

# 降伏部材選択方式によるトラス構造の 最適弾塑性設計法に関する一考察

## OPTIMAL ELASTIC-PLASTIC DESIGN OF TRUSS BY SELECTING THE YIELDING MEMBERS

石川信隆\*・香月 智\*\*・三原徹治\*\*\*・古川浩平\*\*\*\*

By Nobutaka ISHIKAWA, Satoshi KATSUKI, Tetsuji MIHARA and Kohei FURUKAWA

This study presents a sequential linear programming approach for the optimal elastic-plastic design of truss structures under the ductility factor and the ultimate load factor constraints. Little or no attempt has been made to generally cast the optimal elastic-plastic design of skeletal structures. The method is first formulated by the SLP primal and dual problems for the optimal elastic-plastic design using the holonomic elastic-plastic analysis and the limited ductility constraints. Then, a sensitivity analysis based on the shadow cost concept is applied to select the yielding members and to introduce their plastic deformations. Truss structures are designed to illustrate the applicability of the approach.

### 1. 緒 言

近年、国内外の構造物の設計法は許容応力度設計法と構造物あるいは部材の塑性域での応答を期待する塑性設計法とが並列的あるいは直列的に行われる傾向となっている。わが国の昭和55年度改訂の建築基準法<sup>1)</sup>でも、塑性解析による保有耐力の検討を2次設計として一部の建物に対して義務づけている。その設計の根拠は大地震時に対して構造物のねばり、つまり塑性率に期待することにより構造物の安全を図ろうとするもので、通常の使用設計荷重レベルに対しては許容応力度設計法により、異常時の終局荷重レベルに対しては塑性解析または弾塑性増分解析により検討することを規定している。

一方、経済性と安全性を同時に追求する最適設計法に関する研究に関しては、従来、構造物の挙動を弾性体とみなして、通常の使用設計荷重レベルにおける制約を考慮したいわゆる最適弾性設計と、構造物の挙動を剛塑性体と仮定して、終局荷重レベル以前で塑性崩壊しないよ

うな制約を考慮したいわゆる最適塑性設計に関する研究がそれぞれ別個に数多く行われてきた。しかし、構造物の挙動を弾塑性体と考えて塑性率制約を考慮した最適弾塑性設計法に関しては、Maier<sup>2)</sup>が将来展望としてRC構造に対してその必要性を述べているほかに、地震荷重を対象とした山田・家村・古川・坂本<sup>3)</sup>による耐震設計および森・石川・西野<sup>4)</sup>による鋼橋脚を取り扱ったものがあるにすぎず、静的荷重を対象とした最適弾塑性設計についてはほとんど皆無といって差し支えない。

本研究は、静的荷重における塑性率制約および終局荷重制約を考慮した最適弾塑性設計法の開発を企図し、その第一歩としてトラス構造を対象として降伏部材を逐次選択していく方法を提案するものである。すなわち、その方法はまずホロノミック弾塑性解析の基本条件を用い、降伏部材選択方式による弾塑性設計法の開発を試み、次いで逐次線形計画法(SLP)の主問題と双対問題による定式化を行った。設計手順としては、まず弾性限界設計を行い、降伏状態に達した部材の中から目的関数(重量)を最も改良するように双対変数を用いた感度解析により降伏部材の選択を行い、その部材の塑性変形を発生させ、最終的に降伏部材が得られなくなるときの計算を終了するものである。

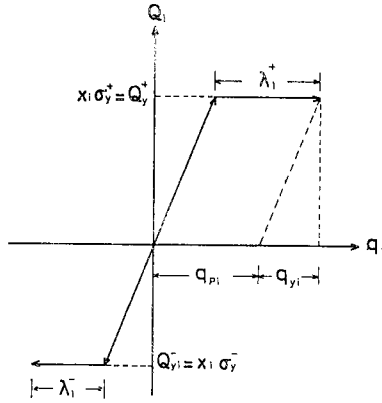
本設計法の妥当性と応用性を示すために3部材トラス

\* 正会員 工博 防衛大学校教授 土木工学科  
(〒239 横須賀市走水1-10-20)

\*\* 学生会員 防衛大学校理工学研究科学生(同上)

\*\*\* 正会員 防衛大学校助手 土木工学科(同上)

\*\*\*\* 正会員 工博 山口大学助教授 建設工学科  
(〒755 宇部市常盤台2557)



図一 部材の弾塑性挙動

および10部材トラスを対象として数値計算を行い、本法と従来の最適弾性設計および最適塑性設計と比較検討し、本設計法で得られる構造物の特性について考察した。なお、本研究における各部材の弾塑性挙動は図一に示すような完全弾塑性型とする。

## 2. 最適弾塑性設計の基本式

### (1) ホロノミック弾塑性解析の基本式<sup>9)</sup>

弾塑性解析手法には大別して2つの方法があり、その一つはホロノミック弾塑性解析で、全変形理論に基づき過去の荷重履歴とは無関係にある荷重レベルでの構造物の弾塑性変形状態を求めるもので、除荷の影響を無視しているが設計問題への適用が可能である。第2の方法はいわゆる弾塑性増分解析法で、ひずみ増分理論に基づき荷重経路に依存し、除荷の影響をも考慮しながら逐次荷重-変形関係を追跡するもので、解の厳密性はあるが設計問題への適用は困難である。よって、本研究では設計問題への適用可能なホロノミック弾塑性解析を用い、その基本条件式を示せば以下ようになる。

$$C^T Q = \alpha_0 F \dots\dots\dots (1)$$

$$q = Cu \dots\dots\dots (2\cdot a)$$

$$q = q^e + q^p \dots\dots\dots (2\cdot b)$$

$$q^e = k^{-1} Q \dots\dots\dots (3)$$

$$q^p = N\lambda, \lambda \ge 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\phi = N^T Q - R \le 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\phi^T \lambda = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここに、式(1)は部材内力  $Q$  が節点に働く外力  $F$  と終局荷重レベル(設計荷重係数  $\alpha_0$ ) でつり合うという平衡条件式で、式(2・a)は部材内力  $Q$  に対応する内変形  $q$  が節点変位  $u$  と幾何学的に結合する変形適合条件式、式(2・b)は全変形理論に基づき内変形  $q$  が弾性内変形  $q^e$  と塑性内変形  $q^p$  の和によって表わされることを示す。式(3)はフックの法則に従い弾性内変形  $q^e$  が

集合柔性マトリックス  $k^{-1}$  によって内力  $Q$  と線形関係にあることを示し、式(4)は塑性内変形  $q^p$  が降伏線 ( $\phi=0$ ) の法線方向に発生することを示し、単位法線マトリックス  $N$  に塑性変形の大きさを表わす塑性乗数ベクトル  $\lambda$  を乗じたものとなる。式(5)は線形化された降伏条件式で、部材内力  $Q$  が降伏線の内側 ( $\phi \le 0$ ) になければならないことを意味する。式(6)は、いわゆる塑性流れ条件を表わすもので、降伏関数ベクトル  $\phi$  が  $\phi \le 0$  で、塑性乗数ベクトル  $\lambda$  が  $\lambda \ge 0$  であるので、各ベクトル要素  $\phi_i, \lambda_i$  に対して次の式(7)が成立している。

$$(i) \text{ if } \phi_i < 0 \text{ のとき } \lambda_i = 0 \dots\dots\dots (7\cdot a)$$

$$(ii) \text{ if } \phi_i = 0 \text{ のとき } \lambda_i \ge 0 \dots\dots\dots (7\cdot b)$$

式(7・a)は、(i)  $\phi_i < 0$  (弾性範囲) のとき  $\lambda_i = 0$  (塑性変形は発生しない) となる条件であり、(ii) 逆に式(7・b)は  $\phi_i = 0$  (塑性範囲) のとき  $\lambda_i \ge 0$  (塑性変形が発生する) となる条件を意味する。ここに、式(1)~式(7)までの記号は次のとおりである。 $C^T, C$ =平衡マトリックスおよび適合マトリックス; $k, k^{-1}$ =集合剛性マトリックスおよび集合柔性マトリックス; $N$ =線形化降伏線に対する単位外向き法線マトリックス; $R$ =塑性容量ベクトル; $\phi$ =降伏関数ベクトル; $F$ =外力ベクトル; $u$ =節点変位ベクトル; $Q$ =内力ベクトル; $q$ =全内変形ベクトル; $q^e$ =弾性内変形ベクトル; $q^p$ =塑性内変形ベクトル; $\alpha_0$ =設計荷重係数。

さて、式(2・b)に式(2・a),(3),(4)を代入すると内力  $Q$  が次のように表わされる。

$$Q = kCu - kN\lambda \dots\dots\dots (8\cdot a)$$

次に式(8・a)を式(1)に代入して節点変位  $u$  を求めると次式が得られる。

$$u = K_e^{-1} \alpha_0 F + K_e^{-1} CkN\lambda \dots\dots\dots (8\cdot b)$$

ただし、 $K_e (= C^T k C)$  は構造全体の弾性剛性マトリックス。式(8・b)は式(1)~(4)までを満足する解であり、いま仮に  $\lambda=0$ 、すなわち塑性変形を考慮しない場合は式(8・b)の第1項目のみとなり、これは弾性解析( $\alpha_0=1$ )における変形法の基本式に一致する。

式(8・a)および式(8・b)を式(5)に代入すれば、式(1)~(5)を満足する降伏条件式が次式のように得られる。

$$\phi = B + D\lambda \le 0 \dots\dots\dots (9)$$

$$\text{ただし、 } B = N^T k C K_e^{-1} \alpha_0 F - R$$

$$D = N^T k C K_e^{-1} C^T k N - N^T k N$$

よって、ホロノミック弾塑性解析は式(9)と式(6)を満足する  $\lambda, \phi$  を求める問題になる。

### (2) 最適弾塑性設計の基本式

ここでは、目的関数に構造全体の重量  $W$  または体積  $V$  を選び、制約条件として各部材の塑性率制約および

終局荷重係数制約の2つを考慮したうえで、設計変数  $x$  を部材断面積とすれば、最適弾塑性設計の基本式が次のように表わされる。

$$\text{目的関数： } W = \mathbf{a}^T \mathbf{x} \rightarrow \min \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

$$\text{制約条件： } \boldsymbol{\phi} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0} \dots\dots\dots (10 \cdot b)$$

$$\boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \dots\dots\dots (10 \cdot c)$$

$$\boldsymbol{\mu} \leq \boldsymbol{\mu}_a \text{ もしくは } \boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{\lambda}_a \dots\dots\dots (10 \cdot d)$$

$$\alpha \geq \alpha_a > \alpha_0 \dots\dots\dots (10 \cdot e)$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{Q}^c - \alpha \mathbf{F} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (10 \cdot f)$$

$$\mathbf{N}^T \mathbf{Q}^c - \bar{\mathbf{R}} \mathbf{x} \leq \mathbf{0} \dots\dots\dots (10 \cdot g)$$

ここに、式(10・a)は構造全重量が最小となることを示し、式(10・b)、(10・c)は構造物が弾塑性状態にあるときの解析式を、式(10・d)はある部材の塑性率  $\mu_i$  (塑性乗数  $\lambda_i$ ) が許容塑性率  $\mu_{ai}$  (許容塑性乗数  $\lambda_{ai}$ ) 以内であることを表わしている。また、式(10・e)は終局設計荷重レベル ( $\alpha_0 \mathbf{F}$ ) において構造物が塑性崩壊に至らないことを保障している。式(10・f)、(10・g)は塑性設計における静的アプローチを示し、式(10・f)は崩壊荷重  $\alpha \mathbf{F}$  と崩壊荷重時における内力  $\mathbf{Q}^c$  とがつり合うという平衡条件式を、式(10・g)は  $\mathbf{Q}^c$  に対する降伏条件を示している。ただし、

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^T \mathbf{k} \mathbf{C} \mathbf{K}_e^{-1} \alpha_0 \mathbf{F} - \mathbf{R}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^T \mathbf{k} \mathbf{C} \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{k} \mathbf{N} - \mathbf{N}^T \mathbf{k} \mathbf{N}$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{C}^T \mathbf{k} \mathbf{C}$$

また、 $W$  = 構造全重量； $\mathbf{a}$  = 設計変数に対する重量係数ベクトル； $\boldsymbol{\mu}$  = 部材塑性率ベクトル； $\alpha$  = 崩壊荷重係数； $\alpha_a$  = 崩壊荷重係数に対する許容値であり、 $\alpha_0$  よりやや大きい値を与えて無制限塑性流れ状態を防ぐものである； $\mathbf{Q}^c$  = 崩壊荷重状態における内力ベクトル； $\bar{\mathbf{R}}$  = 設計変数に対する塑性容量の1次微係数マトリックス。

### (3) 降伏部材選択のための感度解析

式(10)の基本式の中で、式(10・c)は式(7)より明らかなように、計算過程において  $\phi_i$  と  $\lambda_i$  のいずれを用いるかを判定するもので、その結果制約空間の連続性が失われることになる。よって、これを降伏部材選択のための判定条件に用い、残りの式をSLP(逐次線形計画法)の形に変換して解くこととする。ここでは、降伏部材選択のための基本式を以下のように導く。

式(10・c)の判定条件とは、降伏関数  $\phi$  および塑性乗数  $\lambda$  を式(7・a)で表わされるアクティブでない部材 ( $\phi_n < 0, \lambda_n = 0$ ) と式(7・b)で表わされるアクティブな部材 ( $\phi_s = 0, \lambda_s \geq 0$ ) とに分類することである。いま設計基本式を塑性率制約のみに限定すれば次のようになる。

$$\text{目的関数： } W = \mathbf{a}^T \mathbf{x} \rightarrow \min \dots\dots\dots (11 \cdot a)$$

$$\text{制約条件： } \boldsymbol{\phi} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0} \dots\dots\dots (11 \cdot b)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{\lambda}_a \dots\dots\dots (11 \cdot c)$$

ここで、問題は塑性乗数ベクトル  $\boldsymbol{\lambda}^T = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$  の中のどれを取り入れることが目的関数を最適解に近づけることができるかを判定することである。当初すべての部材がアクティブでない ( $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ ) として式(11)を解く。この設計を弾性限界設計と呼び、これは通常的最適弾塑性設計における許容応力制約の代わりに降伏応力制約を考慮した場合に合致する。得られた解  $\mathbf{x}_0$  においてある一つの部材  $r$  がアクティブ ( $\phi_r = 0$ ) になった場合には塑性乗数  $\lambda_r$  のみが式(11・b)の中で選ばれ、式(11)を解くことになる。

次に、2つの部材  $r_1, r_2$  が同時にアクティブ ( $\phi_{r_1} = 0, \phi_{r_2} = 0$ ) になった場合、塑性乗数  $\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2}$  のうちどちらを選択すればよいかを考える。この基本的考え方としては塑性乗数  $\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2}$  のうちどちらが目的関数をより改良できるかという一種の感度解析になる。この降伏部材選択のための感度解析を、2つの設計変数  $x_1, x_2$  の場合について説明する。まず弾性限界設計において2つの降伏関数  $\phi_1, \phi_2$  がアクティブになった状態を考える。

$$W = a_1 x_1 + a_2 x_2 \rightarrow \min \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

$$\phi_1 = B_1(x) = 0 \dots\dots\dots (12 \cdot b)$$

$$\phi_2 = B_2(x) = 0 \dots\dots\dots (12 \cdot c)$$

ここで、上式のラグランジュ関数を作ると次式のようになる。

$$L = W + \beta_1 \cdot B_1(x) + \beta_2 \cdot B_2(x) \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 $\beta_1, \beta_2$  は双対変数である。最適解  $\mathbf{x}_0$  においては次式のようなKuhn-Tucker条件が成立する。

$$|\Delta W| + \beta_1 |\Delta B_1(x)| + \beta_2 |\Delta B_2(x)| = 0 \dots\dots\dots (14 \cdot a)$$

$$\phi_1 = B_1(x) = 0; \phi_2 = B_2(x) = 0 \dots\dots\dots (14 \cdot b)$$

ただし、

$$|\Delta W| = \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_1}; \frac{\partial W}{\partial x_2} \right\}; |\Delta B_1(x)| = \left\{ \frac{\partial B_1}{\partial x_1}; \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \right\};$$

$$|\Delta B_2(x)| = \left\{ \frac{\partial B_2}{\partial x_1}; \frac{\partial B_2}{\partial x_2} \right\}$$

式(14・a)において  $|\Delta W|$  は図-2に示すように最適値  $\mathbf{x}_0$  における目的関数の改良方向を示す法線ベクトルで、また  $|\Delta B_1|, |\Delta B_2|$  も弾性限界状態における降伏条件  $\phi_1 = 0$  および  $\phi_2 = 0$  の法線ベクトルを示す。よって、現在の最適値  $\mathbf{x}_0$  において  $x$  の増分  $\Delta x$  による目的関数の改良量  $dW$  は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} dW &= |\Delta W|^T \Delta x \\ &= -\beta_1 |\Delta B_1|^T \Delta x - \beta_2 |\Delta B_2|^T \Delta x \\ &= -\beta_1 dB_1 - \beta_2 dB_2 \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ここで、上式の  $dB_1, dB_2$  は以下のように求められる。まず図-2のA領域は弾性設計領域であり、B領域またはC領域は塑性変形  $\lambda_1 \geq 0$ 、または  $\lambda_2 \geq 0$  を許す領域で、さらにD領域は  $\lambda_1 \geq 0$  および  $\lambda_2 \geq 0$  を同時に許す領域であり、それぞれ次の条件式を満足する。

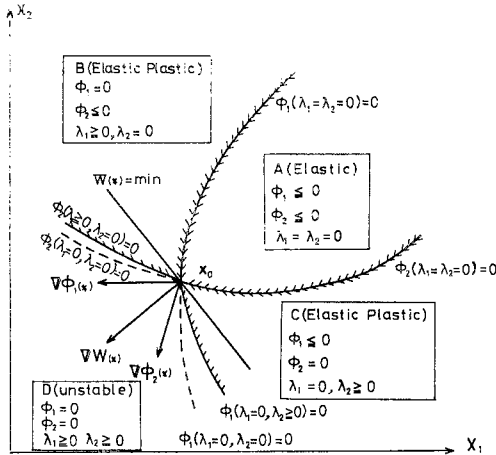


図-2 降伏部材選択のための判定

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 A \text{ 領域} : \phi_1(\lambda_1=0, \lambda_2=0) = B_1(x) \leq 0 \\
 \phi_2(\lambda_1=0, \lambda_2=0) = B_2(x) \leq 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16 \cdot a) \\
 & \left. \begin{aligned}
 B \text{ 領域} : \phi_1(\lambda_1 \geq 0, \lambda_2=0) \\
 = B_1(x) + D_{11}(x) \lambda_1 = 0 \\
 \phi_2(\lambda_1 \geq 0, \lambda_2=0) \\
 = B_2(x) + D_{21}(x) \lambda_1 \leq 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16 \cdot b) \\
 & \left. \begin{aligned}
 C \text{ 領域} : \phi_1(\lambda_1=0, \lambda_2 \geq 0) \\
 = B_1(x) + D_{12}(x) \lambda_2 \leq 0 \\
 \phi_2(\lambda_1=0, \lambda_2 \geq 0) \\
 = B_2(x) + D_{22}(x) \lambda_2 = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16 \cdot c) \\
 & \left. \begin{aligned}
 D \text{ 領域} : \phi_1(\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0) \\
 = B_1(x) + D_{11}(x) \lambda_1 + D_{12}(x) \lambda_2 = 0 \\
 \phi_2(\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0) \\
 = B_1(x) + D_{21}(x) \lambda_1 + D_{22}(x) \lambda_2 = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16 \cdot d)
 \end{aligned}$$

ここで、たとえば式 (16・b) における  $\phi_1=0$  の式は、 $B_1(x) = -D_{11}(x) \lambda_1$  とも表わされる。いま前段階の値を  $\sim$  で示すと、 $B_1(x) = \tilde{B}_1(x) + dB_1$  となり、式(14・b)より  $\tilde{B}_1(x)=0$  であるので、増分量  $dB_1$  は  $dB_1 = -D_{11}(x) \lambda_1$  となる。同様にそれぞれの増分量  $dB_i$  は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 & (i) \lambda_1 \text{ を選ぶ場合 (B 領域へ移る場合)} \\
 & dB_1 = -D_{11}(x) \lambda_1 \dots\dots\dots (17 \cdot a) \\
 & dB_2 = -|D_{21}(x) \lambda_1 + S_2| \dots\dots\dots (17 \cdot b) \\
 & \therefore dW_B = \beta_1 D_{11}(x) \lambda_1 + \beta_2 |D_{21}(x) \lambda_1 + S_2| \dots\dots\dots (17 \cdot c) \\
 & (ii) \lambda_2 \text{ を選ぶ場合 (C 領域へ移る場合)} \\
 & dB_1 = -|D_{12}(x) \lambda_2 + S_1| \dots\dots\dots (18 \cdot a) \\
 & dB_2 = -D_{22}(x) \lambda_2 \dots\dots\dots (18 \cdot b) \\
 & \therefore dW_C = \beta_1 |D_{12}(x) \lambda_2 + S_1| + \beta_2 D_{22}(x) \lambda_2 \dots\dots\dots (18 \cdot c)
 \end{aligned}$$

ただし、 $S_1, S_2$  はスラック変数である。

さて、塑性乗数  $\lambda_1, \lambda_2$  およびスラック変数  $S_1, S_2$  は

未知であるので、ここでは  $\lambda_1 = \lambda_{1a}, \lambda_2 = \lambda_{2a}, S_1 = 0, S_2 = 0, x = x_0$  と仮定することにより次のような目的関数の改良予測値を得る。

$$dW_B = \lambda_{1a} (\beta_1 D_{11} + \beta_2 D_{21}) \dots\dots\dots (19 \cdot a)$$

$$dW_C = \lambda_{2a} (\beta_1 D_{12} + \beta_2 D_{22}) \dots\dots\dots (19 \cdot b)$$

よって、上式によって求められる量のうち大きい方が、目的関数をより多く改良できるという予測が得られる。式 (19) は弾性限界設計において導いたが、すでに数個の降伏部材がある場合においても目的関数の改良予測式 (19) は次のような一般形に拡張できる。

$$dW_i = \lambda_{ia} \beta^T D_i(x) \quad (i=1,2,\dots) \dots\dots\dots (20)$$

よって、上式の中で負の最大値を与える  $i$  部材が次の設計における降伏部材として選択される。

なお、式 (20) の双対変数  $\beta$  は次の SLP による設計基本式の中の式 (22・b) の制約条件に対応し、式 (24) より変数  $w_{is}$  として求められる。

(4) 設計基本式の SLP 化

式 (10) の設計基本式は非線形計画問題であり、各式を線形近似して逐次線形計画問題として解くこととする。その際、式 (10・b) の非線形性が強く、この線形近似の精度を上げるため次式のように設計変数  $x_i$  の逆変数  $y_i$  を用いることにした。

$$y_i = 1/x_i \dots\dots\dots (21)$$

よって、式 (10) の設計基本式を逆変数  $y_i$  によってテイラー展開し 1 次項をとれば、次のような主問題形式としての SLP による設計基本式が得られる。

$$\text{目的関数} : z = -d^T y \rightarrow \min \dots\dots\dots (22 \cdot a)$$

制約条件 :

$$\Phi_y y + \Phi_\lambda \lambda = -\tilde{\phi}_s + \Phi_y \tilde{y} + \Phi_\lambda \tilde{\lambda} \dots\dots\dots (22 \cdot b)$$

$$\Phi_y y + \Phi_\lambda \lambda \leq -\tilde{\phi}_n + \Phi_y \tilde{y} + \Phi_\lambda \tilde{\lambda} \dots\dots\dots (22 \cdot c)$$

$$\lambda \leq \min\{\lambda_a, (1+\epsilon)\tilde{\lambda}\} \dots\dots\dots (22 \cdot d)$$

$$\lambda \geq (1-\epsilon)\tilde{\lambda} \dots\dots\dots (22 \cdot e)$$

$$y \leq (1+\epsilon)\tilde{y} \dots\dots\dots (22 \cdot f)$$

$$y \geq (1-\epsilon)\tilde{y} \dots\dots\dots (22 \cdot g)$$

$$\alpha \geq \alpha_a \dots\dots\dots (22 \cdot h)$$

$$N^T Q^c - R_y y \leq \tilde{R} - R_y \tilde{y} \dots\dots\dots (22 \cdot i)$$

$$C^T Q^c - \alpha F = 0 \dots\dots\dots (22 \cdot j)$$

$$y \geq 0, \lambda_s \geq 0, \alpha > 0$$

ただし、 $d^T = [a_1/\tilde{y}_1^2, a_2/\tilde{y}_2^2, \dots, a_n/\tilde{y}_n^2]$

上式の中で添字  $s$  はアクティブな部材を示し、添字  $n$  はアクティブでない部材を示す。また  $\epsilon$  は move limit の係数で、次式により決定される。

$$\epsilon = \max\{\epsilon_z, \eta \cdot \epsilon_y\} \leq \epsilon_0 \dots\dots\dots (23 \cdot a)$$

$$0 < \eta < 1.0, 0 < \epsilon_0 < 1.0 \dots\dots\dots (23 \cdot b, c)$$

ここに  $\epsilon_z$  は目的関数  $z$  の変化率、 $\epsilon_y$  は変数  $y$  および  $\lambda$  の変化率の最大値であり、また  $\epsilon_0$  は move limit の初期値で、 $\eta$  は move limit の低減率である。さらに式 (22)

中の  $\Phi_y, \Phi_\lambda, R_y$  は次式のようになる。

$$\Phi_y = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y_1}, \frac{\partial \phi}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial y_n} \right]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_i} = \frac{\partial B}{\partial y_i} + \frac{\partial D}{\partial y_i} \lambda$$

$$\frac{\partial B}{\partial y_i} = N^T \frac{\partial k}{\partial y_i} C K_e^{-1} \alpha_0 F - N^T k C K_e^{-1} C^T \frac{\partial k}{\partial y_i}$$

$$\cdot C K_e^{-1} \alpha_0 F - \frac{\partial R}{\partial y_i}$$

$$\frac{\partial D}{\partial y_i} = N^T \frac{\partial k}{\partial y_i} C K_e^{-1} C^T k N$$

$$- N^T k C K_e^{-1} C^T \frac{\partial k}{\partial y_i} C K_e^{-1}$$

$$\cdot C^T k N + N^T k C K_e^{-1} C^T \frac{\partial k}{\partial y_i} N - N^T \frac{\partial k}{\partial y_i} N$$

$$\Phi_\lambda = N^T k C K_e^{-1} C^T k N - N^T k N$$

$$R_y = \left[ \frac{\partial R}{\partial y_1}, \frac{\partial R}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial R}{\partial y_n} \right]$$

ここで、 $l_0$ =降伏条件式の数、 $m_0$ =内力の数、 $n_0$ =設計変数の数、 $r_0$ =構造物の全節点自由度の数とすれば式(22)は、未知数の数( $l_0 + 2m_0 + n_0 + 1$ )に比し、制約条件式の数( $4l_0 + 2n_0 + r_0 + 1$ )がきわめて多くなる。そのため式(22)にLPの双対定理を適用して次式のような双対問題に変換し、これを以後の設計基本式として用いることにする。

目的関数：

$$z = b_{1s}^T w_{1s} + b_{1n}^T w_{1n} + b_2^T w_2 + b_3^T w_3 + b_4^T w_4 + b_5^T w_5 - \alpha_0 w_6 + b_6^T w_7 + 0^T w_8 \rightarrow \min \dots \dots (24 \cdot a)$$

制約条件：

$$\Phi_y^T w_{1s} + \Phi_y^T w_{1n} + w_4 - w_5 - R_y^T w_7 \geq d \dots \dots (24 \cdot b)$$

$$\Phi_\lambda^T w_{1s} + \Phi_\lambda^T w_{1n} + w_2 - w_3 \geq 0 \dots \dots (24 \cdot c)$$

$$-w_6 - F^T w_8 \geq 0 \dots \dots (24 \cdot d)$$

$$N w_7 + C w_8 = 0 \dots \dots (24 \cdot e)$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0, w_4 \geq 0$$

$$w_5 \geq 0, w_6 \geq 0, w_7 \geq 0$$

ただし、 $b_{1s} = \bar{\phi}_s + \Phi_y \bar{y} + \Phi_\lambda \bar{\lambda}$   
 $b_{1n} = \bar{\phi}_n + \Phi_y \bar{y} + \Phi_\lambda \bar{\lambda}$   
 $b_2 = \min \{ (1 + \epsilon) \bar{\lambda}, \lambda_a \}$   
 $b_3 = -(1 - \epsilon) \bar{\lambda}$   
 $b_4 = (1 + \epsilon) \bar{y}$   
 $b_5 = -(1 - \epsilon) \bar{y}$   
 $b_6 = \bar{R} - R_y \bar{y}$

ここに、 $w_{1s}, w_{1n}, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8$  はそれぞれ式(22-b)~(22-j)に対する双対変数である。

### 3. 設計手順

以上の設計基本式を用いた最適弾塑性設計は、以下の設計手順で行われる。

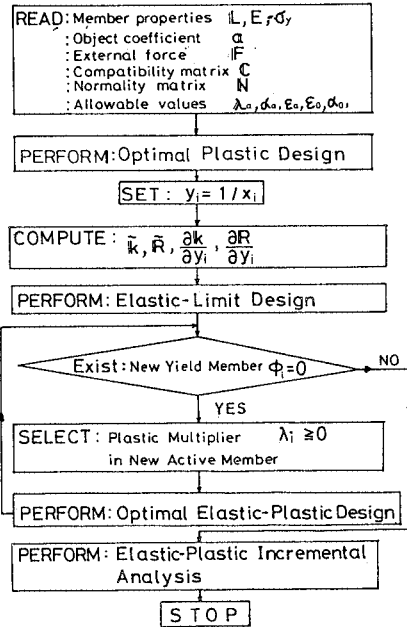


図-3 最適弾塑性設計の設計手順フローチャート

- (1) まず設計変数の初期値を求めるため、式(22-a)および式(22-h)~(22-j)を用いて最適塑性設計を行う。
- (2) 上記の初期値をもとにして、弾性限界設計を式(22)で $\lambda=0$ とおいて行う。
- (3) 上記の解の中でアクティブな降伏条件( $\phi_i=0$ )に対して式(20)を用いて感度解析を行い、重量を最も減少可能な降伏部材を選択し、それに対応する $\lambda_i$ を導入する。
- (4) 式(22)または式(24)による設計を行い、式(20)により新たな降伏部材を選択し、再度SLPによる設計を繰り返す。
- (5) 新たな降伏部材が得られなくなったとき設計を終了する。
- (6) 最終的な解に対し、弾塑性増分解析を行い、解の検討を行う。以上の設計手順をフローチャートに示せば図-3のようになる。

### 4. 計算例

#### (1) 計算例1: 3部材トラスの設計

まず図-4に示す3部材トラスの最適弾塑性設計を行う。本例に対してはすでに最適弾塑性設計の結果<sup>9)</sup>が得られているので、これらと弾塑性設計の結果とを比較することにより本法の妥当性を検証するとともに、弾塑性設計の特性を考察する。

#### a) 弾性限界設計

表-1および図-5に許容塑性率 $\mu_a$ を1.0~2.0に変



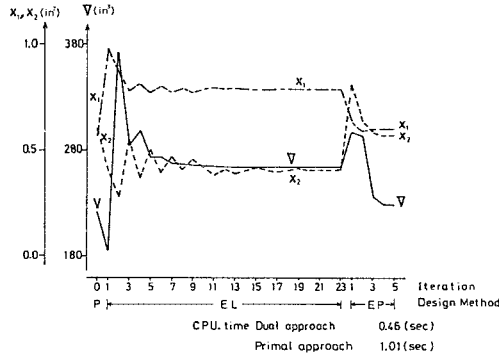
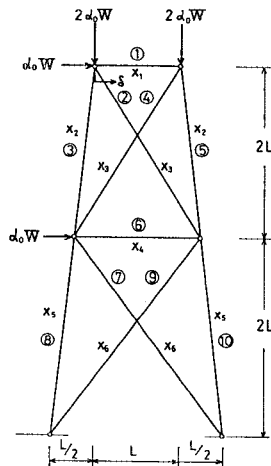


図-7 3部材トラスの設計収束状況

適塑性設計による初期値の設定法および move limit の妥当性が確認できる。また双対問題と主問題による解は完全に一致したが、双対問題の場合の計算時間は主問題に比し約半分に短縮できることが認められた。この差は設計変数の増大に伴い顕著になると思われるので、本研究では以後双対問題を用いて設計を行った。

(2) 計算例2: 10部材トラスの設計

次に図-8に示す2次不静定の10部材トラスを対象として弾塑性設計を行う。本例に対しては、表-2に示すように最小断面制約の条件を2種類、許容塑性率を  $\mu_a=1.0$  (弾性限界設計),  $\mu_a=1.875$  (許容塑性ひずみ0.1%),  $\mu_a=5.375$  (許容塑性ひずみ0.5%) の3通りに変化させて計算を行った。得られた設計結果を表-3(a), (b)に示し、またこれらの設計値に対する弾塑性



$W = 20t$   
 $L = 100cm$   
 $E = 2.1 \times 10^4 t/cm^2$   
 $\sigma_y' = \sigma_y = 2.4 t/cm^2$   
 $d_0 = 1.7$   
 $d_a = 1.01 \times 1.7$

図-8 10部材トラス

表-2 設計番号と設計条件

Case	A1	A2	A3	B1	B2	B3
$x_{min(1,2,3)}$	1.00			20.0		
$x_{min(4,5,6)}$	1.00			30.0		
$\mu_a$	1000	1875	5375	1000	1875	5375

表-3 10部材トラスの設計結果

(a) Case A

member	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	V
A1	$X_1$ : 2.82	23.7	27.8	23.7	27.8	1.00	18.7	57.9	18.7	57.9	0.5610
	$N_1$ : -4.44	-56.7	-19.9	-339	-65.6	1.15	-44.8	11.1	30.5	-13.7	
	$\sigma_1$ : -2.25	-24.0	-0.72	-0.14	-2.36	1.15	-24.0	0.19	1.63	-2.37	
	$\mu_1$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	
A2	$X_1$ : 2.03	24.9	26.8	24.9	26.8	1.35	15.9	60.1	15.9	60.1	0.5559
	$N_1$ : -4.44	-59.8	-17.4	-638	-63.1	-268	-380	6.00	37.3	-14.3	
	$\sigma_1$ : -2.19	-24.0	-0.65	-0.26	-2.36	-1.98	-24.0	0.10	2.35	-2.37	
	$\mu_1$	1.277	1.875	1.875	1.875	1.875	1.875	1.875	1.875	1.875	
A3	$X_1$ : 10.7	11.3	38.5	11.3	38.5	7.15	15.9	60.1	15.9	60.1	0.5559
	$N_1$ : -25.3	-2.70	-4.55	26.5	-9.11	-16.6	-380	6.00	37.3	-14.3	
	$\sigma_1$ : -23.6	-24.0	-1.18	23.5	-2.37	-2.32	-24.0	0.10	2.35	-2.37	
	$\mu_1$	2.587	1.935	1.935	1.935	1.935	1.935	1.935	1.935	1.935	
P.D.	$X_1$ : 10.7	11.3	38.5	11.3	38.5	7.15	15.9	60.1	15.9	60.1	0.5559

(b) Case B

member	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	V
B1	$X_1$ : 2.00	22.0	29.3	2.00	29.3	3.00	30.0	54.3	30.0	54.3	0.6650
	$N_1$ : -8.91	-52.8	-23.4	653	-69.1	6.44	-54.1	18.2	21.2	-13.0	
	$\sigma_1$ : -0.45	-24.0	-0.80	0.030	-2.36	0.21	-1.80	0.34	0.71	-2.40	
	$\mu_1$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
B2	$X_1$ : 2.00	20.0	31.0	2.00	31.0	3.00	30.0	4.98	30.0	4.98	0.6444
	$N_1$ : -12.0	-4.80	-2.75	54.6	-73.2	1.51	-68.3	28.91	70.3	-1.20	
	$\sigma_1$ : -0.60	-24.0	-0.89	0.27	-2.36	0.50	-2.28	0.58	0.23	-2.40	
	$\mu_1$	1.114	1.875	1.875	1.875	1.875	1.875	1.875	1.875	1.875	
B3	$X_1$ : 2.00	20.0	31.0	2.00	31.0	3.00	30.0	4.94	30.0	4.94	0.6426
	$N_1$ : -12.0	-4.80	-2.75	54.6	-73.2	1.62	-69.7	30.1	55.6	-1.19	
	$\sigma_1$ : -0.60	-24.0	-0.89	0.27	-2.36	0.54	-2.32	0.61	0.19	-2.40	
	$\mu_1$	1.110	1.969	1.969	1.969	1.969	1.969	1.969	1.969	1.969	
P.D.	$X_1$ : 2.00	20.0	31.0	2.00	31.0	3.00	30.0	4.94	30.0	4.94	0.6426

P.D.: Plastic design at ( $\mu_a$ ) stage  
unit:  $X_1$ (cm),  $N_1$ (t),  $\sigma_1$ ( $t/cm^2$ ),  $V$ ( $m^3$ )

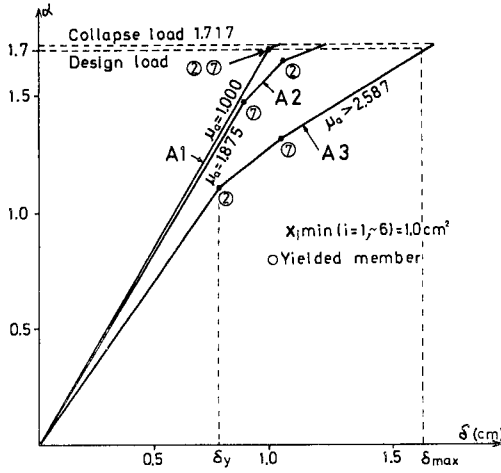
増解析の結果を図-9(a), (b)に荷重係数  $\alpha$  と上端の水平変位  $\delta$  との関係によって示した。

a) 降伏部材選択方式の妥当性

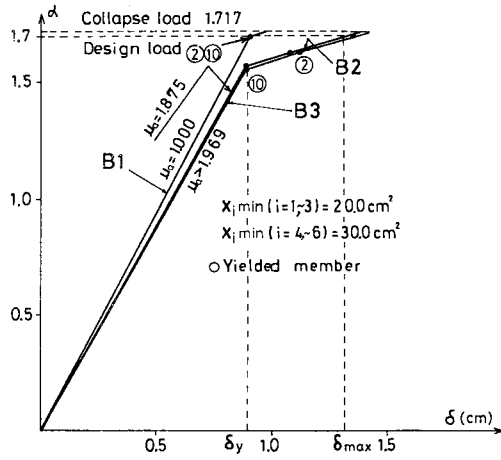
このトラスは2次不静定であるので、全部で2つの部材が降伏部材として選ばれる。表-3(a)のCase A1をみると部材②, ⑦が同時に  $\mu_1=1.0$  に達し、降伏していることがわかる。次にCase A2では部材⑦の  $\mu_1=1.875$  の方が部材②の  $\mu_1=1.277$  よりも大きく、先に部材⑦が降伏し、次いで部材②が降伏していることがわかる。Case A3はCase A2と異なり、先に部材②が降伏し、次いで部材⑦が降伏している。このことは図-9(a)の増解析の結果と一致している。これより本研究で提案した降伏部材選択手法の妥当性が確認できる。

b) 許容塑性率  $\mu_a$  が設計に与える影響

3部材トラスの計算例においては、許容塑性率を大きくすることにより構造体積の減少がみられたが、本計算例では表-3(a), (b)の右欄にみられるように、構造体積の減少の割合は非常に少ない。特にCase A2とA3では、同じ構造体積となっている。しかし、図-9(a)よりわかるように、Case A3の方がCase A2に比しきわめてダクティリティーが大きな設計となっていることが認められる。これは表-3(a)の最適断面積  $X_1$  の分布



(a) Case A



(b) Case B

図—9 10部材トラスの増分解析結果

からみて応力再配分により Case A 3 では断面配分がより均等化されているためと思われる。

c) 最小断面積制約による影響

表—3 (a), (b) の右欄の体積  $V$  を比較すると、当然ながら表—3 (b) の方が大きくなっている。これは最小断面積制約がアクティブになっている部材が数多く存在するためである。

図—9 (b) から明らかなように、最小断面積制約の影響が大きくなると、許容塑性率を変化させても Case B 2 と Case B 3 の差は小さく、許容塑性率がダクティリティに与える影響はあまりないことがわかる。

表—3 (b) および図—9 (b) に示すように、この例では降伏部材として先に部材⑩が、次いで部材②が選ばれている。このように最小断面積制約が異なれば、降伏部材やその選択順序も変化するが、本設計法ではこれらのす

べての設計条件に対しても追従できる。

5. 結 語

本研究で示した手法により静的荷重における最適弾塑性設計が可能となった。本研究で得られた成果を要約すると以下ようになる。

(1) 双対変数を用いた感度解析により降伏部材を選択する手法を考案し、部材塑性率制約を考慮した最適弾塑性設計の一手法を確立できた。

(2) 本設計手法で得られた設計結果とそれに対する弾塑性増分解析の結果は降伏部材の選択順序に至るまで一致し、本研究で提案した手法が妥当であることが認められた。

(3) 最適弾塑性設計によって得られる設計は、最適弾塑性境界設計と最適塑性設計の中間領域に存在し、許容塑性率に応じて連続した解が得られる。

(4) 許容塑性率  $\mu_a = 1.0$  の設計（弾塑性境界設計）の結果は終局荷重および降伏応力を（1/材料安全率）倍して得られた従来の最適弾塑性設計の結果と一致する。

(5) 許容塑性率を極端に大きく与えると最適弾塑性設計の結果は最適塑性設計に一致する。

(6) 許容塑性率を大きくすると、得られる設計の構造体積は減少する。しかし、不静定次数が多くなると応力再配分の影響により、その減少の割合は小さくなる。

(7) 一般に許容塑性率を大きくするとダクティリティに富んだ設計が得られる。しかし、最小断面積制約を厳しくするとその傾向は小さくなる。

なお、本研究では弾塑性設計法の開発に力点を置いたので、使用荷重時の応力や変形制約を無視した。また座屈の影響については、図—1 の  $\sigma_w$  および図—4 の  $\sigma_v$  の値に示すように圧縮部材の降伏応力を引張部材の値より小さくすること、あるいは表—3 の Case B に示すように最小断面積制約を付加することで考慮したが、さらに細長比を用いた表現による座屈の影響についても現在検討中である。

本計算には防衛大学校電子計算機 HITAC-200 H を使用し、図面の作成には永森女史のご助力を得たことを付記し、謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 建築基準法施行令, 第 82 条の 4, 昭和 55 年改正令第 196 号.
- 2) Maier, G.: Future Directions in Engineering Plasticity, Engineering Plasticity by Mathematical Programming, edited by Cohn, M. Z., Pergamon Press, pp. 631 ~ 648, 1979.
- 3) 山田善一・家村浩和・古川浩平・坂本幸三: 塑性率制約に基づく最適弾塑性耐震設計法に関する研究, 土木学会



- 論文報告集, 第 341 号, pp.87~96, 1984-1.
- 4) Mori, M., Ishikawa, N. and Nishino, F. : Optimum Elastic-Plastic Design of Steel Pipe Piers under Earthquake Motion, Theoretical and Applied, Mechanics, Vol. 30, Univ. of Tokyo, pp. 251~261, 1981.
  - 5) De Donato, O. : Fundamentals of Elastic-Plastic Analysis, Engineering Plasticity by Mathematical Programming, edited by Cohn, M.Z., Maier, G., Pergamon Press, pp. 325~350, 1979.
  - 6) Kirsch, U. (山田善一・大久保禎二 監訳) : 最適構造設計, 丸善, p. 16, 昭和 58 年 10 月.
  - 7) 古林 隆 : 線形計画法入門, 産業図書, pp. 98~104, 昭和 55 年 10 月.
  - 8) 小野勝章 : 計算を中心とした線形計画法, 文祥堂, pp. 11~14, 1976.

(1984. 3. 26・受付)

---