【土木学会論文集 第350号／I-2 1984年10月】

ベイズの定理の適用について

ON APPLICATIONS OF BAYES' THEOREM

長 尚*
By Takashi CHOU

In the process of engineering planning and design, the Bayes' theorem has been used as a useful approach which provides the framework or procedure for incorporating engineering judgement with observation data and systematic updating of information. Based on discussions about some examples of the posterior probability problem in some literatures and the Bayesian estimator in the sampling theory, the following conclusions are drawn:

(1) It is necessary to understand clearly the premise of the Bayes' theorem.

(2) The application of the Bayes' theorem for the objective probability problems yields no appreciable effects.

(3) The Bayesian estimator in the sampling theory plays a meaningful role only for the limited cases.

1. まえがき

(1) ベイズの定理とその適用にあたっての前提条件

ベイズの定理は，

【排反かつすべての場合をつくす事象 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots, A_n$ からなる確率空間 Ω において，これらの事象とは違う，ある事象 B が生起したということが条件となった，あくまで条件付確率 $P(A_i|B)$ の定義そのもの】

である（Fig. 1 参照）.

このベイズの定理には，行動の決定あるいは推論のプロセスに適用しようとする，いわゆる Bayesian の立場

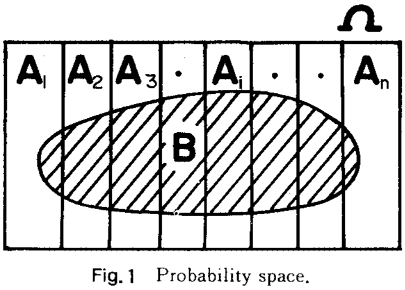

Fig. 1 Probability space.

* 正会員 工博 信州大学教授 工学部土木工学科
（〒380 長野市若里500）

がある．そしてこの場合の確率は，命題（仮説）の確率すなわち確信の度合（degrees of belief, 主観確率）で，基本的に通常の頻度確率（客観確率）とは異なるものである[1),2)].

普通条件付確率 $P(A_i|B)$ の意味は，“条件 B のもとでの A_i の生起する確率，すなわち B なる事象の中で A_i の事象に属している確率”である．ここで B なる事象である現象が観測されたとすると条件付確率 $P(A_i|B)$ の意味は，“B なる事象であるその現象（サンプリング）が A_i の事象に属している確率”である．さらに A_i が排反な命題（仮説）だとすると，命題は結局一つに絞られるべきであるから，n 個の排反事象の中，常にどれか一つの事象に属して B なる事象は生起しているという前提があることになる．この場合には，B なる事象である現象が観測されたとすると条件付確率 $P(A_i|B)$ の意味は，“命題が A_i である可能性についての，事後の確信の度合”ということになる．

したがってある事象の生起したことが条件となって，ある排反事象の事前確率を事後確率に修正できるためには，次のような前提を必要とする．すなわち，“いずれの排反事象（命題，仮説）かはわからないが，常にその中の一つの事象に属して，ある事象は生起している”というのがそれである．つまりどの排反事象（命題，仮説）

に絞れるかその可能性の度合について，ある事象の生起したことによって修正した結果が事後確率である．したがって，ある事象の生起に関するデータが多くなると，しだいに特定の事象（命題，仮説）の確率（確信の度合）が1に近づくという性質をもっている．なお当然であるが，複数個の排反事象に属して，ある事象が生起する（同時にではない）可能性のある場合には，ある事象が生起してもそれはある排反事象の事前確率を事後確率に修正する条件とはなり得ない．その場合の確率の意味は単に“その一つの生起した事象がある排反事象に属する確率”ということになる．

（2） ベイズの定理の適用によるメリット

工学問題にベイズの定理を適用する最大のメリットは一般に次のようにいわれている[3)~5)]．

“主観的判断または不確実な情報に基づいて推定した事前確率を，観測もしくは実験等によって得られた情報を利用して，より確かな事後確率に更新するのに役立つ．さらに，観測もしくは実験等によって得られる情報が限られているような状況（工学問題ではしばしば遭遇する）では，主観的判断を加味して，情報不足を補うことができる．”

いずれにしても，不確かな事前確率が，比較的限られた情報を用いることによって，より確かな事後確率に更新され，その度合がある程度顕著であることが，ベイズの定理の適用には期待されているといえる．

（3） 本文の目的

土木工学の分野においても，“実験もしくは観測データが限られている状況のもとで，それまでの判断をかなり改善できる”として，ベイズの定理がしばしば用いられている．

本文では，いくつかの具体的な適用例とサンプリング理論におけるパラメーターの推定の問題を通して，（1）で指摘した適用にあたっての前提が備わった妥当な適用例かどうか，また（2）で述べたようなメリットが，頻度確率とか確率分布のパラメーターの推定にどの程度期待できるかについて考察する．

2. 具体的な適用例について

（1） 杭の支持力の問題への適用例1

亀田弘行・池淵周一・春名　攻著［確率・統計解析］[4)]の例題2．5に次のような杭の支持力の問題への適用例がある．なお以下『　』は文献の一部の再録もしくは要約であることを示す．

『ある建設工事で設置される多数の杭基礎が，それぞれ150 t（1 t=9.8 N，以下略）以上の支持力を有するかどうか推定したい．標準貫入試験や土質試験と過去のデータから，杭基礎の支持力が150 t以上である確率は80％と推定された．この点に関する情報をより確かにするため，試験杭を用いて載荷試験を行った．試験法およびデータ処理法に含まれる不確定要因から，実際の支持力が150 tに満たないのに試験結果から150 t以上と判定する確率が10％，逆に実際の支持力が150 t以上であるのに試験結果から150 tに満たないと判定する確率が15％あるものとする．

a） 載荷試験を1回行うことにより，支持力が150 t以上である確率はどのように更新されるか．

事象 $A, T1$ を次のように定義する．

A＝実際の支持力が150 t以上である．

$T1$＝1回の載荷試験で支持力が150 t以上と判定される．

載荷試験の結果（$T1$ または $\overline{T}1$）によって，求める確率は次の2通りになる．

$$\begin{aligned}P(A|T1)&=P(T1|A)P(A)/(P(T1|A)P(A)\\&\quad+P(T1|\overline{A})P(\overline{A}))\\&=(1-0.15)\times0.8/((1-0.15)\times0.8\\&\quad+0.1\times(1-0.8))=0.971\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}P(A|\overline{T}1)&=P(\overline{T}1|A)P(A)/(P(\overline{T}1|A)P(A)\\&\quad+P(\overline{T}1|\overline{A})P(\overline{A}))\\&=0.15\times0.8/(0.15\times0.8+(1-0.1)\\&\quad\times(1-0.8))=0.400\end{aligned}\tag{2}$$

すなわち，載荷試験が成功することにより，支持力が150 t以上である確率は80％から97％に増加する．一方載荷試験が失敗すると，この確率は40％に低下する．

b） 第1回の載荷試験が成功したとして，この結果をさらに補強するために，別の試験杭を打設して第2回の載荷試験を行った．2回の載荷試験の結果を総合して，支持力が150 t以上である確率を求めよ．

$T2$＝第2回の載荷試験で支持力が150 t以上と判定される，と定義すると

$$\begin{aligned}P(A|T2\,T1)&=P(T2|A\,T1)P(A|T1)/(P(T2|A\,T1)\\&\quad P(A|T1)+P(T2|\overline{A}T1)P(\overline{A}|T1))\\&=(1-0.15)\times0.97/((1-0.15)\\&\quad\times0.97+0.1\times(1-0.97))\\&=0.996\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}P(A|\overline{T}2\,T1)&=P(\overline{T}2|A\,T1)P(A|T1)/(P(\overline{T}2|A\,T1)\\&\quad P(A|T1)+P(\overline{T}2|\overline{A}\,T1)P(\overline{A}|T1))\\&=0.15\times0.97/(0.15\times0.971\\&\quad+(1-0.1)\times0.97)\\&=0.851\end{aligned}\tag{4}$$

このように，実験データを補うことにより，事前確率（0.8）を順次更新することができる．』

さてここで考えられている“多数の杭基礎の支持力がそれぞれ150 t以上である確率”は，この工事で設置される多数の杭基礎の中に支持力が150 t以上であるもの

が存在する率（客観確率），したがって任意のある杭基礎の支持力が150 t以上である確率という意味にはならない．もしこの例題がこのような意味で確率が定義されているのであれば次のような理由により間違っている．前述したようにベイズの定理を適用してこのような事後確率を求めるにあたっては，A（実際の支持力が150 t以上である），$\overline{A}$（実際の支持力が150 t以上でない）の排反事象(命題,仮説)のいずれか一つの事象に属して“ある事象が生起した”（この場合は1回の載荷試験で150 t以上と判定された）ことになっていなければならない．つまりA,$\overline{A}$のいずれの事象にも属し得る状況下で判定されたことになっていてはならず，したがって支持力が150 t以上のものと以下のものとが混在していてはならないのである．このことを具体的にいうとこの工事現場では個々の杭基礎の支持力にばらつきがない，すなわち個々の杭基礎の支持力に影響を与える要因がその現場では均一であるということになる．したがって事象Aの定義も正確には“実際の杭基礎の支持力が150 t以上である現場”とすべきであろう．しかしながらこのような場合にはベイズの定理を適用するまでもなく試験結果のもつウエイトは大きく確信の度合は1に近くなるはずであり“少ないデータから多くの判断情報を得る”というベイズの定理を適用する本来のメリットはないことになる．

ところで，“個々の杭基礎の支持力に影響を与える要因がその現場では均一で，支持力にばらつきがない”という条件は一般には満たされない．このような場合，つまり載荷試験がAと$\overline{A}$の両方の事象に属し（同時にではない）得る状況下で行われるような場合に，このようなベイズの定理を適用したとすると，“載荷試験では150 t以上と判定されたが，その試験のもつ不確定要因のため，その試験杭基礎自身も実際に150 t以上である確率は100%ではなく97.1%である”ということになる．なおこの適用例がこのようなものでないことは，第2回の載荷試験が同じ試験杭ではなく別な試験杭に対して行われていることから明らかである．もし当該の試験杭基礎以外の杭基礎にも適用できるとすれば，載荷試験そのものの信頼度が高く（原位置試験では一般的にそうである），間違って大きく判定される確率がほとんどないような場合には，1回の載荷試験で支持力が150 t以上と判定されると他の杭基礎も必ず支持力が150 t以上あるということになってしまって不合理である．

以上のことは次のような例を考えると容易に理解される．前記の杭基礎の支持力の問題で，事前に100個の試験杭に対して100回の載荷試験を行いそのうち80回150 t以上の支持力があったとすると，事前確率は0.8と判断される．ここで改めて別な試験杭に対して1回載荷試験を行って150 t以上の支持力が得られたとする．この場合の確率は，81/101＝0.802≒0.8と考えるべきであろう．つまり事前確率の0.8が事後確率0.971になるような状況は生まれてこない．この例については後でまた触れる．

（2） 機械の故障率の問題への適用例

ベイズの定理の適用により有効な結果が出てくる例としては，この定理の適用例としてしばしば紹介されている次のようなものがある．

『在来のデータを分析した結果，機械の調整が正しく行われている場合の製品の良品率は90％であり，調整が正しく行われていない場合，その良品率は30％に減ることがわかった．また毎朝の始動時における機械の良調整率は75％であることがわかっている．ある朝の第1製品が良品であった場合，機械が正しく調整されている確率は次のようになる．

P(調整が良い|1個の良品を得た)

＝(P(1個の良品を得る|調整が良い) P(調整が良い))/(P(1個の良品を得る|調整が良い)P(調整が良い)＋P(1個の良品を得る|調整が悪い)P(調整が悪い))

＝(0.90×0.75)/(0.90×0.75＋0.30×0.25)

＝0.9……………………………………………………（5）』

この例と前記の個々の杭基礎の支持力にばらつきがある杭基礎の支持力の問題との違いは次のようである．この例では“調整が良い”か“調整が悪い”かいずれかの状況下で良品かどうかの判定が行われている．一方杭基礎の問題においては“個々の杭基礎の支持力が実際に150 t以上である”ことも“個々の杭基礎の支持力が実際に150 t未満である”こともともにあり得る状況下で，判定が行われている．したがって1．（1）で指摘した，ベイズの定理を適用するための前提条件が整っていない．

両者に明らかな違いがあるのは次のことからもわかるであろう．前者において調整が悪いときの良品率が0という場合には，良調整でなければ良品は出ないわけであるから，一つでも良品があれば必ず良調整であると断言できる．一方後者の場合すなわち個々の杭基礎の実際の支持力の中に150 t未満のものがあるときに，実際の支持力が150 t未満の場合には150 t以上と判定される確率が0（試験の精度が良くて）であっても，1回の載荷試験で，150 t以上と判定されて，当該の試験杭基礎以外の杭基礎も必ず150 t以上だと断言できるような状況は生まれてこない．つまりたとえ当該の試験杭基礎に対する精度がいかに良くても当該の試験杭基礎以外の杭基礎に対して150 t以上であるというような保証をすることはできない．

（３） 杭の支持力の問題への適用例２

Ang, A. H-S. and Tang, W. H. 著〔Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Volume Ⅰ〕[6] EXAMPLE 8．1に，次のような杭の支持力の問題への適用例がある．

『建築基礎の杭を，最初１本当たり 250 t の支持力で設計したが，その段階ではきわめてまれに起こる強風の影響を考慮していなかった．そのようなまれなケースでは，いく本かの杭に作用する荷重が 300 t に達することもあり得ると推定される．最初の設計の安全性を評価するため，担当技師は 300 t の最大荷重で杭が破壊する確率を決定したい．

同型の杭と地盤条件についての経験から，技師はこの確率 p は 0.2 と 1.0 の範囲にあり，最も可能性の高い値は 0.4 と推定（判断で）した．よりはっきりと，p は Fig. 2 のような事前離散確率で示されている．ただし便宜上 p の値は 0.2 間隔に離散化してある．この事前離散確率によると，杭が 300 t で破壊する確率は（全確率の定理により）次のように推定される．

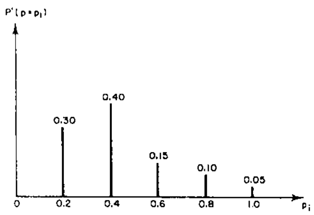

Fig. 2 Prior probability mass function of p.

$$\hat{p}'=(0.2)(0.3)+(0.4)(0.4)+(0.6)(0.15)+(0.8)(0.10)+(1.0)(0.05)=0.44 \cdots\cdots (6)$$

この判断を補強するため技師は同型の杭１本に対して現場で最大荷重 300 t の載荷試験をするよう命じた．試験結果によると，この杭は 300 t の最大荷重を支持できなかった．この１回の試験結果を用いると，p の事前離散確率は離散型のベイズの定理の式によって修正され，次のような事後離散確率が得られる．

$$\underset{(p=2)}{p''}=\frac{(0.2)(0.3)}{(0.2)(0.3)+(0.4)(0.4)+(0.6)(0.15)+(0.8)} *$$

$$* \overline{(0.10)+(1.0)(0.05)}$$

$$=0.136 \cdots\cdots (7)$$

同様にして，

$$p''(p=0.4)=0.364,\quad p''(p=0.6)=0.204 \cdots\cdots (8)$$

$$p''(p=0.8)=0.182,\quad p''(p=1.0)=0.114 \cdots\cdots (9)$$

この結果を図示したのが Fig. 3 である．

したがって，p のベイズ推定値は，

$$\hat{p}''=E(p\,|\,\varepsilon)$$

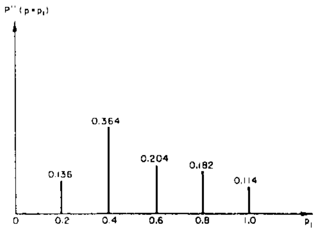

Fig. 3 Posterior PMF of p.

$$=0.2(0.136)+0.4(0.364)+0.6(0.204)+0.8(0.182)+1.0(0.114)=0.55 \cdots\cdots (10)$$

Fig. 3 からわかるように，１回の載荷試験が不成功であったことにより，p の値が大きい方の離散確率が事前分布より増加しており，その結果 p の推定値も増加している．すなわち，事前推定値が 0.44 であったのに対し，事後推定値は $\hat{p}''=E(p\,|\,\varepsilon)=0.55$ となった．さて，１本の試験杭が破壊しても，他の同様の杭も 300 t の荷重を支持し得ないことを意味するわけでなく，試験結果は確率の推定値を 0.11（0.44 から 0.55）だけ増加させたに過ぎないということに注意してほしい．Fig. 4 は，試験杭が次々連続して破壊した場合に離散確率がどのように変化するかを示したものである．$n\to\infty$ では，分布は $p=1.0$ の方へ移動する．

Fig. 5 には，これに対応する p のベイズ推定値を示した．６回連続して杭が破壊すると，p の推定値は 0.9 になる．多数の試験杭が連続して破壊すると p は 1.0 に接近し，結果は古典的推定値に向かう．この古典的推定

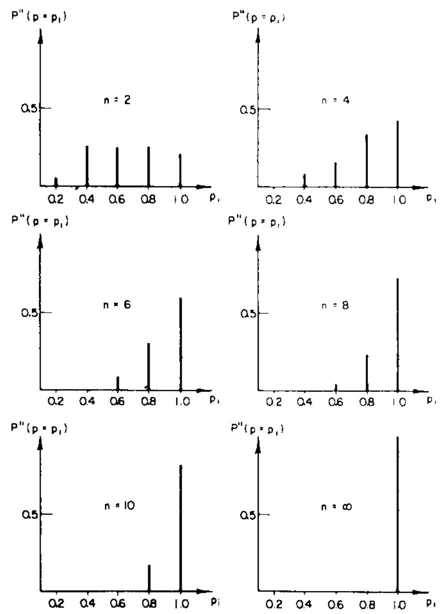

Fig. 4 PMF of p for increasing number of failures.

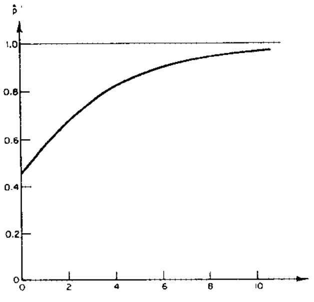

Fig. 5　$\hat{p}''$ vs. No. of consecutive failures.

法においては，ある事前の判断を変えるためにはものすごくたくさんの観測データが必要である．しかしながら，通常は観測データは限られているから，判断も重要であり，ベイズの推定過程ではこうした判断を適切に反映できるのである．』

以上のように，この例においては，破壊確率 p がある値をもつことが“排反かつすべての場合をつくす（$\sum p=1$）事象”になっており，しかもそのうちの一つだけの事象に属して（破壊確率 p は本来特定な値をもつから）ある事象（試験による判定）が生起している．したがって 1．(1)で指摘した，ベイズの定理を適用するにあたっての前提は満足されている．なおこの例（次の例もだが）においては，破壊確率の値が仮説で，それがどの値をとるかについての，推定の自信の程度が確信の度合であり，破壊確率の推定値 p は通常の頻度確率である．すなわち，確信の度合の改善にベイズの定理が適用され，それを利用して頻度確率の推定の改善がなされており，頻度確率に直接ベイズの定理は適用されてはいない．この点が(1)の適用において，支持力にばらつきがあるとした場合と基本的に異なるところである．

ベイズの定理に批判的な意見の主なものの一つに，事前確率が片寄った見解によった判断であった場合，事後確率がそれに左右されて，必ずしも適切な結果が得られないというのがある[7]．この例でも，連続して 6 回杭が破壊してもまだ破壊確率は 0.9 であるというような結果をそのままうのみにするのではなく，もしかすると事前確率の判断に片寄りがあったのではないかと反省してみる必要があろう．いずれにしても仮説の確信の度合について適用された場合には，このような限界があることを常に意識しておかなければならない．したがって，原著にあるような「古典的推定法においては，ある事前の判断を変えるためにはものすごくたくさんの観測データが必要である．しかしながら，通常は観測データは限られているから，判断も重要であり，ベイズの推定過程ではこうした判断を適切に反映できるのである」という，ベイズの定理の適用についての手放しの評価には疑問がある．

(4)　杭の支持力の問題への適用例 3

次に前著 EXAMPLE 8.3 は次のようである．

『再び，300 t の荷重により杭が破壊する確率に関する，EXAMPLE 8．1 の問題を取り上げる．ただし今度は確率 p は連続確率変数と考える．p に関して事実に基づく（事前の）情報が全くない場合には，一様な事前分布を仮定するのがよかろう（これは散漫事前「diffuse prior」という言葉で知られている）．すなわち，

$$f'(p)=1.0 \qquad 0\leqq p\leqq 1 \cdots\cdots(11)$$

1 回の試験が行われた段階では，尤度関数は事象 ε（試験杭の支持力が 300 t より小さい）の確率であるから，p で与えられる．したがって，p の事後分布は，連続型のベイズの定理の式により，

$$f''(p)=kp(1.0) \qquad 0\leqq p\leqq 1 \cdots\cdots(12)$$

ただし，

$$k=\left[\int_0^1 p\,dp\right]^{-1}=2 \cdots\cdots(13)$$

すなわち，

$$f''(p)=2\,p \qquad 0\leqq p\leqq 1 \cdots\cdots(14)$$

これより，p のベイズ推定値は，

$$\hat{p}''=E(p\,|\,\varepsilon)=\int_0^1 p\cdot 2\,p\,dp=0.667 \cdots\cdots(15)$$

n 本の杭を試験して，そのうち r 本が最大試験荷重以下の荷重で破壊したとすると，尤度関数は n 本の試験杭のうち r 本が破壊する確率で与えられる．各杭の破壊確率は p で独立であるとすると，尤度関数は次式のようになる．

$$L(p)=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r} \cdots\cdots(16)$$

これより，散漫事前分布を用いる場合には，p の事後分布は，

$$f''(p)=k\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r} \qquad 0\leqq p\leqq 1 \cdots\cdots(17)$$

ここに，

$$k=\left[\int_0^1\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}\,dp\right]^{-1} \cdots\cdots(18)$$

したがって，p のベイズ推定値は，

$$\hat{p}''=E(p\,|\,\varepsilon)=\frac{\int_0^1 p\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}\,dp}{\int_0^1\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}\,dp}$$

$$=\frac{\int_0^1 p^{r+1}(1-p)^{n-r}\,dp}{\int_0^1 p^r(1-p)^{n-r}\,dp} \cdots\cdots(19)$$

上式について逐次部分積分を行うと，

$$\hat{p}''=\frac{r+1}{n}\,\frac{\int_0^1(p^n-p^{n-r})dp}{\int_0^1(p^{n-1}-p^n)dp}=\frac{r+1}{n+2} \cdots\cdots(20)$$

この結果から，試験回数 n が増加すると（ただし比 r/n は一定という条件で），p のベイズ推定値は古典的方法による推定値に近づく．すなわち，

$\frac{r+1}{n+2} \rightarrow \frac{r}{n}$（大きい n に対して）』

この例は離散型の前例を連続型に拡張し，さらに各杭の破壊確率は 0 ～1.0 のどの辺の値になるかを判断する事前情報が全くない（diffuse prior）として何回かの実験により，その確率を客観化しようとしたものである．この例からわかるように，散漫事前確率は 0.5 であったが 1 回の試験で 300 t 以下と判定されれば，事後確率は，0.667 に変化し，1 回の試験結果の重みが非常に大きい．しかし実験回数が増すにつれ 1 回当たりの重みは減ってくる．

なお前述の(1)の説明例として示した，100 回の載荷試験の結果から事前確率を決め，101 回目の載荷試験で事後確率を求める問題は，この例で $n=100$，$r=20$ および $n=101$, $r=20$ としたことに相当し，p の推定値は，やはりほとんど変化しない．

ここで，何らかの判断で，各杭の破壊確率の下限 a が推定可能だが，a～1.0 のどの辺の値になるか不明とすると，p のベイズ推定値は上記を参照して次のようになる．

$$\hat{p}''=E(p\,|\,\varepsilon)=\frac{\int_a^1 p^{r+1}(1-p)^{n-r}\,dp}{\int_a^1 p^{r}(1-p)^{n-r}\,dp} \quad \cdots\cdots(21)$$

ここで，$n=r=1$ とすると，

$$\hat{p}''=E(p\,|\,\varepsilon)=\frac{2}{3}\left\{\frac{1-a^3}{1-a^2}\right\} \quad \cdots\cdots(22)$$

となる．各種の a に対する事前確率 $\hat{p}'$ および $\hat{p}''$ を **Table** 1 に示す．これより a の値が大きくなるに従って 1 回目の試験結果の重みが減ることがわかる．

さてベイズの定理の適用による最大のメリットは，比較的少ない情報（実験結果）しか一般に得られない状況下で，それまでの判断をかなり改善できるという点にあるはずである．この例においても前述したように 1 回の試験結果で散漫事前確率 0.5 は 0.667 に大きく変化している．しかしながら実験回数が増すにつれ，また，破壊確率の推定範囲が狭まるにつれ，破壊確率の改善の度合は減少する．このことは事前の判断が非常に曖昧なとき（頻度確率の小数点以下 1 けた目が怪しいようなとき）にベイズの定理を適用すると有効である（ただし精度は一般に良くない）が，通常われわれが遭遇する頻度確率の問題の場合には，小数点以下数けた目のような，比較的きめの細かい，精度の良い結果を必要とするので，効果的なベイズの定理の適用は望めないということを意味している．したがって判断の選択肢がいくつかありその決定に苦しむようなときに適用すれば効果があるが，通常の土木工学上の頻度確率の問題にはベイズの定理の適用の効果，すなわち“少ない情報から実りの多い結果を引き出すこと”はあまり期待できない．このことは“仮説の確信の度合”に関するベイズの定理は本来，“行動の決定あるいは推論のプロセスに適用されるものである”ことからの当然の帰結である．つまり確信の度合は主観確率であり，主観的判断，すなわち大まかな判断の修正という局面においてしか有効ではないのである．

Table 1 Prior and posterior probability for a.

a	0.0	0.25	0.5	0.6	0.75
$\hat{p}'$	0.5	0.625	0.75	0.8	0.875
$\hat{p}''$	0.667	0.7	0.778	0.817	0.881

(5) つぼの問題への適用例

松原　望著［意志決定の基礎］[8]に次のような，つぼのモデルへの適用例がある（一部要約してある）．

『3 個のつぼ U_1，U_2，U_3 があり，その中に赤の玉，白の玉がそれぞれ 3：1,1：1,1：2 の割合で入っている．ある一つの指定されたつぼの中から玉が順次取り出され，その都度玉の色が告げられ，玉はそのつぼに返されるものとする．指定されたつぼは知らされていなくて，確信の度合は最初いずれも 1/3 であっても，しだいにそれがどのつぼかが，ベイズの定理を適用するとはっきりしてくる．』

この例では，常にある特定の一つのつぼが指定された状況下で，玉が取り出されているから，1．(1)で指摘した，ベイズの定理を適用するにあたっての前提は満たされている．この例において，指定されるつぼが一定でなく，ただ特定のつぼに指定される率が一定であるとしたときが，ちょうど(1)で説明した，支持力にばらつきがある場合の杭の問題に相当する．この場合にも，取り出された玉の色から，ベイズの定理により，特定のつぼの指定される率を推定できないことは明らかであろう．

さてこの例について，U_2 のつぼが指定された場合のシミュレーション結果を 3 種類 **Fig.** 6 ～ 8 に示す．これらの図は，指定されたつぼが U_2 であるという確信の度合が 90 % に達するには 40 ～ 120 回のトライが必要であることを示している．このような結果となったのは，U_2 のつぼの中に，赤の玉，白の玉が 1：1 の割合で入っており，他のつぼに比し特徴が少ないためである．このことは，“少ない情報から実りの多い結果を引き出すこと”をあまり期待できないことが，頻度確率に限らず主観確率にもあり得ることを示唆している．

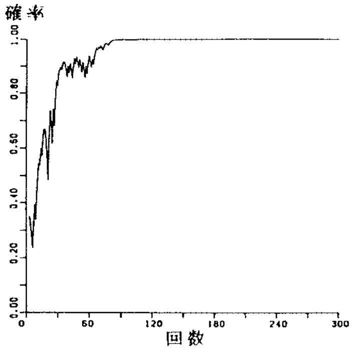

Fig. 6 Simulation example No. 1.

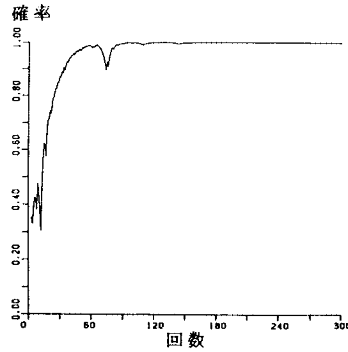

Fig. 7 Simulation example No. 2.

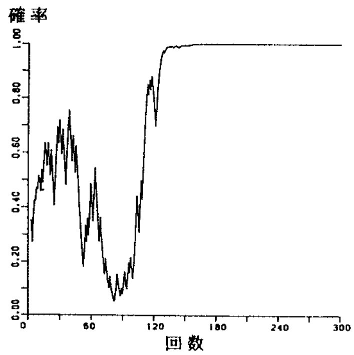

Fig. 8 Simulation example No. 3.

3. 確率分布のパラメーター推定への適用について

確率密度関数 $f_x(x)$ をもった母集団 X からのランダムサンプリングによって，観測値，x_1，x_2，…，x_n が得られたとき，その分布のあるパラメーター θ の事前確率密度関数 $f'(\theta)$ の事後確率密度関数は，ベイズの定理を適用すると次のようになる[6]．

$$f''(\theta)=\frac{\left[\prod_{i=1}^{n} f_x(x_i|\theta)dx\right]f'(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^{n} f_x(x_i|\theta)dx\right]f'(\theta)d\theta}=kL(\theta)f'(\theta) \quad \cdots\cdots(23)$$

ここに，

$$k=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} f_x(x_i|\theta)\right)f'(\theta)d\theta\right]^{-1} \quad \cdots\cdots(24)$$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f_x(x_i|\theta) \quad \cdots\cdots(25)$$

である．

ここでは Fig. 9 に示すように，θ の値がある値となることが“排反かつすべての場合をつくす事象”になっている．しかも θ の値はある一定の値であるはずであるから（観測値はばらつくから θ は確率変数として扱うけれども，真の値は一定値でそれは神様だけが知っている），常にある一つの事象に属して，ある事象（観測値）が生起しているという前提が成立している．また n 個の観測値が得られたということは，Fig. 10 にみられるように，$f(x_i|\theta)dx$ の確率の事象が n 回生起したのであるから，式(23)中の[ ]内で表わされる確率の事象が生起したことになる．

ここで，“不確実な情報に基づいて推定した事前確率を，観測もしくは実験等によって得られた情報を利用し

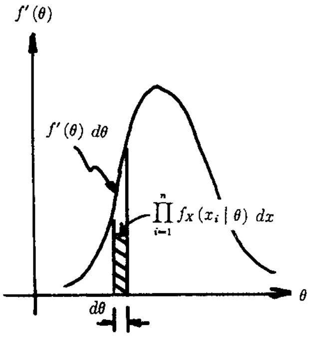

Fig. 9 Probability density function of θ.

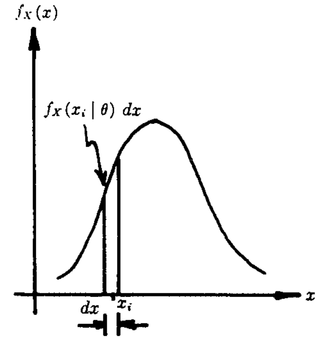

Fig. 10 Probability density function of x.

て，より確かな事後確率に更新するのに役立つ”というベイズの定理の適用のメリットが，このパラメーターの推定への適用にどの程度あるかをみるために，次のような問題を考えてみよう．

［事前に観測値が n_1 個あり，その平均値を $\bar{x}_1$，標準偏差を σ_1 とする．ここで新たに n_2 個の観測値が得られ，その平均値が $\bar{x}_2$，標準偏差が σ_2 とする．これらのデータから平均値 μ を推定する．］（これは文献[6]の EXAMPLE 8．9において事前情報を具体的な観測値にした場合に相当する．）

一般に平均値 μ の事前分布が $N(\mu', \sigma')$ の正規分布で，新たに n 個のデータから平均値 $\bar{x}$，標準偏差 σ が得られたとき，平均値のベイズ推定値 μ_B は次のように表わされる[6]．

$$\mu_B=\frac{\bar{x}\sigma'^2+\mu'(\sigma^2/n)}{\sigma'^2+\sigma^2/n} \quad \cdots\cdots(26)$$

上記の問題では，式(26)中の μ'，σ'，$\bar{x}$，σ は次のようになる．

$$\mu'=\bar{x}_1,\quad \sigma'=\frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} \quad \cdots\cdots(27)$$

$$\bar{x}=\bar{x}_2,\quad \sigma=\frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}} \quad \cdots\cdots(28)$$

これらの式(27)，(28)を式(26)に代入すると，μ_B は次のようになる．

$$\mu_B=\frac{n_2\sigma_1^2\bar{x}_2+n_1\sigma_2^2\bar{x}_1}{n_2\sigma_1^2+n_1\sigma_2^2} \quad \cdots\cdots(29)$$

次に古典的推定法では平均値 μ_C は次のようになる．

$$\mu_C=\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2} \quad \cdots\cdots(30)$$

平均値の古典的推定値 μ_C と，ベイズ推定値 μ_B の違いをみるために，μ_C に対する μ_B の比 η を求めると次のようになる．

$$\eta=\frac{(1+\alpha)(\gamma^2+\alpha\beta)}{(\alpha+\gamma^2)(1+\alpha\beta)} \quad \cdots\cdots(31)$$

ここに，

$$\alpha=\frac{n_2}{n_1},\quad \beta=\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1},\quad \gamma=\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad \cdots\cdots(32)$$

である．種々な α，β，γ の組合せに対する η の値を示したのが Table 2 である．式(31)および Table 2 から次のことがいえる．

（1）　α が非常に小さいか，逆に非常に大きいと $\eta \fallingdotseq 1$ となる．つまり一方のデータが他方に比べて非常に多いと，その多い方のデータによって平均値は決まり，古典的推定値とベイズ推定値の差はなくなる．

（2）　β が1に近く両方のデータから求まる平均値に差がないと，古典的推定値とベイズ推定値の差はなくなる．

（3）　γ が1に近く両方のデータから求まる標準偏差に差がないと，古典的推定値とベイズ推定値の差はなくなる．

（4）　β，γ の値がかなり1から離れないと（少なくとも2/3以下，3/2以上でないと）古典的推定値とベイズ推定値の間に大きな差（8％以上の差）は生まれない．

以上のことから，サンプリング理論におけるパラメーターの推定へのベイズの定理の適用は，事前情報が不確実で新しい情報との間にかなり差があり，事前にデータがある場合には両者の情報量にあまり差がない場合にの

Table 2　Ratio of Bayesian estimates to classical estimates, η.

γ	β \ α	0.0	0.01	0.1	0.5	1.0	2.0	10.0	100.	∞
1／2	1／2	1.00	0.99	0.90	0.80	0.80	0.83	0.94	0.99	1.00
	2／3	1.00	0.99	0.93	0.88	0.88	0.90	0.97	1.00	1.00
	1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	3／2	1.00	1.01	1.09	1.14	1.12	1.08	1.02	1.00	1.00
	2	1.00	1.03	1.18	1.25	1.20	1.13	1.03	1.00	1.00
2／3	1／2	1.00	0.99	0.95	0.88	0.87	0.87	0.96	0.99	1.00
	2／3	1.00	1.00	0.97	0.93	0.92	0.94	0.98	1.00	1.00
	1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	3／2	1.00	1.01	1.04	1.08	1.08	1.06	1.02	1.00	1.00
	2	1.00	1.01	1.09	1.15	1.13	1.09	1.03	1.00	1.00
1	1／2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	2／3	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	3／2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
3／2	1／2	1.00	1.00	1.03	1.09	1.13	1.15	1.09	1.01	1.00
	2／3	1.00	1.00	1.02	1.06	1.08	1.08	1.04	1.01	1.00
	1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	3／2	1.00	1.00	0.98	0.94	0.92	0.93	0.97	1.00	1.00
	2	1.00	0.99	0.96	0.89	0.87	0.88	0.95	0.99	1.00
2	1／2	1.00	1.00	1.03	1.13	1.20	1.25	1.18	1.03	1.00
	2／3	1.00	1.00	1.02	1.08	1.12	1.14	1.09	1.01	1.00
	1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	3／2	1.00	1.00	0.97	0.90	0.88	0.88	0.93	0.99	1.00
	2	1.00	0.99	0.94	0.83	0.80	0.80	0.90	0.99	1.00

みそのメリットが発揮されるといえる．ただしこれはベイズの定理の適用によって，事前の推定が改良されるという前提を認めたうえでの話である．しかし前述のつぼの問題のシミュレーション例でもわかるように，必ずしも事後の方が改良されるとは限らない．したがってこのような点からも，確率分布のパラメーターの推定へのベイズの定理の適用を手放しで評価するわけにはいかない．

さらにこの点に加えて，たとえ事後の推定値の方が改良されているとしても，限られたデータによるのであるからその真値に対する精度は，2.（3）~（5）の例にみられるように，一般にきわめて悪い．したがって一部の文献[9),10)]にあるような，こうした推定値を用いて破壊確率とか安全性指標を求めて議論する場合には，通常の多くのデータを用いて推定されていることが前提となっている古典的推定によった場合の破壊確率とか安全性指標とは根本的に区別して用いられなければならない．つまりベイズ推定によってある結果が得られたときには，必ずしも事後の方が良いとは限らないこと，また精度は一般に良くない（特に破壊確率のようなものは確率分布のパラメーターに敏感に影響を受けるから，その真値から相当かけ離れたものになっている可能性がある）ことを認識したうえで，その結果はある種の判断もしくは行動の決定のための一資料として用いられるべきものである．ここでも2.（4）で指摘したように，ベイズの定理は，大まかな判断の修正という局面においてしか有効ではないのである．

4. 結　　論

以下本文の結論を述べる．

（1） ベイズの定理を適用するにあたっては，“いずれの排反事象（命題，仮説）かはわからないが，常にその中の一つの事象に属してある事象は生起している”という前提が必要であるということをはっきり理解していなければならない．そうでないと間違った適用をし，結果の解釈を誤り，さらにはあまり意味のない適用をしたりすることになるので，注意しなければならない．

（2） 事前の判断が非常に曖昧なときにベイズの定理を適用すると有効であるが，通常われわれが遭遇する頻度確率の問題の場合には，比較的きめの細かく，精度の良い結果を必要とするので，効果的なベイズの定理の適用は望めない．したがって判断の選択肢がいくつかありその決定に苦しむようなときに適用すれば効果がある（ベイズ決定理論のように）が，通常の土木工学上の頻度確率の問題にはベイズの定理の適用の効果，“少ない情報から実りの多い結果を引き出すこと”はあまり期待できない．

（3） サンプリング理論におけるパラメーターの推定へのベイズの定理の適用は事前情報が不確実で新しい情報との間でパラメーターの値にかなり差があり，情報量にはあまり差がない場合にのみそのメリットが発揮される．ただし事後の推定値の方が必ずしも良いとは限らないこと，および精度は一般に良くないことを認識しておかなければならない．したがって事後の推定値を利用してある結果が得られた場合には，ある種の判断もしくは行動の決定のための一資料としてその結果は用いられるべきもので，古典的推定によった結果とは根本的に意味が異なることに留意すべきである．

（4） 上記（2），（3）のことは“仮説の確信の度合”に関するベイズの定理は本来，“行動の決定あるいは推論のプロセスに適用されるものである”ことからの当然の帰結である．つまり確信の度合は主観確率であり，主観的判断，すなわち大まかな判断の修正という局面においてしか有効ではないのである．

（5） 頻度確率に限らず，主観確率の場合にも，ベイズの定理の適用のメリットが発揮されないことがあり得る．

5. あとがき

普通ベイズの定理を批判する立場の人が指摘するのは次の2点であるといわれている[11)]．

（1） 事前確率（主観確率）なるものがはたして存在するか，不明な場合が多い．

（2） 事前確率が存在すると認められる場合でも，その値を知ることは一般に困難である．

しかし本文では，このような批判とは別に

（1） 通常の教科書，参考書にベイズの定理を適用するに際しての前提について断りがないため，意味のはっきりしない適用例が散見されるので，その前提を明確に示すこと

（2） 土木工学上の問題にベイズの定理を適用しても通常期待されているほどの効用はないと指摘すること

などが骨子となっている．

なお，本論文を作成するにあたり，信州大学工学部奥山安夫教授，筑波大学社会工学系 松原　望助教授および統計数理研究所 平野勝臣研究室長の方々に貴重なご教示を頂いたことを付記し，深甚な謝意を表する．

参考文献

1）D.V.リンドレー（竹内　啓・新家健精 訳）：確率統計入門1確率，培風館，pp.28～41，1968.
2）林　周二：統計学講義，丸善，pp.80～83，1973.
3）伊藤　学：尾坂芳夫：設計論，技報堂，pp.221，1980.
4）亀田弘行・池淵周一・春名　攻：確率・統計解析，技報堂，pp.20～21，1981.

5) 松本嘉司・伯野元彦：土木解析法２，技報堂，pp. 311 ～ 313, 1975.

6) Ang, A. H-S. and Tang, W. : Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Volume I -Basic Principles, John Wiley & Sons, Inc., pp. 332 ～ 350, 1975.

7) バタチャリヤ，ジョンソン（蓑谷千凰彦 訳）：初等統計学１，東京図書，pp. 80, 1980.

8) 松原 望：意志決定の基礎，朝倉書店，pp. 16 ～ 20, 1977.

9) Matsuo, M. and Asaoka, A. : Dynamic Design Philosophy of Soil Based on the Bayesian Reliability Prediction, Soils and Found., Vol. 18, No. 4, 1978.

10) Madsen, P. H. and Lind, N. C. : Bayesian Approach to Prototype Testing, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 108, No. ST 4, pp. 753 ～ 769, 1982.

11) 北川敏男：推測統計学Ⅱ，岩波書店，pp. 171, 1956.

（1984. 3. 9・受付）