

# 応力および変位仮定に基づく平板の一般化高次理論の定式化

## FORMULATION OF GENERAL HIGHER-ORDER THEORY OF PLATES BASED ON STRESS AND DISPLACEMENT ASSUMPTIONS

平島 健一\*・根岸 嘉和\*\*

By Ken-ichi HIRASHIMA and Yoshikazu NEGISHI

We formulate the general higher-order theory of plates under the assumption of displacement and stress components which satisfy exactly the boundary (loading) conditions of upper and lower surfaces of the plate. The results of this theory include the both cases of bending and stretching behaviours of the plates. It is shown that the recently proposed theories of second-order by Reissner and Koga can be derived as a special case of our formulation with employment of a few lower-terms.

Numerical results for the case of torsion of a rectangular plate under the several order theories with truncated terms are compared with the exact solution of elasticity.

### 1. ま え が き

著者らは変位仮定を基本として一般化高次平板理論の定式化を行い、いくつかの具体例を通してその適用性、有効性等について検証してきた<sup>1)</sup>。本文ではそれらと異なり、平板の上下表面での境界(荷重)条件を完全に満足する応力および変位仮定を基本とした、いま一つの一般化理論を誘導し、最近発表された Reissner<sup>2)</sup>および古賀<sup>3)</sup>の2次近似理論が、その特殊な項打ち切りによって求められることを示すとともに低次の項のいくつかを採用した場合に対し、簡単な数値例によって、その精度特性を検討した結果を報告する。この方法は平板の上下表面の境界(荷重)条件が完全な形で取り込めるという利点を有するが、他方ではその分やや得られた基礎式は複雑なものとなるものの、Reissnerが指摘<sup>2)</sup>しているように形式的には“断面力関数” $\Phi^m$ を導入することにより2次元のLaplace演算子とそれらの簡単な組合せによって表現できることから、応力集中その他の、より精度のよい解析結果を求めるための基礎式として採用することが可能である。本定式化により、平板の曲げのみな

らず、伸縮挙動の問題への取り組みが可能となり、たとえば、Alblasの板厚の影響を完全に考慮した孔を有する平板問題の簡単な解析を含めて、より高精度の解析を要求される問題への取組みのための見通しが得られたことになる。ここでは簡単のため、等質等方の弾性体で一定の板厚の平板を考えるものとする。

### 2. 基礎方程式の誘導

いま簡単のため対象とする平板の座標系 $(x, y, z)$ および作用荷重を Fig. 1 のように設定しよう。

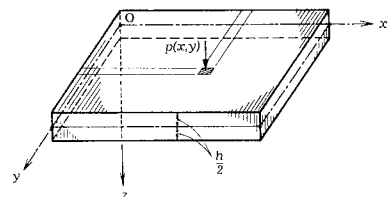


Fig. 1 Geometry of rectangular plate and rectangular Cartesian coordinate system  $(x, y, z)$ .

応力成分を、与えられた上下の境界条件を満足するように次のように、基準化した板厚座標 $\xi = z/b = 2z/h$  ( $h = 2b$ :板厚)に関する無限項の多項式に展開する。

\* 正会員 工博 山梨大学助教授 土木工学科  
(〒400 甲府市武田4-3-11)

\*\* 正会員 工修 福島工業高等専門学校講師 土木工学科  
(〒970 いわき市平上荒川字長尾30)

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_{xx}^{(n)}, \tau_{yy}^{(n)}, \tau_{xy}^{(n)}) \cdot P_n(\xi), \\ (\tau_{xz}, \tau_{yz}) &= b \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_{xz}^{(n)}, \tau_{yz}^{(n)}) \cdot R_n(\xi), \\ \tau_{zz} &= -\frac{p}{2} + b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{zz}^{(n)} \cdot S_n(\xi), \quad \left( \tau_{zz}^{(1)} = -\frac{3}{2} b^2 p \right) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここに、 $P_n(\xi)$  は Legendre 多項式であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_n(\xi) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n; P_0(\xi) = 1, P_1(\xi) = \xi, \\ P_2(\xi) &= \frac{1}{2} (3\xi^2 - 1), P_3(\xi) = \frac{1}{2} (5\xi^3 - 3\xi), \dots \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

また  $R_n(\xi)$  は  $P_n(\xi)$  を 1 回、 $S_n(\xi)$  は  $P_n(\xi)$  を 2 回それぞれ積分して得られる多項式であり具体的な表示は脚注に示されている<sup>1)</sup>。

後で使用する便のため、ここで次のような量を定義する。

$$Q_z^{(m)} = b \int_{-1}^1 \tau_{zz} \cdot P_n(\xi) d\xi = -bp\delta_{n0} - b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \tau_{zz}^{(m)}, \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_m^n &= \int_{-1}^1 R_n(\xi) \cdot R_m(\xi) d\xi = \frac{1}{2n+1} (\hat{\Gamma}_m^{n+1} - \hat{\Gamma}_m^{n-1}), \\ \hat{\Gamma}_m^k &= \int_{-1}^1 P_k(\xi) \cdot R_m(\xi) d\xi \\ &= \frac{2}{(2k+1)(2m+1)} (\delta_{k,m+1} - \delta_{k,m-1}). \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

上式中の  $\delta_{ij}$  は Kronecker の delta である。

次に  $x, y$  方向の各変位成分を次のように設定しよう。

$$(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (u^{(n)}, v^{(n)}) \cdot P_n(\xi). \dots (5)$$

変位  $w$  に関しては次式で変位係数  $w^{(n)}$ 、 $w_0$  を定義する。

$$w^{(n)} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 w \cdot R_n(\xi) d\xi, \quad w_0 = \int_{-1}^1 w d\xi. \dots (6)$$

さて、物体力を無視した静的なつり合い方程式のうち、面内座標方向のものに  $P_n(\xi)$  を、残りのつり合い式を  $z$  に関して偏微分した後に  $P_n(\xi)$  をそれぞれ掛け、板厚にわたって積分を実施して式 (1) を考慮すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx,x}^{(n)} + \tau_{xy,y}^{(n)} + \tau_{xz,z}^{(n)} &= 0, \\ \tau_{xy,x}^{(n)} + \tau_{yy,y}^{(n)} + \tau_{yz,z}^{(n)} &= 0, \\ \tau_{xz,x}^{(n)} + \tau_{yz,y}^{(n)} + \tau_{zz,z}^{(n)} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

注 1)  $R_n(\xi) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (\xi^2 - 1)^n; R_0(\xi) = \xi,$   
 $R_1(\xi) = \frac{1}{2} (\xi^2 - 1), R_2(\xi) = \frac{1}{2} (\xi^3 - \xi), \dots$   
 $S_n(\xi) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n-2}}{d\xi^{n-2}} (\xi^2 - 1)^n; S_0(\xi) = \frac{1}{2} (\xi^2 - 1),$   
 $S_1(\xi) = \frac{1}{6} (\xi^3 - 3\xi), S_2(\xi) = \frac{1}{8} (\xi^2 - 1)^2, \dots$

なお、コンマの後の添字はその添字の座標による偏微分を意味する。上式は式 (1) で定義した応力係数 ( $n$  次の断面力)  $\tau_{ij}^{(n)}$  の満たすべきつり合い式である。次にこれらの  $\tau_{ij}^{(n)}$  と変位係数  $u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$  との関係式すなわち 2 次元化した平板としての構成関係式を算出する。そのため、まず、等方性とした場合の Hooke の法則を多少変形した以下の式を考える。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (u_{,x} + \nu v_{,y}) + \frac{\nu}{1-\nu} \tau_{zz}, \\ \tau_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (v_{,y} + \nu u_{,x}) + \frac{\nu}{1-\nu} \tau_{zz}, \\ \tau_{xy} &= G(u_{,y} + v_{,x}), \quad Ew_{,z} = \tau_{zz} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy}), \\ \tau_{xz} &= G(u_{,z} + w_{,x}), \quad \tau_{yz} = G(v_{,z} + w_{,y}). \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

ここに、 $E, \nu, G$  は弾性係数、ポアソン比、せん断弾性係数 ( $G = E/2(1+\nu)$ ) である。式 (8)<sub>1-3</sub> に  $P_n(\xi)$  を掛け板厚にわたって積分を実行し、式 (3)、(5) を用いると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx}^{(n)} &= \frac{E}{1-\nu^2} (u_{,x}^{(n)} + \nu v_{,y}^{(n)}) + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{2n+1}{2b} Q_z^{(n)}, \\ \tau_{yy}^{(n)} &= \frac{E}{1-\nu^2} (v_{,y}^{(n)} + \nu u_{,x}^{(n)}) + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{2n+1}{2b} Q_z^{(n)}, \\ \tau_{xy}^{(n)} &= G(u_{,y}^{(n)} + v_{,x}^{(n)}). \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

続いて式 (8)<sub>5</sub> に  $P_n(\xi)$  を掛け、板厚積分を行う。

$$u^+ - (-1)^n u^- = \int_{-1}^1 u \cdot \frac{dP_n(\xi)}{d\xi} d\xi - b \cdot \int_{-1}^1 w_{,x} P_n(\xi) d\xi + \frac{b^2}{G} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\Gamma}_m^n \tau_{xx}^{(m)}.$$

ここに、 $u^+$  および  $u^-$  はそれぞれの平板の下、上表面 ( $i.e. \xi = +1$  および  $\xi = -1$ ) での  $x$  方向の変位を表わす。上式の  $n$  の代わりに  $n+2$  に置き換えそれらの差をとり、公式：

$$\begin{aligned} P'_{n+2}(\xi) - P'_n(\xi) &= (2n+3)P_{n+1}(\xi), \\ P_{n+2}(\xi) - P_n(\xi) &= (2n+3)R_{n+1}(\xi). \end{aligned}$$

を利用して整理すると最終的に次式が得られる。(式 (8)<sub>5</sub> に対して同様の操作を行った結果を併記。)

$$\left. \begin{aligned} -u^{(n)} + b w_{,x}^{(n)} &= \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b^2}{G} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \tau_{xx}^{(m)}, \\ -v^{(n)} + b w_{,y}^{(n)} &= \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b^2}{G} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \tau_{yy}^{(m)}. \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

残りの構成式 (8)<sub>1-4</sub> に対しても式 (10) と同様の手法を用いることにより、最終的な結果として次式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} w^{(n)} &= -\frac{1}{2E} \left\{ \frac{Q_z^{n+2}}{2n+3} - \frac{2(2n+1)Q_z^{(n)}}{(2n-1)(2n+3)} + \frac{Q_z^{(n-2)}}{2n-1} \right\} \\ &\quad + \frac{\nu}{E} b \left\{ \frac{\tau_{xx}^{(n+2)} + \tau_{yy}^{(n+2)}}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{2(\tau_{xx}^{(n)} + \tau_{yy}^{(n)})}{(2n-1)(2n+3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau_{xx}^{(n-2)} + \tau_{yy}^{(n-2)}}{(2n-3)(2n-1)} \right\}, \\ w^{(1)} &= -\frac{1}{2} w_0 - \frac{1}{10E} (Q_z^3 - Q_z^2) \end{aligned} \right\}$$

.....(11)

以上が2次元化した平板としての基礎関係式である。次に、いましてこれらの関係式を整理するために式(10)を  $x, y$  に関して偏微分した結果の和, 差をとると次のような式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} e^{(m)} &= b \nabla^2 w^{(m)} - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b^2}{G} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n (\tau_{xz, x}^{(m)} + \tau_{yz, y}^{(m)}), \\ \omega^{(m)} &= \frac{(2n+1)}{4} \cdot \frac{b^2}{G} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \Phi^{(m)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

ここで  $\nabla^2$  は2次元の Laplacian であり,  $\Phi^{(m)}$ ,  $e^{(m)}$  および  $\omega^{(m)}$  は次のように定義した量である。

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(m)} &= \tau_{xz, y}^{(m)} - \tau_{yz, x}^{(m)}, \quad e^{(m)} = u_{,x}^{(m)} + v_{,y}^{(m)}, \quad \omega^{(m)} = \frac{1}{2}(v_{,x}^{(m)} - u_{,y}^{(m)}). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

$e^{(m)}$  および  $\omega^{(m)}$  はそれぞれ平板としての, 一般化した  $n$  次の dilatation および rotation を意味する量であり,  $\Phi^{(m)}$  は平板における  $n$  次の“断面力関数”である。次に式(7), (9)および(12)を組み合わせると最終的に次式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} -\tau_{xz}^{(m)} &= \frac{E}{1-\nu^2} b \nabla^2 w_{,x}^{(m)} + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2n+1}{2b} Q_{z,x}^{(m)} \\ &\quad - (2n+1)b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \left( \frac{1}{2} \Phi_{,y}^{(m)} - \frac{1}{1-\nu} \tau_{zz,x}^{(m)} \right), \\ -\tau_{yz}^{(m)} &= \frac{E}{1-\nu^2} b \nabla^2 w_{,y}^{(m)} + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2n+1}{2b} Q_{z,y}^{(m)} \\ &\quad - (2n+1)b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \left( -\frac{1}{2} \Phi_{,x}^{(m)} - \frac{1}{1-\nu} \tau_{zz,y}^{(m)} \right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

あるいは, 式(7), (13), および(14)から  $\Phi^{(m)}$  を消去すると次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} -\tau_{xz}^{(m)} &= \frac{E}{1-\nu^2} b \nabla^2 w_{,x}^{(m)} + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2n+1}{2b} Q_{z,x}^{(m)} \\ &\quad - \frac{2n+1}{2} b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \left( \nabla^2 \tau_{xz}^{(m)} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \tau_{zz,x}^{(m)} \right), \\ -\tau_{yz}^{(m)} &= \frac{E}{1-\nu^2} b \nabla^2 w_{,y}^{(m)} + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2n+1}{2b} Q_{z,y}^{(m)} \\ &\quad - \frac{2n+1}{2} b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \left( \nabla^2 \tau_{yz}^{(m)} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \tau_{zz,y}^{(m)} \right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

式(14)と式(13), を組み合わせれば,

$$\Phi^{(m)} = \frac{2n+1}{2} b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \nabla^2 \Phi^{(m)}. \dots\dots\dots(16)$$

また, 式(14)と式(7), を組み合わせれば,

から次式が得られる。

$$\begin{aligned} w^{(m)} &= \frac{\nu}{1-\nu} b^2 \left\{ \frac{\nabla^2 w^{(m+2)}}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{2\nabla^2 w^{(m)}}{(2n-1)(2n+3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nabla^2 w^{(m-2)}}{(2n-3)(2n-1)} \right\} + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2(1-\nu)E} \left\{ \frac{Q_z^{(m+2)}}{2n+3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(2n+1)Q_z^{(m)}}{(2n-1)(2n+3)} + \frac{Q_z^{(m-2)}}{2n-1} \right\} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\nu}{E} b^3 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma_m^{n+2}}{2n+3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(2n+1)\Gamma_m^n}{(2n-1)(2n+3)} + \frac{\Gamma_m^{n-2}}{2n-1} \right\} \tau_{zz}^{(m)} \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

最後に, 式(7), (9), (12)および(14)を組み合わせると整理すれば, 次式のように断面力の値が求まる。

$$\begin{aligned} \tau_{xx}^{(m)} &= \frac{E}{1-\nu^2} b(w_{,xx}^{(m)} + \nu w_{,yy}^{(m)}) + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2n+1}{2b} Q_z^{(m)} \\ &\quad + \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{1-\nu} (2n+1)b^3 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \nabla^2 (w_{,xx}^{(m)} + \nu w_{,yy}^{(m)}) \\ &\quad + \frac{\nu}{(1-\nu)^2} \cdot \frac{(2n+1)}{2} b \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \Gamma_m^n Q_{z,xx}^{(m)} \\ &\quad + \nu Q_{z,yy}^{(m)} - \frac{1}{1-\nu} (2n+1)b^4 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (2m+1) \Gamma_k^n \Gamma_m^n \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{2}(1-\nu) \Phi_{,xy}^{(k)} - \frac{1}{1-\nu} (\tau_{zz,xx}^{(k)} + \nu \tau_{zz,yy}^{(k)}) \right\}, \\ \tau_{yy}^{(m)} &= \dots\dots\dots, \\ \tau_{xy}^{(m)} &= \frac{E}{1+\nu} b w_{,xy}^{(m)} + \frac{E}{1-\nu^2} (2n+1)b^3 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \nabla^2 w_{,xy}^{(m)} \\ &\quad + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2n+1}{2} b \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \Gamma_m^n Q_{z,xy}^{(m)} \\ &\quad + (2n+1)b^4 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (2m+1) \Gamma_k^n \Gamma_m^n \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{4} (\Phi_{,xx}^{(k)} - \Phi_{,yy}^{(k)}) + \frac{1}{1-\nu} \tau_{zz,xy}^{(k)} \right\}. \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

### 3. 項数の打ち切りと従来までの理論との関係

前節で誘導した基礎式は応力ならびに変位仮定の混合型理論であり, 採用項数に何らの制限を設けない完全な一般化がなされた理論となっている。もちろん, これらの一般式は曲げ(面外)のみならず伸縮(面内)挙動も完全に包含したものであるが, ここでは, 前者の場合のみに限定して従来までのこの種の代表的な理論との関係について触れておこう。すなわち最近発表された Reissner<sup>2)</sup> および古賀<sup>3)</sup> の各論文はここに導出した理論式において上添字記号 ( $n$ ) で  $n=1,3$  の有限項を採用した結果 (2-order theory) に完全に一致するが, それらの論文に使われている記号と本文中で用いた記号との対応表が Table 1 に示されている。

せん断変形を考慮した Reissner の最初の論文<sup>4)</sup> の結

**Table 1** Relation of the used symbols by Reissner, Koga and Authors for the case of 2-order theory.

	Reissner <sup>2)</sup>	Koga <sup>3)</sup>	Authors
Bending & Torsional Moments	$M_{xx}, M_{xy}$	$M_x^{(1)}, M_{xy}^{(1)}$	$\frac{h^2}{6} \tau_{xx}^{(1)}, \frac{h^2}{6} \tau_{xy}^{(1)}$
	$P_{xx}, P_{xy}$	$-\frac{7}{2} M_x^{(2)}, -\frac{7}{2} M_{xy}^{(2)}$	$-\frac{h^2}{4} \tau_{xx}^{(2)}, -\frac{h^2}{4} \tau_{xy}^{(2)}$
Shearing Forces	$Q_x, Q_y$	$Q_x^{(1)}, Q_y^{(1)}$	$-\frac{h^2}{6} \tau_{xz}^{(1)}, -\frac{h^2}{6} \tau_{yz}^{(1)}$
	$S_x, S_y$	$\frac{35}{2} Q_x^{(2)}, \frac{35}{2} Q_y^{(2)}$	$\frac{h^2}{4} \tau_{xz}^{(2)}, \frac{h^2}{4} \tau_{yz}^{(2)}$
Resultant Out-of-Plane Normal Forces	T	$\frac{35}{2} (Q_{x,x}^{(2)} + Q_{y,y}^{(2)})$	$-\frac{h^2}{4} \tau_{zz}^{(2)}$
Deflections	w, v	$W_x^{(1)}, -\frac{4}{21} W_z^{(2)}$	$-W^{(1)}, \frac{2}{7} W^{(2)}$
Rotational Angles	$\phi_x, \phi_y$	$\beta_x^{(1)}, \beta_y^{(1)}$	$\frac{2}{h} u^{(1)}, \frac{2}{h} v^{(1)}$
	$\psi_x, \psi_y$	$-\frac{4}{21} \beta_x^{(2)}, -\frac{4}{21} \beta_y^{(2)}$	$-\frac{4}{7h} u^{(2)}, -\frac{4}{7h} v^{(2)}$

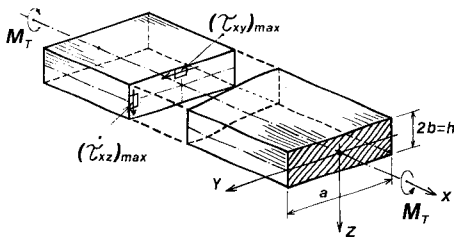
果は上添字 (n) として  $n=1$  のみを採用 (1-order theory) してやればよく、そのことは Reissner<sup>2)</sup> および古賀<sup>3)</sup> の論文で強調されている<sup>12)</sup>。それらの論文とここで導出した結果とを比較すればわかるように、著者らの理論はすべての式において系統的な記号法の採用と基礎式の導出がなされており、任意次数の理論系への拡張が容易に実行できるようになっている。

最後に本論文の有効性を検討するために Fig. 2 に示すような長方形平板の対向する端面にねじりモーメント  $M_T$  が作用し、その端面に一定のねじれ角  $\theta$  が生じる問題を取り上げよう。本例題の解析過程は Reissner 論文<sup>1)</sup> および古賀論文<sup>3)</sup> において詳細に記述されているので、ここでは数値結果のみを示すことにする。図中に示した板表面層での (最大) せん断応力、ねじりモーメント  $M_T$  と  $\theta$  との関係として次式：

$$(\tau_{xy})_{max} = k_{xy} \cdot G\theta b, \quad (\tau_{xz})_{max} = k_{xz} \cdot G\theta b,$$

$$M_T = k_T G\theta \cdot \frac{b^3 a}{8} \dots \dots \dots (20)$$

のように定義すれば、種々の  $a/2b (= a/h)$  に対する集中係数： $k_{xy}$ ,  $k_{xz}$ ,  $k_T$  の絶対値の計算を、厳密解を含めて 3 種類の order による理論および著者らの以前に提



**Fig. 2** Coordinates and plate shape with torsion at the ends of a rectangular plate.

注 2) なお、ここでの 2-order の理論式を簡略化することにより 1-order の理論式を補正した中間的な改良理論が Reissner によりいくつか試みられている<sup>5), 6)</sup>。

**Table 2** Comparison of concentration factors  $k_{xy}, k_{xz}$  and  $k_T$  under the torsion of a plate with variation of parameter  $a/h$ .

k	a/h	Exact	Hybrid Assum. Theory			Displacement Assum. Theory	
			1-order	2 order	3-order	2-order	3-order
$k_{xy}$	8.0	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
	5.0	1.9987	1.9985	1.9988	1.9987	1.9987	1.9987
	3.0	1.9709	1.9652	1.9711	1.9709	1.9709	1.9709
	2.0	1.8601	1.8305	1.8613	1.8601	1.8600	1.8601
	1.5	1.6951	1.6299	1.6977	1.6951	1.6950	1.6951
	1.0	1.3506	1.2105	1.3545	1.3510	1.3519	1.3506
	0.5	0.7394	0.4952	0.7244	0.7426	0.7453	0.7398
	0.2	0.2970	0.0960	0.2165	0.2832	0.2629	0.2995
	0.1	0.1485	0.0247	0.0650	0.1070	0.0877	0.1343
	$k_{xz}$	8.0	1.4849	1.5811	1.4625	1.4926	1.5133
5.0		1.4849	1.5811	1.4625	1.4929	1.5133	1.4791
3.0		1.4846	1.5809	1.4622	1.4926	1.5131	1.4788
2.0		1.4789	1.5755	1.4565	1.4868	1.5074	1.4730
1.5		1.4560	1.5538	1.4337	1.4640	1.4850	1.4502
1.0		1.3506	1.4527	1.3283	1.3586	1.3817	1.3448
0.5		0.9301	1.0416	0.9070	0.9379	0.9666	0.9239
0.2		0.3998	0.4840	0.3723	0.4087	0.4179	0.3917
0.1		0.2000	0.2480	0.1791	0.2098	0.2040	0.1960
$k_T$		8.0	0.3071	0.3070	0.3071	0.3071	0.3071
	5.0	0.2913	0.2912	0.2913	0.2913	0.2913	0.2913
	3.0	0.2633	0.2631	0.2633	0.2633	0.2633	0.2633
	2.0	0.2287	0.2283	0.2287	0.2287	0.2287	0.2287
	1.5	0.1958	0.1952	0.1958	0.1958	0.1958	0.1958
	1.0	0.1406	0.1396	0.1406	0.1406	0.1406	0.1406
	0.5	0.0572	0.0556	0.0571	0.0572	0.0574	0.0574
	0.2	0.0117	0.0107	0.0116	0.0116	0.0119	0.0119
	0.1	0.0031	0.0028	0.0030	0.0031	0.0032	0.0032

案した変位仮定に基づく一般化高次理論<sup>1)</sup>に対して求め、その結果を Table 2 に示した。理論式の order を上げるにつれ厳密解に近づきその修正効果が顕著であることが読み取れよう。なお、同一次数を採用した変位仮定型理論と本理論との数値比較は前者の方がやや精度のよい結果となっていることが観察される。

4. む す び

平板上下表面の条件を完全に満足する応力・変位仮定のいわゆる混合型の最も一般的な理論を定式化し、それらを特殊化すると、従来提案されている応力仮定ないしは応力・変位仮定型の諸理論と一致を示すとともに簡単な計算例によって、その有効性を検証したが、本理論は著者らが以前に提案した変位仮定型の一般化高次理論<sup>1)</sup>と対になるものであり、いくつかの基本的な問題に両者の理論を適用して、その理論特性を解明することが今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) 平島健一・根岸嘉和：土木学会論文報告集, No. 330, pp. 1~14, 1983; 同, No. 333, pp. 21~34, 1983; 同, No. 336, pp. 9~20, 1983; 同, No. 341, pp. 163~172, 1984.
- 2) Reissner, E.: ZAMM, 63, pp. 285~289, 1983.
- 3) 古賀達蔵：日本機械学会論文集 (A 編) 48, pp. 1151~1159, 1982; 古賀達蔵・遠藤修司：同, 48, pp. 818~826, 1982.
- 4) Reissner, E.: J. Appl. Mech., 12, pp. A 69~A 77, 1945.
- 5) Reissner, E.: Int. J. Solids Struct., 11, pp. 569~573, 1975.
- 6) Reissner, E.: Int. J. Solids Struct., 12, pp. 545~554, 1976.