

任意形状の剛基礎底面に対する 動的 Compliance の簡易解析法*

SIMPLIFIED ANALYSIS OF DYNAMICAL GROUND COMPLIANCE FOR ARBITRARY-SHAPED RIGID FOUNDATION

川上 英二**・田崎 信一***

By Hideji KAWAKAMI and Shinichi TASAKI

A simplified technique for calculation of the dynamical ground compliance for an arbitrary-shaped rigid foundation is presented. This numerical method is based on a reduction of integral equations to linear algebraic equations by subdividing the contact area into subregions. Following points are mainly improved :

- (1) in order to enable analytical integrations, Green's functions are approximated to power series or linear functions;
- (2) the contact area is subdivided into triangular-shaped subregions ; and
- (3) linear distribution of the contact pressure is assumed in each subregion.

In order to discuss an accuracy of this method, circular and square foundations resting on an elastic half-space are examined.

1. 緒 言

構造物の震害に対して地盤の動特性が多大な影響をもたらすことは、従来より指摘されていることであり、地盤上の構造物の動的解析に際しては、構造物-地盤の連成振動系を解析する必要がある。

解析手法は、地盤の表現方法により、A)質点系、B)有限要素法、C)弾性体理論による解析の3つに大別される。それぞれに利点はあるが、地震を波動現象としてとらえるには地盤を無限に広がる弾性体と仮定するC)の手法が最も適しており、この手法は底面下の接触圧の取り扱い方法により、次の3つに分類できる。

- I) 接触圧の分布形状を仮定する手法^{たとえは 1)-3)}
- II) 接触圧を未知関数とする積分方程式を解析的に解く手法^{たとえは 4)}
- III) 接触圧を未知関数とする積分方程式を離散的に解く手法^{たとえは 5)-7)}

接触圧を未知関数とする積分方程式を離散的に解く

III)の手法は、

- 1) 仮定した接触圧の分布形状の高振動数域での妥当性、さらには任意形状の底面への適用性などの問題に手法I)のようなあいまいさがない、
- 2) 任意形状の底面に関しても計算が可能である、
- 3) 構造物が加振源ではなく、地盤から構造物に波動が入射する場合の構造物の振動を、Complianceを用いた近似解析^{たとえは 8),9)}によることなく、柔性マトリックスを用いて直接解析できる^{たとえは 10)}、
- 4) 上部構造物の柔性を有限要素法等で考慮して解析できる^{たとえは 10)-11)}、
- 5) 入射波の底面での位相差を考慮できる⁶⁾

など、多くの利点をもつと考えられる。しかし、欠点は、容易でない Green 関数の計算を要素の対それぞれに対して行う必要があるため、分割数の増加に伴い膨大な計算量を要することである。

本論文は、以上のような観点から、任意形状を有する剛基礎底面に対する地盤の動的 Compliance および接触圧を算定するための簡易解析法を提案したものであり、接触圧を未知関数とする積分方程式を離散的に解く従来の手法における計算量の減少化を図ったものである。

2. では解析手法を展開し、3.(1)ではこの手法の精度を検討するため、理論解の求まっている円形底面に適用

* 本論文の一部は、第38回土木学会年次学術講演会I部(1983)、第30回構造工学シンポジウム(1984)において発表した。

** 正会員 工博 埼玉大学助手 工学部建設工学科
(〒338 浦和市下大久保255)

*** 学生会員 埼玉大学大学院修士課程在学中(同上)

し、Compliance および接触圧分布を求め、本手法の精度、および計算量を検討した。3.(2)では、任意形状の底面の一例として正方形の底面に適用した結果を示した。なお、本論文では半無限弾性地盤を対象としており、また、地盤の引張応力を考慮して、基礎は浮き上がらないものと仮定している。

2. 解析手法

(1) 既往の研究との比較

構造物の動的問題を解析する際、基礎底面下の接触圧は、次式の第一種 Fredholm 型積分方程式の解で求められる。

$$u(x',y') = \iint_S [G(x'-\bar{x},y'-\bar{y};\omega, V_s, \nu)] \times p(\bar{x},\bar{y})d\bar{x}d\bar{y} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、直角座標系 X-Y-Z の X-Y 面を地表面とおき (Fig.1 参照)、 $u(x',y')$ は (x',y') での変位ベクトル、 $p(\bar{x},\bar{y})$ は (\bar{x},\bar{y}) での接触圧ベクトル、

$$u = \{u_x, u_y, u_z\} \quad p = \{p_x, p_y, p_z\} \dots\dots\dots (2)$$

ω は加振円振動数、 V_s は S 波の速度、 ν はポアソン比、 S は基礎の底面積である。さらに、 $[G]$ は (\bar{x},\bar{y}) に単位の大きさの加振力が作用した場合の (x',y') での変位を表わす 3×3 要素の Green 関数からなるマトリックス

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

であり、また本論文では正弦加振問題を考え、時間項 $\exp(i\omega t)$ を省略している。

式(1)を離散化して解く Wong ら⁶⁾によって提案された従来の手法は、底面を要素分割し、 $p(\bar{x},\bar{y})$ を各要素内で一定値 p_u (u は uniform の略)として導かれる連立方程式(4)を、底面の剛体変位を境界条件として解くものである。

$$u^{DP} = \sum_{EP=1}^{NE} \iint_{S^{EP}} [G]^{DP-EP} p_u^{EP} d\bar{x}d\bar{y} \dots\dots\dots (4)$$

(DP=1~ND)

ここで、DP, EP は、それぞれ変位点 (底面の変位の境界条件を表わす点)、および要素の番号であり、ND, NE はおのおのの総数である。なお、添字 DP, および

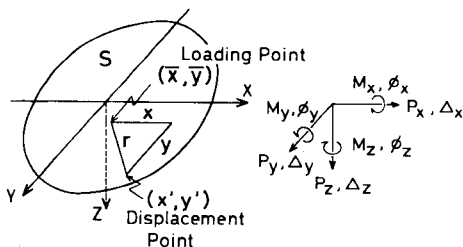


Fig.1 Coordinate System.

EP は、おのおの DP, EP での値を示し、添字 DP-EP は、EP の影響による DP での値を示す。また、 S^{EP} は要素 EP の領域を表わし、従来の手法^{たとか⁵⁾は⁷⁾}では、分割要素としては同じ大きさの長方形が用いられ、変位点は各要素の中心にとられてきた。

しかし、上式中の Green 関数の領域 S^{EP} 内での積分値を求めるには、特異点を含む二重積分を数値積分で行う必要があり、計算量は膨大なものとなる。北村・桜井⁷⁾は、この欠点を解消するため、载荷要素の中心の変位は、近似式で表わした Green 関数に等分布接触圧を乗じて積分計算することにより求め、载荷要素の外の変位は、接触圧を要素中央の集中心に置換し、積分計算を簡略化して算定する手法を提案している。

このように、従来の手法では複雑な Green 関数を精度よく扱っているのに対して、接触圧は一様分布、集中心力等、比較的ラフに扱っている。しかし、実際にはこの両者の積の精度が問題であるため、両者を同等の精度に扱うか、むしろ計算時間が多く必要な Green 関数の精度より、接触圧の精度を高めることの方が計算の効率という観点からは適当であると考え、本論文では定式化において以下の工夫を行った。

- イ) Green 関数を実数部、虚数部それぞれについて近似する。ただし、計算する変位点に対し、要素の全領域が近似式の適用範囲内に含まれる場合は近似式を用い、変位点と加振要素とが十分に遠く、近似式の適用範囲外の場合には、要素を構成する 3 節点の Green 関数の値から線形的に内挿した関数を用いる。
- ロ) 分割要素は任意形状の三角形を用いる。
- ハ) 接触圧は各要素内で線形分布とする。
- ニ) 加振点 (加振要素の各頂点)、変位点 (底面の境界条件を表わす点) とを分けて考える。

イ)の近似関数化は、点加振に対する Green 関数 (Table 1 参照) が、4 種のなめらかな複素変位関数 (e, f, g, h) によって静的な場合の解を拡張した形で表現できること⁷⁾に着目して行ったものである。ここで用いる近似式が従来の式と異なる点は、田治見²⁾、北村・桜井⁷⁾が絶対値、および偏角を近似していたのに対し、本手法では実数部、および虚数部を無次元振動数 $a_0 (= \omega r / V_s, r$ は加振点と変位点との距離) のべき級数で表わし、積分を解析的に可能にしたことである。本論文では、低振動数領域での Compliance を算定するため $a_0 \leq 2.5$ を近似関数化の対象とし、野嶋ら¹⁰⁾の計算法に従い、対象域内の数点で厳密解を計算し、 $a_0 = 0$ での値を通るようにして 3 次の近似式を求めた。この近似式をポアソン比 $\nu = 1/3$ (以下の計算例もすべて $\nu = 1/3$ の結果を示している) に対して求めた結果が Table 2 に示す式である。

Table 1 Green's Functions for Point Source Excitation.

$$\begin{aligned}
 G_{xx} &= \frac{1}{2\pi\mu} \left(\frac{1-\nu}{r} g + \frac{\nu x^2}{r^3} h \right) \\
 G_{xy} = G_{yx} &= \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\nu xy}{r^3} h \\
 G_{xz} = -G_{zx} &= -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{(1-2\nu)x}{r^2} e \\
 G_{yy} &= \frac{1}{2\pi\mu} \left(\frac{1-\nu}{r} g + \frac{\nu y^2}{r^3} h \right) \\
 G_{yz} = -G_{zy} &= -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{(1-2\nu)y}{r^2} e \\
 G_{zz} &= \frac{1}{2\pi\mu} \frac{1-\nu}{r} f \\
 x &= x' - \bar{x} \quad y = y' - \bar{y}
 \end{aligned}$$

e, f, g, h : Complex Displacement Function
 μ : Shear Modulus
 ν : Poisson's Ratio

Table 2 Approximated Equations for Complex Displacement Functions ($a'_0 \leq 2.5$).

$$\begin{aligned}
 e &= 1.0 + (0.8333 + 0.1488 i) a'_0 + (-0.5782 - 1.5816 i) a'_0{}^2 \\
 &\quad + (-0.0668 + 0.4698 i) a'_0{}^3 \\
 f &= 1.0 + (0.0897 - 1.4518 i) a'_0 + (-0.9929 + 0.4677 i) a'_0{}^2 \\
 &\quad + (0.2467 + 0.0357 i) a'_0{}^3 \\
 g &= 1.0 + (0.0819 - 1.2887 i) a'_0 + (-0.8391 + 0.3122 i) a'_0{}^2 \\
 &\quad + (0.1890 + 0.0546 i) a'_0{}^3 \\
 h &= 1.0 + (-0.0604 + 0.0969 i) a'_0 + (0.4210 - 0.2006 i) a'_0{}^2 \\
 &\quad + (-0.1275 - 0.0263 i) a'_0{}^3
 \end{aligned}$$

なお、この近似式の係数は、 $\nu=1/4 \sim 1/3$ の変化に対して、平均 1~2 割程度の変化を示す。また、ここでは $a'_0 \leq 2.5$ の領域を対象としているため 3 次式を用いているが、次数を上げるによりさらに高い振動数までも近似可能である。さらに、本論文では半無限弾性地盤について解析しているが、地盤が粘弾性体でも、また多層地盤でも成層地盤であれば同様な表現が可能である¹³⁾。

このように Green 関数を実数部、虚数部でべき級数に近似することの最大の利点は、接触圧分布をも同様に高次べき級数に仮定した場合、両者の積である被積分関数がべき級数となるため、各要素内で二重積分が解析的に可能となる点である。結局、本手法では、加振要素 EP 内で線形分布の接触圧 p_i (l は linear の略)

$$p_i^{EP} = [C_{P,1}] \bar{x} + [C_{P,2}] \bar{y} + [C_{P,3}] \dots \dots \dots (5)$$

を用い、変位の計算は、要素 EP が変位点 DP に対して近似式の適用範囲内の場合には次式

$$u^{DP-EP} = \iint_{S^{EP}} [f(x,y) \cdot D]^{DP-EP} p_i^{EP} d\bar{x} d\bar{y} \dots \dots \dots (6)$$

ただし

$$D = D_1 + D_2 a'_0 + D_3 a'_0{}^2 + D_4 a'_0{}^3 \dots \dots \dots (7)$$

適用範囲外の場合には

$$u^{DP-EP} = \iint_{S^{EP}} [G_i]^{DP-EP} p_i^{EP} d\bar{x} d\bar{y} \dots \dots \dots (8)$$

ただし

$$[G_i]^{DP-EP} = [C_{G,1}] \bar{x} + [C_{G,2}] \bar{y} + [C_{G,3}] \dots \dots \dots (9)$$

で行った。式(6)、(8)の [] は要素内の Green 関数の値を示し、前者における D (式(7)) は複素変位関数 (Table 2 の e, f, g, h) であり、 a'_0 のべき級数による近似式で表わされ、後者は (\bar{x}, \bar{y}) の線形近似式 (式(9)) によって表わされる。

以上の式は三角関数の多項式に展開され (2. (2) 参照)、積分が解析的に可能になるため計算時間は短縮される。また、本手法では口の工夫により任意形状の底面への適用、および接触圧の急変する部分での細分割が容易なため、計算量の大幅な減少化をもたらす。さらにはハ)の工夫により接触圧を精度よく近似することが可能となる。

Fig. 2 は、以上の離散的手法の違いを直観的にまとめたものである。Wong ら^{5), 6)} は、Green 関数と接触圧を、それぞれ厳密式、要素内一定値とした。また、北村・桜井⁷⁾ は、変位点が载荷要素内ではそれぞれ近似式と一定値、载荷要素外ではそれぞれ厳密式、および集中力とした。それに対し、本手法では、それぞれ近似式、線形関数と仮定し、精度の向上、および計算時間の短縮を図った。

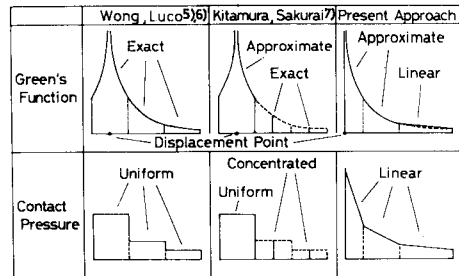


Fig. 2 Comparison among Three Techniques.

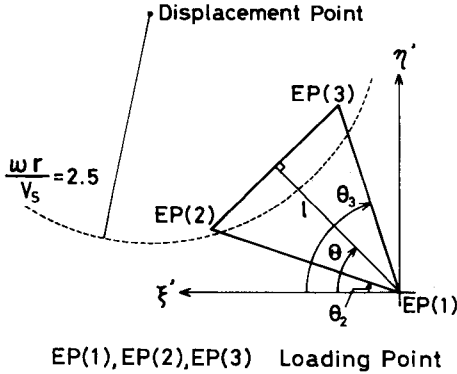
(2) 影響係数

a) 要素が近似式の適用範囲に含まれる場合

要素 EP の全領域が変位点 DP に対する近似式の適用範囲に含まれる場合、変位 u^{DP-EP} は式(6)の二重積分を行うことにより、三角形要素の頂点である加振点での接触圧ベクトル $p^{EP,4}$

$$p^{EP,4} = \{ \{ p^{EP(1)} \} \{ p^{EP(2)} \} \{ p^{EP(3)} \} \} \dots \dots \dots (10)$$

を用いて式(11)と表わされる。その際、Fig. 3 に示すように要素を構成する 3 つの加振点の番号を EP(K), (K=1,2,3) と置き、変位点を原点とする直角座標 $(\xi, \eta) = -(\bar{x} - x', \bar{y} - y')$ 、および極座標 (r, θ) を考えた。積分は、積分領域 S^{EP} を 3 つの領域 ($m=1, 2, 3$) に分け、 r に関しては $r=0 \sim l_m / \cos(\theta - \theta_m)$ 、 θ に関しては、加振点 EP(K) の偏角 θ_k を用いて、 $\theta = \theta_1 \sim \theta_2, \theta_2 \sim \theta_3, \theta_3 \sim \theta_1$ の区間で行った。ただし、 l_m は原点から各辺へ



EP(1),EP(2),EP(3) Loading Point

Fig. 4 Local Coordinate System.

ただし、

$$\left. \begin{aligned} [I_1] &= \frac{l^4}{4}[C_{\alpha,1}]T_{11} + \frac{l^4}{4}[C_{\alpha,2}]T_{12} \\ &\quad + \frac{l^3}{3}[C'_{\alpha,3}]T_{13} \\ [I_2] &= \frac{l^4}{4}[C_{\alpha,1}]T_{21} + \frac{l^4}{4}[C_{\alpha,2}]T_{22} \\ &\quad + \frac{l^3}{3}[C'_{\alpha,3}]T_{23} \\ [I_3] &= \frac{l^3}{3}[C_{\alpha,1}]T_{31} + \frac{l^3}{3}[C_{\alpha,2}]T_{32} \\ &\quad + \frac{l^2}{2}[C'_{\alpha,3}]T_{33} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

$$T_{ij} = \int_t \frac{\sin^{\alpha}(t+\theta)\cos^{\gamma}(t+\theta)}{\cos^{\alpha}t} dt \dots\dots\dots(18)$$

$$(i = \theta - \theta)$$

なお、 $[XY']$ は $[XY]$ (式(14)) の ξ, η をそれぞれ ξ', η' に置き換えたものであり、 $[C'_{\alpha,3}]$ は $[C_{\alpha,3}]$ (式(9)) を座標系 (ξ', η') に対して求めたものである。また T_{ij} ($i=1\sim 3, j=1\sim 3$) の詳細は Table 4 に示すとおりであり、不定積分が解析的に求められている¹⁴⁾。

c) 影響係数

結局、底面を加振することによる変位は式(6)、(8)を全加振要素について重ね合わせることににより、式(19)に変形できる。

$$u^{DP} = \sum_{LP=1}^{NL} [\bar{G}]^{DP-LP} p^{LP} \dots\dots\dots(19)$$

ただし、LPを加振点の番号、NLをその総数、 p^{LP} を

Table 4 T_{ij} in Eqs. 17.

| | | | | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i \ j | 1 | | | 2 | | | 3 | | |
| | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| α | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| β | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| γ | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

加振点 LP での接触圧ベクトルとする。また、 $[\bar{G}]^{DP-LP}$ は加振点 LP を加振した場合の変位点 DP での変位を表わす 3×3 要素のマトリックスであり、各要素は、北村・桜井⁷⁾により影響係数と呼ばれているものに相当している。

(3) Compliance の定式化

Compliance の定式化にあたっては、Wong ら⁶⁾の解法に基づき、接触圧分布を各要素内で線形とするように改良して用いた。ただし変位、および作用力の正の向きは Fig. 1 に示すとおりである。

剛基礎底面内の変位点 DP での変位 u^{DP} は、剛体の 6 自由度を表わすベクトル U

$$U = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, R\phi_x, R\phi_y, R\phi_z) \dots\dots\dots(20)$$

を用いて次式で表わされる⁶⁾。

$$u^{DP} = [A]^{DP} U \dots\dots\dots(21)$$

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y'/R \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x'/R \\ 0 & 0 & 1 & y'/R & -x'/R & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(22)$$

ただし

- $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$: 剛基礎底面の原点での変位
- ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z : 各軸回りの微小回転角
- R : 底面の基本長さ (円形では半径, 正方形では 1/2 辺長を用いた)

さらに、剛基礎から地盤に作用する力とモーメントを示すベクトル F

$$F = (P_x, P_y, P_z, M_x/R, M_y/R, M_z/R) \dots\dots\dots(23)$$

は、各要素に作用する線形分布と仮定された接触圧を積分して重ね合わせることににより、次式で表わされる。

$$F = \sum_{EP=1}^{NE} \iint_{SEP} [A]^{EP} p_t^{EP} d\bar{x} d\bar{y} \dots\dots\dots(24)$$

$$= \sum_{LP=1}^{NL} [\bar{A}]^{LP} p^{LP} \dots\dots\dots(25)$$

式(25)の $[\bar{A}]$ は、式(24)の積分を行うことにより得られるマトリックスであり、接触圧から力およびモーメントへの変換マトリックスである。そして、剛基礎に働く力と変位との関係は、式(19)、(21)、(25)より p^{LP} 、 u^{DP} を消去することにより、次式で求められる。

$$U = \frac{1}{\mu R} [C] F \dots\dots\dots(26)$$

ここで $[C]$ は Compliance マトリックスと呼ばれており、底面形状が対称な場合には次式のように 6 種の Compliance により表わされる。

$$[C] = \begin{pmatrix} C_{HH} & 0 & 0 & 0 & C_{HM} & 0 \\ 0 & C_{HH} & 0 & -C_{HM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{VV} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{MH} & 0 & C_{MM} & 0 & 0 \\ C_{MH} & 0 & 0 & 0 & C_{MM} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{TT} \end{pmatrix} \dots\dots(27)$$

ただし,

C_{HH} : Horizontal, C_{VV} : Vertical,
 C_{MM} : Rocking, C_{TT} : Torsional,
 C_{HM}, C_{MH} : Coupling Compliance

3. 計算結果と考察

(1) 円形底面

本節では, 2. で提案した手法の精度を検討するため, 理論解の求まっている半無限弾性地盤上の円形剛基礎底面の場合に本手法を適用し, 本手法と理論解との Compliance および接触圧分布の比較を行った. さらに従来手法との精度の比較を行うことにより, 計算量の減少化を確認した.

a) 分割方法の影響

まず, 解析モデルとしては Fig. 5 に示す C-1, 2, 3a, 4 を用いた. これらは, いずれも円周方向の分割が 8 分割であり, さらに, C-2 は半径の 9 割, C-3a は 9, 7 割, C-4 は 9, 7, 5 割の位置で分割したものである. また, 変位点は各要素の頂点にとった.

C-4 の値を基準とした各モデルの Compliance の値の比を, 無次元振動数 $a_0 (= \omega R / V_s) = 0, 0.8, 1.6, 2.4$ をパラメーターとして Fig. 6 に示す. この図からわかるように, Compliance は C-3a でほぼ収束しており, 半径の 9, 7 割のほか, さらに 5 割の位置で分割することの影響は少ない.

次に, 本手法の利点である分割位置を任意にとれることの有効さを示す一例として, C-2 のタイプのモデルを用い, 半径方向に 2 分割するのみのモデルにおける分割位置の影響を調べた. Fig. 7 は, 分割位置 (分割点の底面中心からの距離 r_0 / 底面半径 R) を変化させた場合の Compliance の値と Luco ら⁴⁾ による解析解との比の変化を静的な場合 ($a_0 = 0$) について示したものである. 図より, $r_0/R \approx 0.8$ で精度がよく, 先の結果と同様, 周辺部分での細分割が計算の効率上, 非常に有効であることが判断できる. このような底面の輪郭曲線を考慮し

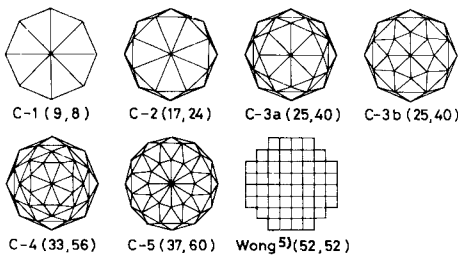


Fig. 5 Analytical Models for Circular Foundation (NL, NE) = (Number of Loading Points, Number of Elements).

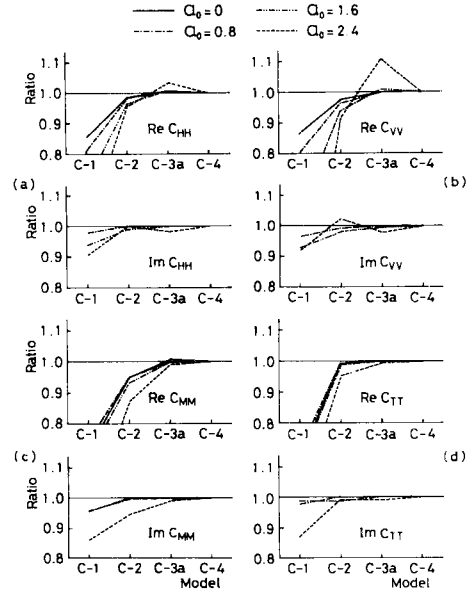


Fig. 6 Accuracy of Compliance Values for Various Models.

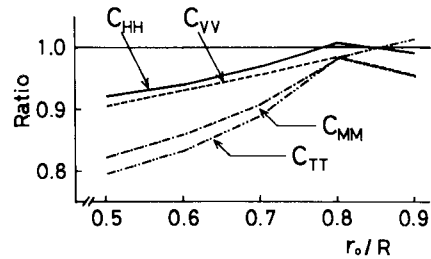


Fig. 7 Location of Mesh Division and Accuracy of Compliance Values.

た周辺部分での細分割は, 従来手法で用いられていた矩形要素では困難であり, 任意の形状および大きさの三角形要素の使用を容易にした本手法の分割方法により可能となったものである.

b) 精度の検討

本手法で得られた 6 つのモードに対する Compliance を Fig. 8 に示す. なお, 同じ分割パターンとして C-3a と C-3b の 2 種類を用いたのは, メッシュの粗さと振動数との関係を探るためであり, C-3b は, 半径の 9, 5 割の位置で分割したものである. また, C-5 は C-3b と半径方向の分割方法は同一とし, 円周方向の分割を 8 分割から 12 分割に増やしたものである. 図より, C_{HM}, C_{MH} 以外では, 誤差は $a_0 \leq 3$ の低振動数の領域で数パーセント以内であり, ほぼ満足し得る値と考える. また, C-3a と C-3b を比較すると, C-3b では, 高振動数域における誤差が幾分小さいことが認められる. C_{HM}, C_{MH} に関しては, Luco ら⁴⁾ は接触面で異なる境界条件を仮

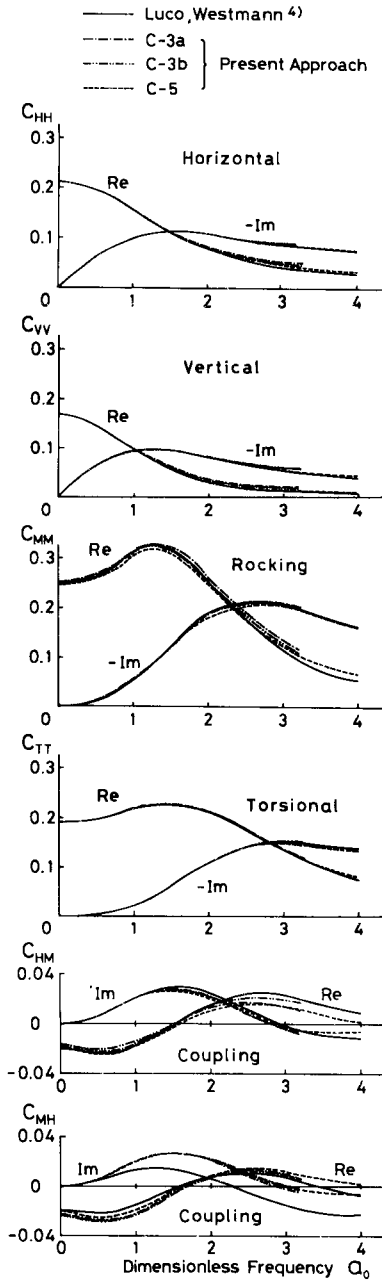


Fig. 8 Compliance Values for Circular Foundation.

定したため、 C_{HM} と C_{MH} とで異なる値を求めており、また離散的手法を用いた円形底面の C_{HM} 、 C_{MH} の値が示されていない⁵⁾ので、本手法の優劣を評価することができないが、 C_{HM} 、 C_{MH} の場合には、Complianceの大きさそのものが他のモードに比較して1-order小さい値であり、しかも定性的には類似した結果が得られていることがわかる。さらに、他の4つのモードの誤差はかな

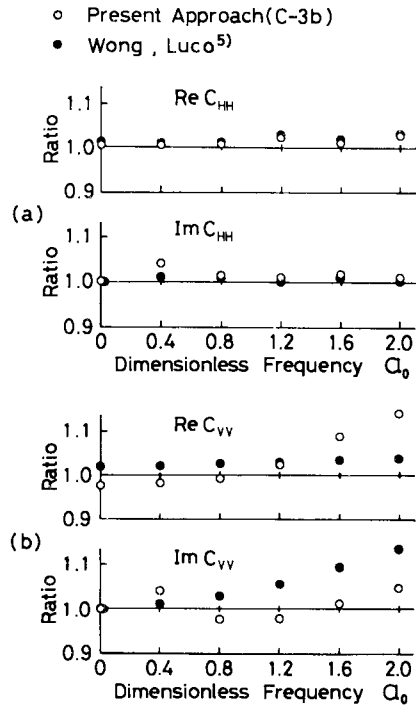


Fig. 9 Comparison between Accuracies of Compliance Values.

り小さく、本手法のモデルC-3a、C-3b、C-5によって、円形底面を十分精度よく近似表現していると考えられる。

次に、従来の手法に対する本手法の精度を比較する。底面形状の円形を矩形要素で近似表現することの困難から、従来の離散的手法の円形底面への適用例は少ない。ここでは、Wongら⁵⁾がFig. 5に示すモデルを用いて計算し、 C_{HH} 、 C_{VV} を数値で報告しているの、この値とC-3bの値との比較を、解析解に対する比の形でFig. 9に示す。

同図より、本手法とWongら⁵⁾の手法とは、全体的には両者ともほぼ同精度と考えられる。しかし、ここで重要なことは、要素分割においてWongらのモデルでは加振点数 $NL=52$ であり、このような矩形要素を用いたモデルでは円形を表現するのに最低限必要な(Fig. 5参照)分割数であったのに対して、本手法のC-3bでは $NL=25$ である。計算量は加振点数の2乗(マトリックスの要素数)にほぼ比例することを考えると、本手法は、従来の手法^{たとえは5)~7)}に比べて約2割の計算量に減少化されていると考えられる。

さらに、本手法では接触圧分布も精度よく求められる。一例として、静的な場合の強制鉛直変位、または強制回転変位に伴う接触圧の鉛直成分($p_z - \Delta z$, $p_z - \phi_x$)を

理論解¹⁵⁾とともに Fig. 10 に示す (ただし、後者の場合の p_z は Y 軸に沿っての値). 図から、本手法により局所的に急変する接触圧が十分に精度よく求められていることがわかる.

(2) 正方形底面

次に、本手法を任意形状の底面の一例として正方形底面に適用した. Compliance の値は、解析解が得られていないため、Wong ら⁶⁾が 64 分割のモデル (Fig. 11 参照, 1 象限のみ示す) で得た値と比較した. その際、まず変位点の位置の Compliance に及ぼす影響を検討した. なぜなら、従来の手法では、変位点は各要素の中央にとるため、すべて底面の内部に存在し、Fig. 11 に示すように、剛基礎底面の実際の大きさよりも小さい領域の剛基礎を

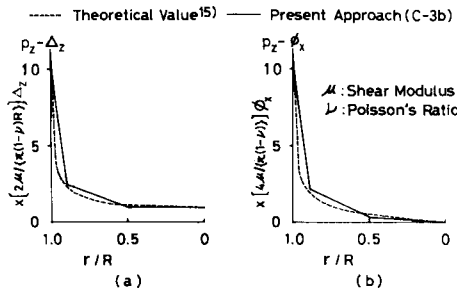


Fig. 10 Contact Pressure under Circular Foundation.

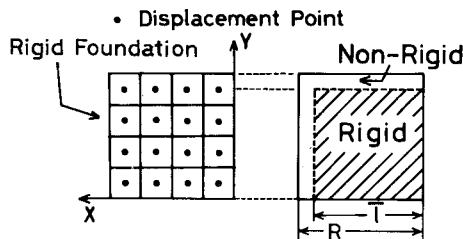


Fig. 11 Analytical Model for Square Foundation by Wong and Luco⁶⁾.

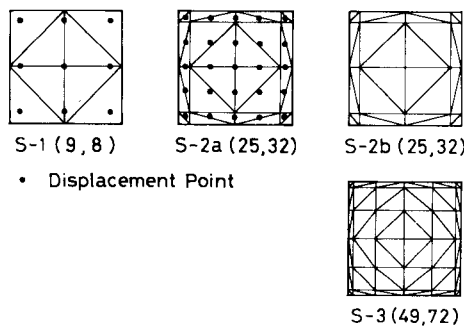


Fig. 12 Analytical Models for Square Foundation (NL, NE) = (Number of Loading Points, Number of Elements).

想定する危険性があるからである.

Fig. 13 は、加振点と変位点とを分けて考えることが可能な本手法の利点を生かして、変位点の位置の影響を Fig. 12 に示す S-1 を用いて検討したものである. 図は、要素分割を一定として加振点 (節点) の位置を固定したまま、底面の 1/2 辺長 R と外側の変位点までの距離 \bar{l} の比 \bar{l}/R を変化 (横軸) させ、静的な場合の Compliance を $\bar{l}/R=1$ の場合に対する比 (縦軸) で示したものである. なお、Wong ら⁶⁾の手法における、4, 16, 36, 64 分割の場合の \bar{l}/R を Fig. 13 中 A, B, C, D で示してある. ただし、この解析モデルは \bar{l}/R のみを考慮しているため、図中の A, B, C, D が必ずしも従来の手法の値に相当するわけではなく、また、メッシュも粗いため定量的に判断するには問題がある. しかし、変位点の位置の影響はかなり大きく、変位点を底面の輪郭曲線より内部にとるほど Compliance は大きく (柔に) なり、変位点の位置が D (64 分割) の場合でも Compliance はかなり大きく計算されていることがわかる. したがって、Compliance の厳密解は、Wong ら⁶⁾により報告されていた値よりも幾分小さい値であると想像される.

次に、Fig. 12 の S-2a, 2b, 3 を用いて得られた Compliance を Fig. 14 に示す. ただし、変位点は S-2b, 3 では加振点を表わす節点と同一点にとったが、S-2a では Fig. 12 に示す・の位置にとった. なお、S-2 の a, b 両タイプは、おのおの $\bar{l}/R=0.875, 1.0$ とした場合であり、前者は、Wong ら⁶⁾による 64 分割の場合にちょうど相当し、 \bar{l}/R を等しくとれば、本手法でも、Wong ら⁶⁾の値とほぼ同じ結果が得られていることがわかる. また、Fig. 13 の結果から考えて $\bar{l}/R=1$ で解析した場合には Compliance が小さく求まることが予想されるが、実際 S-2b, S-3 では、Compliance が幾分小さく求まっている. しかも、3.(1) に示したように、変位点を輪郭線上に設けて計算した円形底面の Compliance の精度がよかったことを考えると、この幾分小さな値 (S-2b, S-3) の方が Wong ら⁶⁾による結果、または S-2a の結果よりも厳密解に近いものと考えられる.

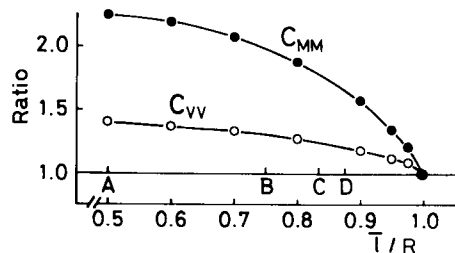


Fig. 13 Effect of Location of Displacement Point on Compliance Values.

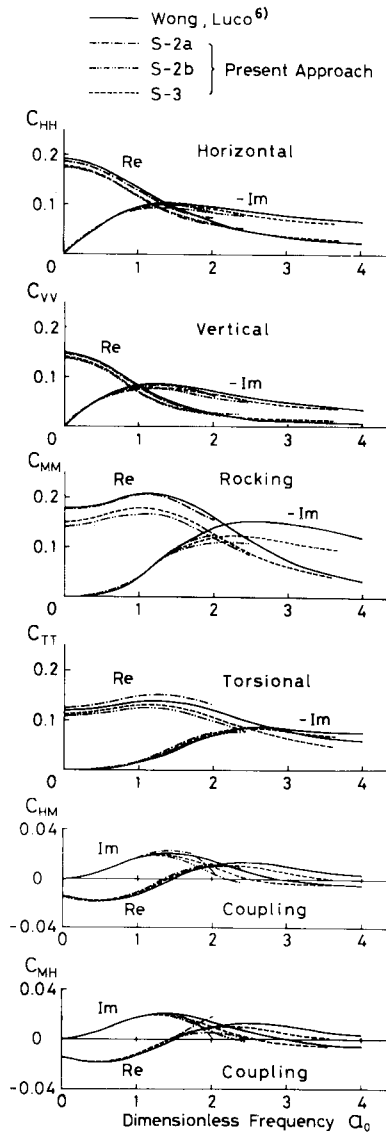


Fig. 14 Compliance Values for Square Foundation.

Fig. 15 に示した接触圧の分布形状は、円形底面の場合 (Fig. 10) と同様、静的な場合の $p_z - \Delta_z$, $p_z - \phi_x$ を S-3 の場合について表わしたものであり、対称性を考慮して底面の 1 象限のみを表わしてある。正方形底面についての接触圧の理論解はないが、円形底面の周辺部でみられた Boussinesq 分布 (Fig. 10 破線参照) と同様、隅角部で接触圧分布が急増することは当然予想されることであり、この図もその傾向を的確に表現している。従来の離散的手法でも接触圧分布は計算されている¹⁶⁾が、変位点が底面の端部に位置しないため、基礎の周辺部では実際の底面に比べメッシュの大きさだけ異なる面積に対して連続条件を考えることになり¹¹⁾、極度な応力集中が

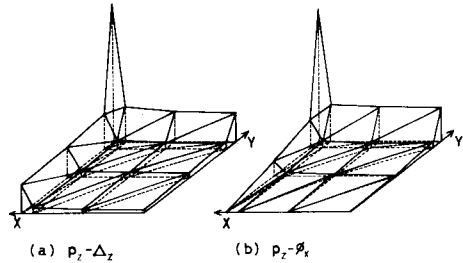


Fig. 15 Contact Pressure under Square Foundation.

認められないなだらかな分布になっている。それに対し、本手法では、応力集中の様子を従来の手法より精度よく表現する結果を与えるものと考えられる。

4. 結 論

(1) 任意形状を有する剛基礎底面の Compliance および接触圧を離散的に求める解析手法において計算量の減少化を図る手法を提案した。この手法は、従来の離散的手法においては Green 関数の複雑さのために不可能であった任意形状の高次要素の使用を可能にしたもので、複素変位関数の実数部、虚数部の近似関数化に特徴がある。また一定の大きさの矩形要素でなく、任意の大きさおよび形状の三角形要素を用いたため、底面の輪郭曲線の表現および応力集中部分を考慮した細分割が容易となった。しかも接触圧を各要素内で線形分布とし、変位点を基礎底面の輪郭線上にとれるため、接触面を正しく評価して急変する接触圧が表現可能となり、Compliance の精度が向上した。

(2) 本手法を理論解の求まっている円形底面に適用した結果、従来の手法の約 2 割の計算量で、Compliance の計算が可能であると考えられる。

(3) 円形底面について、静的な場合の鉛直、回転振動に対する接触圧を理論解と比較した。本手法では、従来の手法に比べ、端部における応力集中の様子が精度よく近似表現されていることが認められた。

さらに検討すべき点も多く存在するが、本手法により、任意形状を有する剛基礎底面に対する Compliance および接触圧を求める方法が改良されたものと考えられる。また、計算量の減少化をもたらす本手法は、Green 関数の算定、およびその多項式近似等の問題を解決することにより、複数基礎、根入れ基礎、多層地盤などの複雑なモデルへの弾性体理論を用いた離散的手法の適用性を広げるものと考えられる。

謝 辞：本論文をまとめるにあたり、埼玉大学工学部、久保慶三郎先生・渡辺啓行先生に貴重なご助言を頂きました。また、文部省科研費 (一般研究(A), 奨励研

究(A), 58年度)の援助を受けました。記して深謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有：成層構造をもつ基礎地盤の動特性，京都大学防災研究所年報，第19号B，pp. 167~217, 1976.
- 2) 田治見宏：耐震理論に関する基礎的研究，東京大学生産技術研究所報告，第8巻，第4号，pp. 170~215, 1959.
- 3) Bycroft, G. N. : Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 248, Series A, pp. 327~368, 1956.
- 4) Luco, J. E. and Westmann, R. A. : Dynamic response of circular footings, J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 97, pp. 1381~1395, 1971.
- 5) Wong, H. L. and Luco, J. E. : Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape, Earthq. Engng. Struct. Dyn., Vol. 4, pp. 579~587, 1976.
- 6) Wong, H. L. and Luco, J. E. : Dynamic response of rectangular foundations to obliquely incident seismic waves, Earthq. Engng. Struct. Dyn., Vol. 6, pp. 3~16, 1978.
- 7) 北村泰寿・桜井春輔：剛基礎底面の複素剛性に関する一解析法，土木学会論文報告集，第290号，pp. 43~52, 1979.
- 8) 小堀鐸二・南井良一郎・井上 豊：Ground Complianceを考慮した構造物の地震応答，京都大学防災研究所年報，第7号，pp. 179~194, 1964.
- 9) 藤谷芳男・松本茂紀・安井 讓・宮本明倫・白浜健二：基礎地盤動特性の等価2質点系置換モデル，第6回日本地震工学シンポジウム，pp. 1601~1608, 1982.
- 10) 小林俊夫：Green 関数の離散化手法を用いた建屋と地盤の動的相互作用の研究，建築学会論文報告集，第302号，pp. 21~27, 1981.
- 11) 北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性地盤上にある4辺自由板の振動解析，土木学会論文報告集，第297号，pp. 59~69, 1980.
- 12) 野嶋 治・田治見宏・市川修三：建物と地盤の相互作用に関する基礎的研究，竹中技術研究報告，第9号，pp. 38~51, 1973.
- 13) 高崎芳夫・平澤光春：粘弾性多層地盤上の構造物と地盤との動的相互作用について，第6回日本地震工学シンポジウム，pp. 1649~1656, 1982.
- 14) 森口繁一・宇田川鍾久・松 信：数学公式I，岩波書店，pp. 174~183, 1956.
- 15) Richart, F. E., Hall, J. R. and Woods, R. D. (岩崎敏男・鶴津晃臣 共訳)：土と基礎の振動，鹿島出版会，pp. 207~263, 1975.
- 16) 桜井春輔・北村泰寿：長方形剛基礎底面の接触圧分布，土木学会論文報告集，第175号，pp. 59~73, 1970.

(1984. 1. 17・受付)