-of-plane vibrations of a cable with  $k=30, \gamma=0.1$  and  $\theta=0^\circ$  under anti-symmetric forcing.

の値が大きく、強い面内・面外連成振動が生じる。

逆に Fig. 3 の面内逆対称加振の場合にはケーブルの非線形項に 3 次の項のみが含まれるために、弦と同様にケーブルの応答には主共振のほかに奇数次の高調波応答のみが含まれる。この場合、係数行列  $[D]_1, [D]_2$  がゼロ行列となるために、主不安定領域をはじめ奇数次の不安定領域は存在しない（このことはすでに文献 1）に示されている）。したがって、不安定領域の種類は対称加振よりも少ない。本ケースにおいても、 $\omega=2.0$  付近の面内 2 次逆対称振動 ( $\omega_2^0$ ) の主共振近傍の面外 2 次振動 ( $\omega_2^0$ ) の副不安定領域が最も広い。

次に傾斜ケーブルの場合には応答に 2 次および 3 次の非線形項が同時に含まれるために、水平ケーブルの対称加振による面内非線形応答と同様な応答特性と面外不安定振動の種類をもつ。また、サグ比  $\gamma=0.0$  の弦の場合には対称加振・逆対称加振の区別なくケーブルの面内逆対称加振と同じ種類の不安定領域をもつ。

Fig. 2 および 3 に示したように、面内応答の主共振近傍で面内振動形とよく似た面外振動形をもつ単純共振の副不安定領域が最も広い。不安定領域の広さは応答曲線の傾きが大きい場合、すなわち、非線形性が大きい場合に広がる。文献 3) の図-3 に示した面内非線形自由振動の計算結果によれば、サグ比  $\gamma=0.1$  の水平ケーブルの対称振動の非線形性が最も大きい。したがって、Fig. 2 の  $\omega=3.5$  付近の面外不安定領域がケーブルにおいて最も広いことが予想される。逆に  $\gamma=0.02\sim 0.05$  付近のケーブルでは非線形性が小さいために、弦よりも不安定領域は狭くなることが予想される。

## 6. まとめ

本ノートは面内加振を受けるケーブルの面外振動を多自由度系の係数励振振動問題として定式化し、ケーブルの面外不安定領域を示したものである。得られた知見をまとめると

- (1) ケーブルの面外不安定領域には単一の面外振動形をもつ単純共振のほかに、2 個の面外振動形をもつ和形の結合共振の 2 種類が存在する。
- (2) 面外不安定領域の幅は一般に単純共振の方が結合共振よりも広い。特に面内の主共振近傍で面内振動形と似た面外振動形をもつ不安定領域の幅が最も広い。
- (3) ケーブルの面外不安定領域は面内非線形性が大きい場合に広がる。

本研究の数値計算には金近伸広氏（現山口県土地開発公社）の協力を得たことを付記する。

## 参考文献

- 1) 山口・宮田・伊藤：ケーブル系の非線形応答における一挙動，第 24 回構造工学シンポジウム論文集，pp. 51 ~ 61, 1978.
- 2) 山口・清水・伊藤：ケーブルの非線形動的応答に関する実験的研究，土木学会第 36 回年次学術講演会講演概要集，第 1 部，pp. 371 ~ 372, 昭和 56 年 10 月.
- 3) 高橋・藤本・村中・田川：調和バランス法によるケーブルの非線形振動解析，土木学会論文報告集，第 338 号，pp. 57 ~ 68, 1983.
- 4) Takahashi, K.: Instability of Dynamic Systems with Non-uniform Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol. 85, pp. 257 ~ 262, 1982.
- 5) 山口・伊藤：単一ケーブルの三次元非線形自由振動，土木学会論文報告集，第 286 号，pp. 29 ~ 36, 1979.

(1984 年 1 月 11 日・受付)