

## 高次近似のはり理論の定式化ならびに各種のはり理論の精度特性

FORMULATION OF A BEAM THEORY DUE TO HIGHER-ORDER APPROXIMATION  
AND ACCURACY OF TYPICAL BEAM THEORIES

平島健一\*・根岸嘉和\*\*

By Ken-ichi HIRASHIMA and Yoshikazu NEGISHI

In this paper, the most general higher-order equations of one-dimensional static and dynamic theories for generally anisotropic elastic beams are proposed by expanding the displacements of infinite Power series with respect to the transverse coordinate of the beam.

Several beam theories which were proposed previously, can be deduced by the particular cases with employment of the lower-order terms of our theory and with specialization of the constitutive equations.

On the other hand, we apply the previously proposed plate theories including the effect of transverse deformations to the beam analysis, and examine the special theoretical and numerical characteristics of the various beam theories through the application to some static and dynamic problems.

## 1. ま え が き

Bernoulli-Eulerの平面保持の仮定に立脚した古典のはり理論は、その簡潔さ、取扱いの容易さのために解析が非常に簡単になり、実用性を含めた工学の分野にきわめて大きな貢献をしたが、厳密には純曲げ以外の横荷重を受けたはり断面は、そのはり高さ $h$ とスパン $L$ の比 $h/L$ が増大するにつれ、一般に非線形的にゆがんだ面となって古典理論の仮定から離反した結果となってゆく。これは古典理論では、はりを実際より剛な構造として評価していることに相当し、曲げ効果に比してせん断効果の影響が強くなる deep-beam の問題や短い周期幅で変化する静荷重を受けるはりの問題、ならびに異方性の強いはり、サンドイッチはり(層状性はり)さらにははりの高周波振動および短波長の波動の伝播の解析においては、古典はり理論の適用が困難となる場合も少なくない。

この弱点を改善するためのはり理論の修正の試みは、Timoshenkoが1921年に、はりのせん断変形理論<sup>1)</sup>を提案して以来活発に行われ、各種の改良理論が多数の研究

者によって提案されて現在に至っている。Timoshenkoは古典はり理論にせん断変形と回転慣性を考慮した、いわゆるTimoshenkoはりの理論を提示したのであるが、これは横荷重を受けて変形したはりの断面は、変形後の中立軸に対し直角を保持せず、せん断変形分だけ傾いた法線をもつ平面となるとする理論である。これによると断面はあくまで平面のまま保持されており、したがって高さ方向に一定のせん断変形を考慮したことになり、上下表面の境界(荷重)条件が一般に満たされていない定式化である。これに対する補正手段としてTimoshenkoは1922年の論文<sup>2)</sup>でせん断補正係数 $\kappa^2$ を導入し、変形後の平面が、実際非線形な変形面の重みつき平均となるように補正することによって、非一様なせん断変形の存在を間接的に考慮した。一方、たとえばはりの高さ方向に2次放物線分布のせん断変形を仮定した理論の一つとして最近、RehfieldとMurthy<sup>3)</sup>は古典理論における応力成分の表示をそれらの初期値として用いた逐次近似的な定式化により、変位成分と曲げ応力の修正を行い、せん断変形、はりの高さ方向の直応力、直ひずみ、さらに鉛直荷重による軸方向伸縮を考慮したはり理論を提案している。また、西野と椿<sup>4)</sup>はせん断変形を考慮したはりの逐次近似理論を提案しているが、これは断面形不変の仮定を保持したままで法線保持の拘束をはずし、逐次

\* 正会員 工博 山梨大学助教授 工学部土木工学科  
(〒400 甲府市武田4-3-11)

\*\* 正会員 工修 福島工業高等専門学校講師 土木工学科  
(〒970 いわき市平上荒川字長尾30)

せん断変形分布を高次化させていく理論であり、そこでは高さ方向の直応力およびひずみならびにはりの軸方向伸縮挙動は考慮されていない。

他方、高次の断面の変形をその定式化の最初の段階で具体的に考慮した理論として、Gupta と Pathak<sup>9)</sup> ははりの変位場を、はりの高さ方向の座標に関するベキ級数で展開し、軸方向変位  $u_x$  に奇数次項のみを、高さ方向変位  $u_z$  には偶数次項のみをそれぞれ採用した変位場を仮定し、おのおの1次と3次の項および0次と2次の項を取った高次はり理論を定式化している。しかしこの理論は、その採用項の次数からわかるように、曲げ挙動のみに着目したものとなっている。

本論文においては、微小変位の基本仮定を設定し一般的な異方性体よりなるはりの静的ならびに動的な問題に関して、奥行き方向に対して平面問題としてのはりの変位場を、はりの高さ方向の座標に関する無限項のベキ級数で展開した変位仮定に基づく、一般化高次はり理論を定式化するとともに、従来提案されている代表的なはり理論とここでの理論との関係を明らかにする。また応力場の仮定に基づく代表的な平板のせん断変形理論をはりの問題に適用して定式化し、それらを2次元弾性論によって解かれるいくつかのはり問題に適用した例やそれ以外に提案されているはり理論による解析を通して、各理論間の関係を明らかにし、はり理論の系統的な整理、位置づけを試みる。なおはりは等質で一定の高さであると仮定する。

### 2. 一般化高次はり理論の定式化

ここでは、一般的な異方性体よりなるはりに対し、奥行き方向 ( $x_2$  方向) に平面問題としての一般化高次はり理論の運動方程式と境界条件式を導き、等方性はりの場合について、その具体形を示す。なお、ここで対象とするはりおよび座標系を Fig. 1 に示すように設定する。

まず、はりの変位場を次のように仮定する。

$$u_j(x_1, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_3^n \cdot u_j^{(n)}(x_1, t) \dots \dots \dots (1)$$

式(1)の変位を、幾何学的関係式(ひずみ-変位関係)に代入するとひずみ成分は、

$$\epsilon_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} x_3^n (\epsilon_{ij}^{(n)} + \bar{\epsilon}_{ij}^{(n)}) \dots \dots \dots (2)$$

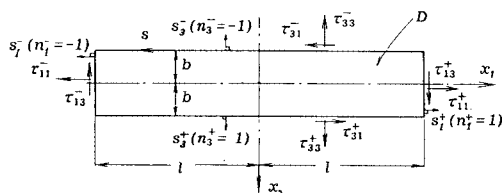


Fig. 1 Geometry of beam and the surface tractions.

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ij}^{(n)} &= \frac{1}{2} (\delta_{i1} u_{j1}^{(n)} + \delta_{j1} u_{i1}^{(n)}), \\ \bar{\epsilon}_{ij}^{(n)} &= \frac{1}{2} (n+1)(\delta_{i3} u_j^{(n+1)} + \delta_{j3} u_i^{(n+1)}). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

で求められることになる。上式中の  $\delta_{ij}$  は Kronecker の delta であり、コンマ (,) の次の添字は、その添字のついた座標に関する偏微分を表わす。式(3)のひずみ成分を一般化された構成関係式(応力-ひずみ関係)に代入整理すると応力成分が変位係数を用いて次のように表わされる。

$$\tau_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} x_3^n [C_{ij11} u_{i1}^{(n)} + (n+1) C_{ij31} u_i^{(n+1)}] \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 $C_{ijkl}$  は弾性定数である。

さらに、この応力成分を用いて、 $n$  次の構成関係式(断面力-変位係数関係)が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{(n)} &= \int_{-b}^b \tau_{ij} x_3^n dx_3 \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{mn} [C_{ij11} u_{i1}^{(m)} + (m+1) C_{ij31} u_i^{(m+1)}] \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

ここに、

$$B_{mn} = \hat{\delta}_{m+n} \frac{2b^{m+n+1}}{m+n+1}, \quad \hat{\delta}_{m+n} = \frac{1}{2} [1 + (-1)^{m+n}] \dots \dots (6)$$

なお、これらの成分と通常のはりの断面力との関係を挙げれば、次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11}^{(0)} &= N : \text{軸力} \\ \tau_{33}^{(0)} &= Q : \text{せん断力} \\ \tau_{31}^{(1)} &= M : \text{曲げモーメント} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

上記以外の断面力 ( $\tau_{ij}^{(n)}$ ) は、古典理論や Timoshenko 理論では現われない。

次にはりの運動方程式と境界条件式を Hamilton の原理を用いて導くことにする。すなわち Fig. 1 に示すように外向き方向の法線ベクトル  $n$  をもつ表面  $s$  で囲まれた領域  $V$  において、次式が成立する。

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V (T - U) dV + \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \int_s t_j \delta u_j ds + \int_V f_j \delta u_j dV \right] = 0 \dots \dots \dots (8)$$

上式中の  $T, U$  は単位体積当たりの運動エネルギーおよびひずみエネルギーで、次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j, \quad U = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \dots \dots \dots (9)$$

ここに、 $\rho$  は密度であり、ドット ( $\dot{\cdot}$ ) は時間  $t$  に関する偏微分を表わす。また、 $t_j$  および  $f_j$  は単位表面積当たりの表面力および単位体積当たりの物体力で、 $t_j$  は応力成分と次式の関係がある。

$$t_j = n_i \tau_{ij} \dots \dots \dots (10)$$

以下では上述の各式を用いて、奥行き方向に対して、平面問題(奥行き  $1, x_1, x_3$  面内での領域を  $D$  とし、この  $D$  を囲む周囲を  $s$  とする。すなわち  $V=1 \times D$ ,

S=1×s) としてはり問題の定式化を行う<sup>(11)</sup>。

• ひずみエネルギー：

$$\delta \int_V U dV = \int_b \tau_{1j} \delta \varepsilon_{1j} dD$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_{-l}^l \{ -\tau_{1j,1}^{(n)} + n \tau_{3j}^{(n-1)} \} \delta u_j^{(n)} dx_1 + [\tau_{1j}^{(n)} \delta u_j^{(n)}]_{-l}^l \right] \dots \dots \dots (11)$$

• 表面力および物体力：

$$\int_s t_j \delta u_j ds + \int_V f_j \delta u_j dV$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-l}^l [x_3^n \tau_{3j}]_{-b}^b \delta u_j^{(n)} dx_1 + \int_{-b}^b [x_3^n \tau_{1j}]_{-l}^l \delta u_j^{(n)} dx_3 \right.$$

$$+ \left. \int_{-l}^l \int_{-b}^b x_3^n f_j \delta u_j dx_3 dx_1 \right.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-l}^l (F_j^{(n)} + f_j^{(n)}) \delta u_j^{(n)} dx_1 + \check{F}_j^{(n)} \delta u_j^{(n)} \right\} \dots \dots (12)$$

ここに、

$$F_j^{(n)} = [x_3^n \tau_{3j}]_{-b}^b, \quad f_j^{(n)} = \int_{-b}^b x_3^n f_j dx_3, \left. \right\} \dots \dots \dots (13)$$

$$\check{F}_j^{(n)} = \int_{-b}^b [x_3^n \tau_{1j}]_{-l}^l dx_3.$$

• 運動エネルギー：

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V T dV = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-l}^l \int_{-b}^b \rho \dot{u}_j \delta \dot{u}_j dx_3 dx_1$$

$$= - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-l}^l \rho^{(m,n)} \dot{u}_j^{(m)} \delta u_j^{(n)} dx_1 \dots \dots \dots (14)$$

ここに、

$$\rho^{(m,n)} = \int_{-b}^b \rho x_3^{m+n} dx_3 \dots \dots \dots (15)$$

式 (11), (12), (14) を式 (8) に代入してまとめると、奥行き方向に平面問題とした1次元化はり理論に関するHamiltonの原理は次式のようになる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \int_{-l}^l \{ \tau_{1j,1}^{(n)} - n \tau_{3j}^{(n-1)} + F_j^{(n)} + f_j^{(n)} \right.$$

$$- \left. \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{(m,n)} \dot{u}_j^{(m)} \} \delta u_j^{(n)} dx_1 + [\check{F}_j^{(n)} - [\tau_{1j}^{(n)}]_{-l}^l \delta u_j^{(n)} \right]$$

$$\dots \dots \dots (16)$$

上式より、はり運動方程式および境界条件式が以下のように与えられる。

$$\tau_{1j,1}^{(n)} - n \tau_{3j}^{(n-1)} + F_j^{(n)} + f_j^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{(m,n)} \dot{u}_j^{(m)} \dots \dots \dots (17)$$

$$\check{F}_j^{(n)} = \tau_{1j}^{(n)} \quad \text{or} \quad \bar{u}_j^{(n)} = u_j^{(n)} \quad \text{at} \quad x_1 = \pm l \dots \dots \dots (18)$$

なお、ここで  $\bar{u}_j^{(n)}$  は境界で規定されるべき変位  $\bar{u}_j$  と次の関係をもつ変位係数である。

$$\bar{u}_j = \sum_{n=0}^{\infty} x_3^n \bar{u}_j^{(n)} \dots \dots \dots (19)$$

注1) この仮定は必ずしも必要ではなく、たとえば式 (17)~(21) に得られた基礎式における  $B_{mn}$  [式 (6) 参照] を

$$B_{mn} = \int_{-b}^b \int_{x_2} x_3^{m+n} dx_2 \cdot dx_3$$

のように  $(m+n)$  次の断面モーメントと考えれば、奥行き方向に任意に変化するような円、楕円、I型、箱型等の任意の断面形の問題にもそのまま適用できる。

さて、式 (17) に式 (5) を代入すると、変位係数で示したはりの運動方程式が、次式のように求められる。

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_{mn} [C_{1j,1} u_{i,1}^{(m)} + (m+1) C_{1j,3} u_{i,1}^{(m+1)}]$$

$$- n \sum_{m=0}^{\infty} B_{m,n-1} [C_{3j,1} u_{i,1}^{(m)} + (m+1) C_{3j,3} u_{i,1}^{(m+1)}]$$

$$+ F_j^{(n)} + f_j^{(n)} = \rho \sum_{m=0}^{\infty} B_{mn} \ddot{u}_j^{(m)} \dots \dots \dots (20)$$

上式は等質で最も一般的な異方性はりに対しても成立するものであるが、特別な場合として等方性のはりの運動方程式は次のようになる。

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_{mn} \{ (\lambda + 2G) \cdot u_{i,1}^{(m)} + [(m+1)\lambda - nG] u_{3,1}^{(m+1)} \}$$

$$- 2G \delta_n^0 b^n u_{3,1}^{(0)} - nG \sum_{m=0}^{\infty} B_{m,n-1} (m+1) u_{i,1}^{(m+1)}$$

$$+ F_j^{(n)} + f_j^{(n)} = \rho \sum_{m=0}^{\infty} B_{mn} \ddot{u}_j^{(m)},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_{mn} [G u_{3,1}^{(m)} + [(m+1)G - n\lambda] u_{i,1}^{(m+1)} - 2\lambda \delta_n^0 b^n u_{i,1}^{(0)}]$$

$$- n(\lambda + 2G) \sum_{m=0}^{\infty} B_{m,n-1} (m+1) u_{3,1}^{(m+1)} + F_3^{(n)} + f_3^{(n)}$$

$$= \rho \sum_{m=0}^{\infty} B_{mn} \ddot{u}_3^{(m)} \dots \dots \dots (21)$$

ここに、 $\lambda, G$  は Lamé の定数で弾性係数  $E$ , ポアソン比  $\nu$  により、次式で与えられる。

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \dots \dots \dots (22)$$

また、 $\delta_n^0$  は次のような記号である。

$$\delta_n^0 = \frac{1}{2} [1 - (-1)^n] \dots \dots \dots (23)$$

なお、等方性の場合で、奥行き方向に関し、平面応力問題として取り扱う際には、式 (21) 中の  $\lambda$  を次の  $\lambda^*$  で置き換えてやればよい。

$$\lambda^* = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \dots \dots \dots (24)$$

さらに、等質なはりでは、はりの伸縮挙動と曲げ挙動とは、互いに連成せず、支配方程式は独立な2群の連立常微分方程式を形成するが、その具体式を書き出すことは省略する。

### 3. 一般化高次はり理論の特殊化と他のいくつかのはり理論との関係

ここでは、前節に示した一般化高次はり理論において、低次のいくつかの項を採用した場合の支配方程式を示し、それを特殊化することによって、他のいくつかのはり理論の式が得られることおよび、従来提案されている代表的なはり理論と本理論との関係について検討する。なお、以下でははり等は等方性で、荷重ははり上面に鉛直下向に  $p=p(x, t)$  のみが載荷されるものとし、物体力は無視する。

まず、変位係数として、 $u_1^{(0)} \sim u_1^{(3)}, u_3^{(0)} \sim u_3^{(2)}$  の7個を

採用した場合<sup>42)</sup>について、支配方程式の具体形を示せば以下ようになる（紙面の都合上、伸縮挙動の式は省略）。

曲げ挙動：

$$\begin{aligned}
 & 2bG(u_{3,11}^{(0)} + u_{1,1}^{(1)}) + \frac{2}{3}b^3G(u_{3,11}^{(2)} + 3u_{1,1}^{(3)}) + p \\
 & = 2b\rho\ddot{u}_3^{(0)} + \frac{2}{3}b^3\rho\ddot{u}_3^{(2)}, \\
 & \frac{2}{3}b^3(\lambda + 2G)u_{1,11}^{(1)} + (2\lambda - G)u_{3,11}^{(2)} - 2bG u_{3,11}^{(0)} - 2bG u_1^{(1)} \\
 & + \frac{2}{5}b^5(\lambda + 2G)u_{1,11}^{(3)} - 2b^3G u_1^{(3)} = \frac{2}{3}b^3\rho\ddot{u}_1^{(1)} + \frac{2}{5}b^5\rho\ddot{u}_3^{(3)}, \\
 & \frac{2}{3}b^3G u_{3,11}^{(0)} + (G - 2\lambda)u_{1,11}^{(1)} - \frac{8}{3}b^3(\lambda + 2G)u_3^{(2)} + b^2p \\
 & + \frac{2}{5}b^5G u_{3,11}^{(2)} + (3G - 2\lambda)u_{1,11}^{(3)} = \frac{2}{3}b^3\rho\ddot{u}_3^{(0)} + \frac{2}{5}b^5\rho\ddot{u}_3^{(2)}, \\
 & \frac{2}{5}b^5(\lambda + 2G)u_{1,11}^{(1)} + (2\lambda - 3G)u_{3,11}^{(2)} - 2b^3G u_{3,11}^{(0)} - 2b^2G u_1^{(1)} \\
 & + \frac{2}{7}b^7(\lambda + 2G)u_{1,11}^{(3)} - \frac{18}{5}b^5G u_1^{(3)} = \frac{2}{5}b^5\rho\ddot{u}_1^{(1)} + \frac{2}{7}b^7\rho\ddot{u}_3^{(3)}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

また、これらを解くための境界条件式は次の式 (26)～(28) で与えられる。

a) 固定支持端

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{• 曲げ挙動：} u_3^{(0)} = u_3^{(2)} = u_1^{(1)} = u_1^{(3)} = 0, \\
 & \text{• 伸縮挙動：} u_1^{(0)} = u_1^{(2)} = u_3^{(1)} = 0.
 \end{aligned} \right\} \dots(26)$$

b) 単純支持端

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{• 曲げ挙動：} u_3^{(0)} = u_3^{(2)} = 0, \quad \tau_{11}^{(1)} = \tau_{11}^{(3)} = 0, \\
 & \text{• 伸縮挙動：} \tau_{11}^{(0)} = \tau_{11}^{(2)} = \tau_{33}^{(1)} = 0.
 \end{aligned} \right\} \dots(27)$$

c) 自由端

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{• 曲げ挙動：} \tau_{13}^{(0)} = \tau_{13}^{(2)} = 0, \quad \tau_{11}^{(1)} = \tau_{11}^{(3)} = 0, \\
 & \text{• 伸縮挙動：} \tau_{11}^{(0)} = \tau_{11}^{(2)} = \tau_{33}^{(1)} = 0.
 \end{aligned} \right\} \dots(28)$$

ところで、上記の支配方程式において、静的問題に限定し、また伸縮挙動を無視して曲げ挙動のみに着目、すなわち、 $p$ を静荷重とし、時間  $t$ での微分項をすべて削除し、変位係数として  $u_1^{(1)}, u_1^{(3)}, u_3^{(0)}, u_3^{(2)}$ の4項のみを採用すると、これらは Gupta & Pathak 理論<sup>5)</sup>の支配方程式に完全に一致する。

次に、変位係数として  $u_1^{(1)}, u_3^{(0)}$ のみを採用し、奥行き方向に平面応力問題として定式化を行えば、

$$\left. \begin{aligned}
 & 2bG(u_{3,11}^{(0)} + u_{1,1}^{(1)}) + p = 2b\rho\ddot{u}_3^{(0)}, \\
 & \frac{2}{3}b^3(\lambda^* + 2G)u_{1,11}^{(1)} - 2bG(u_{3,11}^{(0)} + u_{1,1}^{(1)}) = \frac{2}{3}b^3\rho\ddot{u}_1^{(1)}.
 \end{aligned} \right\} \dots(29)$$

となるが、ここで、平面応力問題における構成関係式に  $\tau_{33} = 0$ の仮定、およびせん断補正係数  $\kappa^2$ を導入した式：

$$\tau_{11} = E\epsilon_{11}, \quad \tau_{13} = \kappa^2 G\epsilon_{13}, \dots(30)$$

注2) これらの変位係数を採用した理由は、文献8)の平板理論における P-3 orderの変位場の仮定、ならびに文献6)の平板理論における変位係数に準じたもので、せん断応力が  $x_3$ の2次式にそろえられている。

を用いると、式 (29) 中の  $(\lambda^* + 2G)$ が  $E$ で、 $G$ が  $\kappa^2 G$ でそれぞれ置き換えられた式が得られる。この式をわかりやすくするために、さらに  $2b \equiv A, 2/3 b^3 \equiv I, u_3^{(0)} \equiv w, u_1^{(1)} \equiv \psi$ の表現を用いて書き変えれば、最終的に次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 & \kappa^2 GA(w'' + \psi') + p = \rho A \ddot{w}, \\
 & EI\psi'' - \kappa^2 GA(w' + \psi) = \rho I \ddot{\psi}.
 \end{aligned} \right\} \dots(31)$$

これは、著名な Timoshenko のはり理論<sup>1),2)</sup>の支配方程式である。なお、プライム記号は座標  $x_1$ に関する微分を表わす。

一方、上記の例と同様に変位係数  $u_1^{(1)}, u_3^{(0)}$ を採用した式 (29)において、せん断変形なし ( $u_1^{(1)} = -u_{3,1}^{(0)}$ )の付帯条件をつけることにより  $u_1^{(1)}$ を消去すれば次式が求められる。

$$\frac{2}{3}b^3(\lambda^* + 2G)u_{3,111}^{(0)} - p = -2b\rho\ddot{u}_3^{(0)} + \frac{2}{3}b^3\rho\ddot{u}_{3,11}^{(0)} \dots(32)$$

ここで前の例と同様の一軸応力状態の構成関係式 (30)を用い、 $u_3^{(0)} \equiv w$ と書き変えれば次式を得る。

$$EIw'''' = p - \rho A \ddot{w} + \rho I \ddot{w}'' \dots(33)$$

これは、回転慣性を考慮した Rayleigh の理論式<sup>13)</sup>である。

最後に、変位係数  $u_3^{(0)}, u_1^{(1)} (= -u_{3,1}^{(0)})$ を採用し、回転慣性項を無視 ( $\rho I \ddot{u}_1^{(1)} = 0$ )すれば、次の古典はり理論の運動方程式が得られる。

$$EIw'''' = p - \rho A \ddot{w} \dots(34)$$

#### 4. 各種のせん断変形を考慮したはり理論の概要

ここでは、応力仮定型の平板曲げの理論をはりの問題に適用したいいくつかの理論の導出を試みる。まず、各種理論の系統的な把握ができることから Baluch & Voyiadjis 理論<sup>7)</sup>に著者らの改良を加えた修正 Baluch & Voyiadjis 理論<sup>8)</sup>のはりへの適用について述べる。なお、ここでの座標系および荷重は、通常の平板やはり理論のそれに準じて Fig. 2 のようにとるものとする(すなわち、 $x_1 = x, x_3 = z, \tau_{11} = \sigma_x, \tau_{33} = \sigma_z, \tau_{13} = \tau_{xz}, u_1 = u_x, u_3 = u_z$ , etc.)。

まず、はりのせん断応力を、せん断力  $Q$ を用いて、

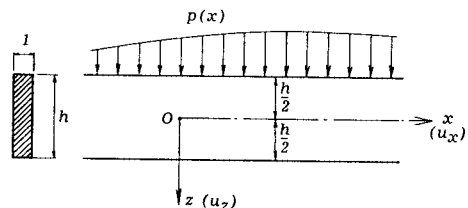


Fig. 2 Coordinates of beam and the upper surface load.

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2A} Q \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (35)$$

と仮定し、鉛直方向の力のつり合いと、はりの上下表面での境界条件より、高さ方向の直応力：

$$\sigma_z = -\frac{p}{4} \left[ 2 - 3 \left( \frac{2z}{h} \right) + \left( \frac{2z}{h} \right)^3 \right] \dots \dots \dots (36)$$

を得る。ここで軸方向直応力  $\sigma_x$  は軸力  $N$  および曲げモーメント  $M$  を用いて次式で表わされるものとする。

$$\sigma_x = \frac{M}{I} z + \frac{N}{A} \dots \dots \dots (37)$$

これらの  $\sigma_z, \sigma_x$  を用いて、奥行き方向の直応力  $\sigma_y = 0$  の平面応力状態を仮定して定式化を行えば、幾何学的関係式および構成関係式より、高さ方向の直ひずみに関する次式を得る。

$$\varepsilon_z = u_{z,z} = \frac{1}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{EA} N - \frac{\nu z}{EI} M \dots \dots \dots (38)$$

これより、鉛直方向変位  $u_z$  が次のように求まる。

$$u_z = w - \frac{\nu}{EA} N z - \frac{\nu}{2EI} M z^2 - \frac{p}{4E} \left[ 2z - \left( \frac{3z^2}{h^3} \right) + \left( \frac{4z^4}{h^3} \right) \right] \dots \dots \dots (39)^{(4,3)}$$

一方、前に仮定した  $\tau_{xz}$  を用いると、せん断ひずみに関する次式が得られる。

$$\gamma_{xz} = u_{z,x} + u_{x,z} = \frac{3Q}{2GA} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (40)$$

これに式 (39) を代入し、積分を実行すれば、軸方向変位  $u_x$  が、

$$u_x = u - z w_{,x} + \frac{z}{2GA} \left[ 3 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] Q + \frac{\nu z^2}{2EA} N_{,x} + \frac{\nu z^3}{6EI} M_{,x} + \frac{p_{,x}}{4E} \left[ z^2 - \left( \frac{z^3}{h} \right) + \left( \frac{2z^5}{5h^3} \right) \right] \dots \dots (41)^{(4,3)}$$

のように求まる。これから幾何学的関係式  $\varepsilon_x = u_{x,x}$  を用いて、軸方向直ひずみ  $\varepsilon_x$  を求め、構成関係式 ( $\sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_z$ ) より  $\sigma_x$  を求めれば次のようになる。

$$\sigma_x = E \left[ u_{,x} - z w_{,xx} + \frac{z}{2GA} \left\{ 3 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right\} Q_{,x} + \frac{\nu z^2}{2EA} N_{,xx} + \frac{\nu z^3}{6EI} M_{,xxx} + \frac{p_{,xxx}}{4E} \left\{ z^2 - \left( \frac{z^3}{h} \right) + \left( \frac{2z^5}{5h^3} \right) \right\} \right] - \frac{\nu p}{4} \left[ 2 - 3 \left( \frac{2z}{h} \right) + \left( \frac{2z}{h} \right)^3 \right] \dots \dots \dots (42)$$

以上のように求められた  $\sigma_x$  および  $\tau_{xz}$  を用いて、

$$(N, M, Q) = \int_A (\sigma_x, \sigma_{xz}, \tau_{xz}) dA \dots \dots \dots (43)$$

より断面力を求め、運動方程式を断面積分して得られる断面力の運動方程式に前記の変位成分とともに代入すれば、はりの運動方程式が最終的に次式のように求まる。

曲げ挙動：

$$Q_{,x} + p = \rho A \dot{w} - \frac{\nu \rho}{2E} \ddot{M} + \frac{9\rho h^2}{160E} \ddot{p},$$

$$-EI w_{,xxx} + \frac{Eh^2}{10G} Q_{,xx} - Q + \frac{\nu h^2}{40} M_{,xxx} + \frac{13h^4}{4480} p_{,xxx}$$

$$+ \frac{\nu h^2}{10} p_{,x} = -\rho I \dot{w}_{,x} + \frac{\rho h^2}{10G} \ddot{Q} + \frac{\nu \rho h^2}{40} \ddot{M}_{,x} + \frac{13\rho h^4}{4480E} \ddot{p}_{,x}$$

$$M = -EI w_{,xx} + \frac{Eh^2}{10G} Q_{,x} + \frac{\nu h^2}{40} M_{,xx}$$

$$+ \frac{13h^4}{4480} p_{,xx} + \frac{\nu h^2}{10} p \dots \dots \dots (44)$$

伸縮挙動：

$$EA u_{,xx} + \frac{\nu h^2}{24} N_{,xxx} + \frac{\nu h^3}{48} p_{,xxx} - \frac{\nu h}{2} p_{,x}$$

$$= \rho A \ddot{u} + \frac{\nu \rho h^2}{24E} \ddot{N}_{,x} + \frac{\rho h^3}{48E} \ddot{p}_{,x}$$

$$N = EA u_{,x} + \frac{\nu h^2}{24} N_{,xx} + \frac{\nu h^3}{48} p_{,xx} - \frac{\nu h}{2} p \dots \dots \dots (45)$$

また、その他の理論は次のようにして得られる。

まず、ここに示した式の誘導過程において、式 (38) の右辺の第1項を無視、すなわち  $\varepsilon_z$  としては軸力と曲げモーメントによる効果のみを取り上げ、直応力  $\sigma_z$  による  $\varepsilon_z$  への効果は無視し、それ以降の定式化を行えば Rehfield & Murthy の理論<sup>3)</sup> が得られる。一方、軸力  $N$  の効果は無視すれば Baluch & Voyiadjis 理論<sup>7)</sup> をはりへ適用したものになり、さらに  $\varepsilon_z$  の効果は無視したものは Ambartsumyan 理論<sup>9)</sup> をはりに適用した理論に、またさらに  $\sigma_z$  の影響をも無視すれば、Schmidt の平板理論<sup>10)</sup> の線形化をはかりはりに適用したものとなる。なお、これらの理論の動的な支配方程式および変位、応力の式を他の代表的なはり理論である Timoshenko 理論<sup>11, 2)</sup>、Levinson 理論<sup>11)</sup> とともに、比較表にまとめたものが付録Aに与えられている。

### 5. 計算例

ここでは、静的な2つの基本的なはりの問題（等分布荷重を満載した単純はりおよび先端部に集中荷重を受ける片持ちばり）ならびに動的な問題（単純支持ばりの固有振動スペクトルおよび無限長のはりの分散関係）を取り上げ、前節で略述した各種はり理論による計算結果の比較を行うことにする。まず最初に静的な問題に対して得られた解のうち、変位  $u_x, u_z$  および応力  $\sigma_x$  についての結果を古典理論による解ならびに2次元弾性論による解<sup>14)</sup>（以下弾性解と呼ぶ）<sup>(4,4)</sup> とともに表および図に整理

注3)  $w, u$  はおのおの、中立軸位置における軸直方向（高さ方向）および軸方向の変位である。したがって前節の変位係数とは  $u^0 = u, u^1 = w$  の関係がある。

注4) たとえば (A) の場合には、はりの両端面で断面力に対し  $M=N=0, Q=qL/2$  という条件を設定したものであり、(B) の場合には先端部で断面力に対し  $M=N=0, Q=Q_0$  を、固定端部においては  $x=L, z=0$  の一点において  $u_x, u_z = u_{x,z} = 0$  の条件を満たすようにしてべき級数解を求めたものを弾性解と呼ぶことにする。

して比較することによって、各理論の相互関係について考察する。なお、ここでは次の各理論に対し ( ) 内に示す略号を用いる。Timoshenko 理論 (T-理論), Levinson 理論 (L-理論), Schmidt 理論 (S-理論), Ambartsumyan 理論 (A-理論), Baluch & Voyiadjis 理論 (B.V-理論), 修正 Baluch & Voyiadjis 理論 (Ref. B.V-理論), Rehfield & Murthy 理論 (R.M-理論), 一般化高次理論 (G.H.-理論), Gupta & Pathak 理論 (G.P.-理論)。

(A) 上表面に等分布荷重  $q$  を満載した単純ばり

$x = \pm L/2$  で単純支持された長さ  $L$  のはりに等分布荷重  $q$  が載った問題に対する解として変位成分  $u_z, u_x$  および曲げ応力  $\sigma_x$  が 2 次元弾性解<sup>(4)</sup>については次式で与えられる ( $\kappa^2, \alpha, \beta, \gamma$  の値は Table 1 に与えられている)。

$$\begin{aligned}
 u_z &= \frac{5qL^4}{384EI} \left\{ 1 + \frac{8}{5\kappa^2}(1+\alpha\nu)\left(\frac{h}{L}\right)^2 \right\} + \frac{q}{2EI} \left\{ \frac{x^4}{12} - \frac{L^2x^2}{8} \right. \\
 &\quad - \frac{h^2x^2}{6\kappa^2}(1+\alpha\nu) - \left( \frac{h^3z}{12} - \frac{h^2z^2}{8} + \frac{z^4}{12} \right) \\
 &\quad \left. - \nu \left[ \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right) \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{6} - \frac{h^2z^2}{20} \right] \right\}, \\
 u_x &= \frac{q}{2EI} \left\{ \left( \frac{L^2x}{4} - \frac{x^3}{3} \right) z + (1+\beta\nu)x \left( \frac{2z^3}{3} - \frac{h^2z}{10} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \beta\nu \frac{2h^2}{5} z + \frac{\nu h^3}{12} x \right\}, \\
 \sigma_x &= \frac{q}{8I} (L^2 - 4x^2) z + \frac{q}{60I} (1+\gamma\nu)(20z^3 - 3h^2z).
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

その他の理論の解は上式中の下線項を Table 1 に示すように適宜、削除した結果によって求められる。この結果から、次のようなことがいえる。

- ① 古典理論と T-理論による結果においては、鉛直変位  $u_z$  に関して、後者にせん断変形によるたわみ分が考慮されている以外は、変位  $u_x$  応力  $\sigma_x$  とも同一である。
- ② T-理論での、 $u_z$  におけるせん断補正係数  $\kappa^2$  を  $5/6$  とおけば、L-理論でのそれに一致する<sup>(1)</sup>。

Table 1  $u_x, u_z$  and  $\sigma_x$  given by eq. (46) due to the various theories for simply-supported beam under uniform load  $q_0$ .

Theory	Adopting terms	$\kappa^2$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
2D Elast. theory	all terms	5/6	5/8	1/2	0.0
Ref. B.V- & B.V-theories	neglect ①	-	-	-	-
R.M-theory	neglect ① & ②	-	-	-	-
A-theory	neglect ①~③	-	-	1.0	1/2
L- & S-theories	neglect ①~④	-	1/2	-	1.0
T-theory	neglect ①~⑤	not fixed	1.0	-	-
Classical theory	neglect ①~⑥	-	-	-	-

③ L-理論での  $u_z$  および応力  $\sigma_x$  の式におけるポアソン比  $\nu$  を  $\nu/2$  で置き換えれば、A-理論での  $u_z$  および  $\sigma_x$  にそれぞれ一致する。

④ Ref. B.V-理論および R.M-理論による解は、変位  $u_x$  と応力  $\sigma_x$  に関しては弾性解と一致するが、変位  $u_z$  において、はりの高さ方向の変化を表わす項に若干の差異を生ずる。これは Ref. B.V-理論において、初期値  $\sigma_x$  として仮定したものが弾性解の  $\sigma_x$  と異なっているため、および R.M-理論においてはさらに  $\sigma_z$  による直ひずみ分を無視しているために生ずるものである。

⑤ L-理論と S-理論との結果は、たわみ  $w$ , 変位  $u_x$ , 応力  $\sigma_x$  とも全く同一となる。

これらは荷重が等分布であるために生ずるものであり、他の一般的な荷重状態のもとでは付録 A の一般式にみられるように差異が生じる。

(B) 先端に集中荷重  $Q_0$  を受ける片持ちばり

$x=0$  に集中荷重  $Q_0$  を載荷し、 $x=L$  を固定支持されたはりの問題に対する解として  $u_z, u_x$  および  $\sigma_x$  が 2 次元弾性解, Ref. B.V-理論, B.V-理論, R.M-理論に対して全く同一であって次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 u_z &= \frac{Q_0}{6EI} \left\{ (x^3 - 3L^2x + 2L^3) + \frac{Eh}{2\kappa^2G} (L-x) + 3\nu x z^2 \right\}, \\
 u_x &= -\frac{Q_0}{2EI} \left\{ (x^2 - L^2) z - \frac{E}{3G} z^3 + \frac{\nu}{3} z^3 \right\}, \\
 \sigma_x &= \frac{Q_0}{I} x z.
 \end{aligned} \right\} \tag{47}$$

その他の理論は上式中の項を Table 2 に示すように特殊化すれば求められる。この結果より次のようなことがいえる。

- ① 曲げ応力  $\sigma_x$  に対しては、古典理論から弾性解まですべて同一の結果が得られる。
- ② L-理論, S-理論, A-理論の 3 者は、変位  $u_z$  ( $\epsilon_x \equiv 0$  より、たわみ  $w$  に等しい),  $u_x$  および応力  $\sigma_x$  のすべてに関して同一の解を与える。
- ③ Ref. B.V-理論および R.M-理論による解は、変位  $u_z, u_x$ , 応力  $\sigma_x$  とも、弾性解に一致している。
- ④ 古典理論と T-理論とでは、たわみ  $w$  に対する解において T-理論にせん断変形の効果が入り多少異なる

Table 2  $u_x, u_z$  and  $\sigma_x$  given by eq. (47) due to the various theories for cantilever beam under concentrated load  $Q_0$  at free edge.

Theory	Adopting terms	$\kappa^2$
2D Elast., Ref. B.V- & B.V- & R.M-theories	all terms	2/3
A-, L- & S-theories	neglect ①	-
T-theory	-	not fixed
Classical theory	neglect ① & ②	-

ほかは  $u_x, \sigma_x$  とも全く同じ結果となる。

⑤ T-理論での  $w$  におけるせん断補正係数  $\kappa^2$  を  $2/3$  とおいた場合が L-, S-, A-理論でのたわみと一致する。

以上の結果, ここで比較の対象とした解が, 2次元弾性論による解, すなわち例題 (A), (B) とともに Ref. B, V-理論のレベルでカバーできる次数の解であったために, この解は (B) では完全に弾性解に一致し, (A) においてもかなりよい近似解が得られた。また式の上での定性的な比較において, その他の理論における解も, 考慮する力学量に伴い, 順次両者の解に近づいてゆく傾向を示した。ただし, この弾性解は脚注4) に述べたように端面での特殊な境界条件のもとでのみ, 厳密解になり得るものであることを考慮しておく必要がある。

以上では各種理論の解のもつ定性的な比較結果を要約したが, ここでは上述の2つの例題のうち (A) についての数値例を示したのが Fig. 3, 4 である。なお, ここでは厳密なはりの挙動を知る一つの試みとして Pagano<sup>12)</sup> が, 2対辺を単純支持された一方向の無限平板の円筒曲げの問題を解いた厳密解法<sup>13)</sup>を平面応力状態のはりに適用して得た解析結果と各種はり理論によるものとの比較を行う。なお, ここに示す数値例におけるはりの諸元は, 各理論間の差異がある程度顕著になるように  $h/L$  の十分大きい場合, すなわち  $h/L=0.75$ , ポアソン比  $\nu=0.3$  のものであり, G. H. -理論 (5 order) と Pagano 理論<sup>12)</sup> では等分布荷重を Fourier 級数に展開 (101項採用) して計算<sup>8)</sup>し, その他の理論では式 (46) および Table 1 に示した結果に基づいて数値計算を実施したものである。

まず, Fig. 3 ははり中央断面位置 ( $x=0$ ) における鉛直方向変位  $u_z$  の高さ方向の分布を示している。この問題では荷重の上下非対称性からもわかるとおり, 実際のはりの鉛直方向変位は上で大きく, 下で小さい非対称分布となるが, この傾向を表わし得るのは次の4種の理論であり, そのうち G. H. -理論は Pagano 理論と同一線で表わされ, これらより多少大きめの値を示す B. V-理論は2次元弾性解にほぼ等しい値を与える。

一方, 他のはり理論による値は, はりの曲げ挙動のみしか考慮していないため, 上下対称な分布を与え, 高さ方向に直線変化の直ひずみの存在を考慮した R. M-理論および G. P-理論が  $z=0$  の中心軸に関し対称な2次放物線分布の変位を示す以外は, いずれも高さ方向に一定値の変化を与える。このうち, A-理論での値は前述のより正確な4種の理論の値を平均化した値を示し L-

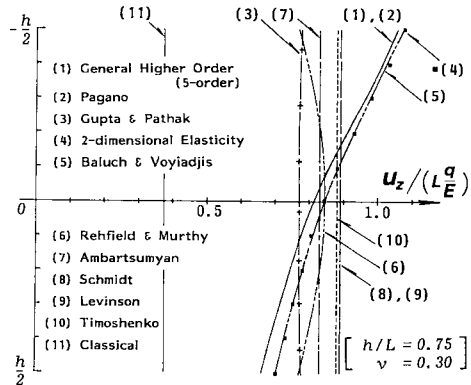


Fig. 3 Displacement  $u_z$  along the vertical  $z$ -axis at the central cross-section for the case of simply supported beam under the uniform load  $q$ .

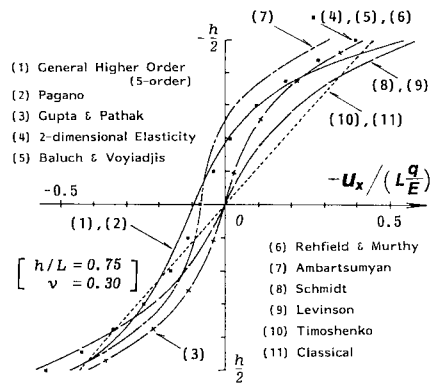


Fig. 4 Displacement  $u_x$  along the vertical  $z$ -axis at the supported portion for the same case as Fig. 3.

理論と T-理論とはこれらより平均的に大きめの値を与える。G. P-理論はこれらより小さめのほぼ直線に近い分布を示す。また, 古典理論はこれらの値の約半分以下の値を与えるにすぎない。なお, R. M-理論は, 定性的に B. V-理論での鉛直変位における高さ方向直応力に起因する直ひずみ分を高次微分項として無視したものと性格づけができるが, この無視がここではかなりの精度低下を招く要因となっている。

Fig. 4 ははり端部 ( $x=L/2$ ) における軸方向変位  $u_x$  の高さ方向分布を示している。まず, G. H. -理論の値は Pagano 理論での値と同じ曲線上にあり, はりの軸方向伸縮挙動を考慮した結果として上下非逆対称な分布を示し, またその最大変位ははりの上縁の載荷面位置で生じている。これらは前述の高さ方向変位に関する考察と同様平面応力状態とみなせる場合の実際のはりの挙動を表わしていると思われる。このほかの非逆対称な分布を示す理論では B. V-理論, R. M-理論は Table 1 からわかるとおり 2次元弾性解と全く同様な値を示して

注5) 脚注4) に示した2次元弾性解の巨視的な力学的境界条件 ( $M=N=0$ ) とは異なり, 支持端面  $x=\pm L/2$  においてすべての  $z$  の値に対して  $\sigma_x=0$  の条件が完全に満たされるように構成した解析理論である。

り、また A-理論は独自の変位分布を示している。これらの理論の最大変位は下縁の非載荷面位置で生じているが、これは前述の G. H. -理論ならびに Pagano 理論と大きく異なる点である。

以上の 6 種の理論以外は、いずれも上下逆対称な変位分布を示し、そのうち G. P-理論および L-理論が 3 次分布を示す一方、T-理論は古典理論と全く等しく、直線分布となる。また、これらの理論では上下縁で値が等しく向きが逆の最大変位を生じている。

なお、以上述べた各種理論間の差異は、はりの形状比  $h/L$  の値の減少に伴って急激に小さくなってゆき古典理論とほぼ同等の値を示すようになる。

(C) 単純ばりの自由振動と無限長ばりの分散解析<sup>(注6)</sup>

次に動的な問題の計算例として、単純ばりの自由振動と、無限長ばり内を伝播する波動の分散関係を解析した結果について述べる。

まず、単純ばりの自由振動解における無次元化固有振動数は

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{\lambda^2}{\varphi^2} = \frac{\omega^2}{\left(\frac{\pi}{h}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\right)^2 \varphi^2} = \frac{1}{2K_0} \left\{ \frac{K_1}{\varphi^2} + K_2 \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left(\frac{K_1}{\varphi^2} + K_2\right)^2 - 4K_0^2} \right\}, \dots\dots(48)$$

$$K_0 = \frac{E}{x^2 G} + \frac{3\nu}{10}, \quad K_1 = \frac{12}{\pi^2}, \quad K_2 = 1 + \frac{E}{x^2 G} - a\nu + \frac{3\nu}{10}. \\ \dots\dots\dots(49)$$

で与えられる。ここに  $\omega$  ははりの曲げ振動の固有円振動数であり、 $\varphi (=nh/L)$  はモードパラメーターで  $n$  は振動次数を表す。各種ばり理論の結果は上式を Table 3 のように特殊化したもので与えられる。

他方、Rayleigh および古典の両理論での結果は以下の式で示され、 $c_0=1$  としたものが Rayleigh 理論<sup>(3)</sup> であり  $c_0=0$  としたものが古典理論となる。

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{\varphi^2}{K_1 + c_0 \varphi^2} \dots\dots\dots(50)$$

次に無限長ばり内を伝播する SV 波の分散解析における無次元化位相速度パラメーターは式 (49) の表示を用

Table 3 Expressions of phase velocity and eigenfrequency given by eqs. (48), (50) and (51) due to the various beam theories.

Theory	Adopting terms	$\kappa^2$	$\alpha$
Ref. B. V-theory	all terms	5/6	1/2
B. V-, R. M- & A-theories	neglect ①	*	1/5
L- & S- theories	neglect ① & ②	*	—
T- theory	*	not fixed	—

注6) 解析過程の詳細は著者らの論文<sup>(8)</sup>で奥行方向の座標  $y$  に関する項を適切に省略することにより求められるので、ここでは述べない。

いれば、次式で与えられる。

$$\bar{C}^2 = \frac{C_\varphi^2}{C_b^2} = \frac{\omega^2}{\left(\frac{\pi}{h}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\right)^2 \bar{k}^2} = \frac{\Omega^2}{\bar{k}^2} = \frac{1}{2K_0} \left\{ \frac{K_1}{\bar{k}^2} + K_2 \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left(\frac{K_1}{\bar{k}^2} + K_2\right)^2 - 4K_0^2} \right\} \dots\dots(51)$$

ここに、 $\omega, k, C_\varphi$  はそれぞれ波動の固有円振動数、波数および位相速度であり、 $C_b (= \sqrt{E/\rho})$  は無限長ばり内を伝播する伸縮波の位相速度、 $\bar{k} (=kh/\pi)$  は無次元化波数パラメーターである。なお式中の  $\Omega (= \bar{C}\bar{k})$  は無次元化固有振動パラメーターと呼ばれるものである。

他方、Rayleigh 理論と古典理論での値は

$$\bar{C}^2 = \frac{\bar{k}^2}{K_1 + c_0 \bar{k}^2} \dots\dots\dots(52)$$

で与えられ、これらの式で  $C_0=1$  とすれば Rayleigh 理論、 $C_0=0$  とすれば古典理論での式となる。

最後に伸縮モードに関しては B. V-理論から古典理論まですべて同じで、 $\bar{C} = C_b = \sqrt{E/\rho}$  となる。

以上より、自由振動におけるモードパラメーター  $\varphi$  に対するはりの固有振動数パラメーター  $\lambda$  の関係と分散関係における波数パラメーター  $\bar{k}$  に対する波動の固有振動数パラメーター  $\Omega$  の関係とは等価であることを考慮して、ここでは両者の問題における無次元化固有振動数スペクトル  $\Omega$  と  $\lambda$  を単一の図として Fig. 5 に示し、同様に分散関係の無次元化位相速度スペクトル  $\bar{C}$  と別表示の単純ばりの固有振動数スペクトル  $\bar{\lambda}$  とを単一の図として Fig. 6 に示した。なお、いうまでもなくこのような等価性は単純ばりの自由振動の場合のみにみられる

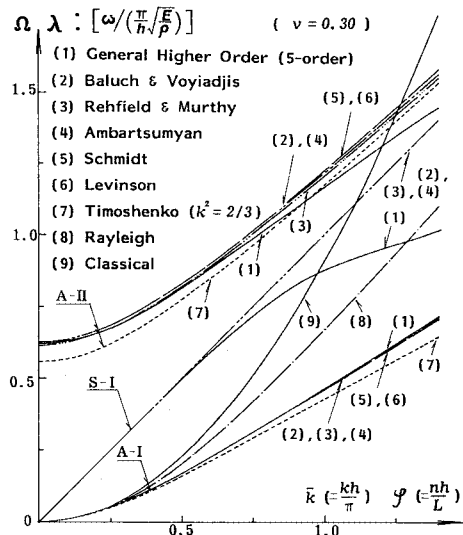


Fig. 5 Phase velocity spectrum  $\Omega$  (Eigenfrequency spectrum  $\lambda$ ) versus  $\bar{k}$  ( $\varphi$ ) of an isotropic infinite beam (simply supported beam) with  $\nu=0.3$ .



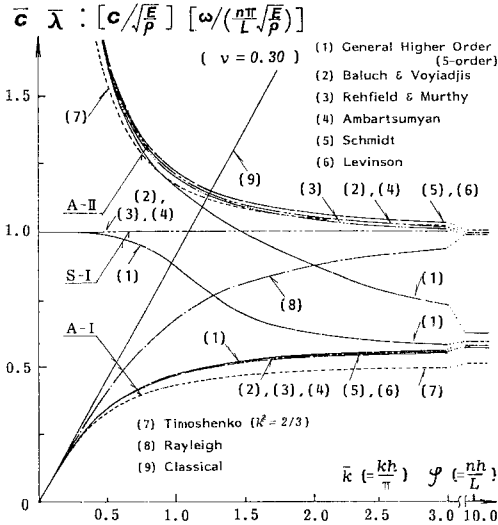


Fig. 6 Phase velocity spectrum  $\bar{C}$  (Eigenfrequency spectrum  $\bar{\omega}$ ) versus  $\bar{k}$  ( $\bar{\phi}$ ) of an isotropic infinite beam (simply supported beam) with  $\nu=0.3$ .

著しい特徴であって、他の支持条件のもとではこのような等価性は存在しない。

まず、Fig. 5 より次のようなことが読み取れる。逆対称板厚モードの1次のもの (A-I) においては古典理論と Rayleigh 理論による値が  $\bar{k}$  (あるいは  $\bar{\phi}$ 、以下同じ) の増大とともに急激に大きな値を示し精度が低下してゆくが、ここに示したその他の理論における差異は小さく G. H. -理論 (5-order) を上限値、T-理論の値を下限値として互いに近接した値を示す。なお、T-理論の値は、 $\kappa^2=2/3$  を用いた場合であり、 $\kappa^2=5/6$  と置いた場合は L-, S- の各理論による値に完全に一致する。逆対称板厚モードの2次のもの (A-II) については、 $\bar{k}$  の小さい値の領域では T-理論の値が他とわずかに離れて小さめの値を示すが、 $\bar{k}=0.5$  あたりから G. H. -理論による値の増加率が徐々に低下しはじめ  $\bar{k}=1.0$  以降では T-理論の値を下回り最小の値を示しつつ他から離れてゆく。一方、その他の理論による値には大差はなく、ほぼ同等の値を示す。

Fig. 6 はこれら各理論における動特性をより大きな波数パラメーター  $\bar{k}$  (あるいは  $\bar{\phi}$ 、以下同じ) について検

討することを目的として分散関係における位相速度パラメーター  $\bar{C}$ 、ならびに単純ばりの固有振動数パラメーター  $\bar{\lambda}$  を  $\bar{k}=0\sim 3.0, 10.0$  について示したものである。この図によって前述の各理論の動特性を別の角度から検証でき、 $\bar{k}$  の大きな値の領域において、①古典理論による (A-I) の値が直線的に増加し続け、②他の一連の理論による値は、(S-I) に関してあらゆる領域で一定値をとり、③ (A-I), (A-II) での値は、 $\bar{k}\approx 3.0$  程度で各収束値にかなり近い値に達し、その後の変化はごく小さいのに対し、④ G. H. -理論による値は  $\bar{k}$  の増大とともに他の理論に比べ明瞭な変化を示し、各板厚モードの値が互いに近い値に収束してゆくことがわかる。

### 6. むすび

本論文においては、はりにおける変位場を、はりの高さ方向の座標に関するべき級数で展開し、動弾性学における変分原理を用い、はりの高次近似理論式の誘導を行った。この理論は、等方性はりはもとより、一般の異方性材料よりなる矩形のみならず任意の断面形のはりの静的、動的な問題に適用が可能であり、また任意の次数まで考慮したはり理論の支配式となっている。また、この理論で低次の変位係数のいくつかを採用し、構成関係式を特殊化する、などによって従来提案されている各種のはり理論が得られることを示した。

また、本論文においては、従来提案されているせん断変形を考慮した平板曲げの理論をはりに適用した理論を定式化し、それらの各種のはり理論およびここで求めた理論によって静的、動的問題を解析し、それらの計算例を通じて各種のはり理論の相互関係ならびに精度特性について、総合的に検討するとともに、ここで導出した理論の有効性について検討した。

### 付録 A 各種のはり理論の支配方程式、変位および応力

ここでは、各種の動的なはり理論の曲げ挙動に対する基本式として  $w, Q, M$  に関する支配式をマトリックス形式で表示し、次に  $u_x, \sigma_x$  および  $u_z$  の一般形を示す (ここに  $u, w$  は  $z=0$  のはりの中心線上の  $x$  方向および  $z$  方向の変位を表わす)。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & -1 + \frac{Eh^2}{10G} \partial_{xx} - \frac{\rho h^2}{10G} \partial_{tt} & \frac{\nu h^2}{40} \partial_{xxx} - \frac{\nu \rho h^2}{40E} \partial_x \partial_{tt} \\ -\rho A \partial_{tt} + \frac{7}{40E} \rho^2 I \partial_{ttt} & \partial_x & \frac{\nu}{2E} \rho \partial_{tt} \\ -EI \partial_{xxx} - \frac{\nu}{5} \rho I \partial_{tt} + \frac{11h^2}{1120} \rho I \partial_{xx} \partial_{tt} & \frac{Eh^2}{10G} \partial_x & -1 + \frac{\nu h^2}{40} \partial_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ Q \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ -1 + \frac{9\rho h^2}{160E} \partial_{tt} \\ \frac{13h^4}{4480} \partial_{xxx} - \frac{\nu h^2}{10} \partial_{xx} \end{bmatrix} p \quad (A-1)$$

$$a_{11} = -EI\partial_{xxx} + \underbrace{\left(1 - \frac{\nu}{5}\right)\rho I\partial_x\partial_{tt}}_{\textcircled{7}} + \frac{11h^2}{1120}\rho I\partial_{xxx}\partial_{tt} - \frac{11h^2}{1120}\rho^2 I\partial_x\partial_{ttt}, \quad a_{14} = \frac{13h^4}{4480}\partial_{xxx} - \frac{13\rho h^2}{4480}\partial_x\partial_{tt} - \frac{\nu h^2}{10}\partial_x \dots (A \cdot 2)$$

$$u_x = u - z w_{,x} + \frac{z}{2GA} \left[ 3 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \right] Q + \frac{\nu z^2}{2EA} N_{,x} + \frac{\nu z^3}{6EI} M_{,x} + \frac{p_{,x}}{4E} \left[ z^2 - \frac{z^3}{h} + \frac{2z^5}{5h^3} \right] + \frac{h}{4E} \left[ \frac{z^3}{3h} - \frac{2z^5}{5h^3} \right] \rho \dot{w}_{,x} \dots (A \cdot 3)$$

$$\sigma_x = E \left\{ u_{,x} - z w_{,xx} + \frac{z}{2GA} \left[ 3 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \right] Q_{,x} \right\} - \frac{\nu p}{4} \left[ 2 - 3\left(\frac{2z}{h}\right) + \left(\frac{2z}{h}\right)^3 \right] - \frac{\nu h}{4} \left\{ \left(\frac{2z}{h}\right) - \left(\frac{2z}{h}\right)^3 \right\} \rho \dot{w}$$

$$+ \frac{\nu z^2}{2A} N_{,xx} + \frac{\nu z^3}{6I} M_{,xxx} + \frac{p_{,xx}}{4} \left[ z^2 - \frac{z^3}{h} + \frac{2z^5}{5h^3} \right] + \frac{h}{4} \left[ \frac{z^3}{3h} - \frac{2z^5}{5h^3} \right] \rho \dot{w}_{,xx} \dots (A \cdot 4)$$

$$u_z = w - \frac{p}{4E} \left[ 2z - \left(\frac{3z^2}{h}\right) + \left(\frac{2z^4}{h^3}\right) \right] - \frac{\nu z^2}{2EI} M - \frac{\nu z}{EA} N - \frac{h}{4E} \left[ \frac{z^2}{h} - \frac{2z^4}{h^3} \right] \rho \dot{w}_{,z} \dots (A \cdot 5)$$

なお、上式において下線部の項を Table A・1 に示したように削除すれば、それぞれの理論式に帰着する。ただし、T-理論は式(A・4)の下線項⑥の代わりに  $zQ/\kappa^2 GA$  の1次関数で置き換えたものとする必要がある。

Table A・1 Matrix form of governing equation and  $u_x, \sigma_x$  given by eqs. (A・1)~(A・4) due to the various beam theories.

Theory	Adopting terms	$\kappa^2$
Ref. B. V-theory	all terms	5/6
B. V-theory	neglect ① & ②	✓
R. M-theory	neglect ① ③	✓
A-theory	neglect ① ③ ④	✓
L- & S-theories	neglect ①~⑤	✓
T-theory	✓	not fixed
Rayleigh theory	neglect ①~⑥	—
Classical theory	neglect ①~⑦	—

次に、動的なはり理論の軸方向の伸縮挙動に対する支配式は次のマトリックス形で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \rho A \partial_{tt} & -\partial_x + \frac{\nu \rho I}{2EA} \partial_x \partial_{tt} \\ EA \partial_x & -1 + \frac{\nu h^2}{24} \partial_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\rho I}{4E} \partial_x \partial_{tt} \\ \frac{\nu}{2} A - \frac{\nu}{4} I \partial_{xx} \end{bmatrix} p \dots (A \cdot 6)$$

上式は Ref. B. V-理論の支配式であるが、その他の7種の理論は上式の下線項①を削除したもので与えられる。

なお、一般化高次理論の支配式その他は本文の第2節で与えられている。

参考文献

1) Timoshenko, S. P.: On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars, Phil. Mag., Vol. 41, pp. 744~746, 1921.

2) Timoshenko, S. P.: On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section, Phil. Mag., Vol. 43, pp. 125~131, 1922.

3) Rehfield, L. W. and Murthy, P. L. N.: Toward a new engineering theory of bending-Fundamentals, AIAA J., Vol. 20, pp. 693~699, 1982.

4) 西野文雄・椿 龍哉:せん断変形を考慮したはりの理論, 土木学会第31回年次講演会概要集第I部, p. 51, 1976.

5) Gupta, A. P. and Pathak, N.: Effect of secondary terms on bending of beams, Indian J. Pure Appl. Math., Vol. 9, pp. 358~370, 1978.

6) Lo, K. H., Christensen, R. M. and Wu, E. M.: A high order theory of plate deformation, J. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 663~676, 1977.

7) Voyiadjis, G. Z. and Baluch, M. N.: Refined theory for flexural motion of isotropic elastic plates, J. Sound. Vib., Vol. 76, pp. 57~64, 1981.

8) 平島健一・根岸嘉和: 板厚方向の成分を考慮した代表的な二次元平板理論の精度に関する考察, 土木学会論文報告集, No. 330, pp. 1~14, 1983; 数種の平板理論の動特性(自由振動と分散特性)に関する研究, 土木学会論文報告集, No. 333, pp. 21~34, 1983.

9) Ambartsumyan, S. A. (神谷沢): 異方弾性板の理論, 森北出版, pp. 19~41, 1975.

10) Schmidt, R.: A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation, J. Indust. Math. Soc., Vol. 27, pp. 23~38, 1977.

11) Levinson, M.: A new rectangular beam theory, J. Sound Vib., Vol. 74, pp. 81~87, 1981; Further results of a new beam theory, J. Sound Vib., Vol. 77, pp. 440~444, 1981.

12) Pagano, N. J.: Exact solution for rectangular bidirectional composite and sandwich plates, J. Comp. Mat., Vol. 4, pp. 20~34, 1970.

13) Rayleigh, L.: The Theory of Sound, Dover, 1960.

14) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N.: Theory of Elasticity, McGraw-Hill, pp. 41~50, 1970.