【土木学会論文集 第350号／I-2 1984年10月】

研究展望

積分方程式法(境界要素法)の発展

DEVELOPMENTS IN INTEGRAL EQUATION METHODS
(BOUNDARY ELEMENT METHODS)

小 林 昭 一*
By Shoichi KOBAYASHI

1. はじめに

われわれは，物理や工学上の問題を解析する際には，まず対象を適切な数学モデルで表現し，それを解く．その場合に大きく分けて2つのモデル化が考えられる．1つは対象とした場とか系の支配微分方程式を導き，それに適切な初期境界条件を課した数学モデルを設定するものである．もう1つは，積分方程式によって対象をモデル化するものである．

微分方程式にしろ積分方程式にしろ，数学モデルを解析的に解くことは，一般には困難である．いきおい，数値解析的な手法によらざるを得ない．前者の数値解法としては，有限要素法とか差分法が用いられる．これらの手法では，対象とした領域を有限個の点とか要素に分割するので，しばしば領域法とも呼ばれている．

一方，積分方程式モデルを数値的に解く方法は“積分方程式法”(Integral Equation Method)と呼ばれている．特に，境界上の積分だけを含むように定式化された場合には，“境界積分方程式法”(Boundary Integral Equation Method, BIEM)とも呼ばれる．積分方程式法では，積分の評価，特に境界積分を高精度で評価することが必要である．そのためには，境界を有限個の要素に分割して区分的に評価する．最近では，アイソパラメトリック要素を用いて有限要素法のスキームを適用するのが普通である．この技法にちなんで，積分方程式法は，しばしば“境界要素法”(Boundary Element Method, BEM)とも呼ばれている．昨今では，むしろ境界要素法という呼び名の方が親しまれているかもしれない．

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科
(〒606 京都市左京区吉田本町)

積分方程式法は，対象とした境界形状が複雑であるとか領域が無限遠まで広がる場合などには有効である．また，この方法では，未知量は境界上だけにあるので，領域法に比べて未知数が激減するうえ，通常最も知りたい境界上の値が直接に精度よく求められるという利点もある．さらに，もし領域内の値が知りたければ，必要な点だけについて，より高精度の解を求めることもできる．しかし，この方法も良いことずくめではない．数値解析の際に積分方程式を離散化して得られる代数方程式の係数行列は一般に密に詰まっており，対称性が損なわれることも多い．また，複雑な非均質場や非線形問題に適用することも難しい．

いずれにしろ，あらゆる対象に最適であるような万能な数学モデルや数値解析手法は見当たらない．どのようなモデルを用いてどのような方法を選択するかは，対象とする問題と必要とされる解析精度，労力，計算時間などを勘案して，個々の解析者自身が決めるべきことである．ただ一ついえることは，適した道具を用いれば，良い仕事ができるということである．弘法こそ筆を選ぶ(筆の選び方は最も基本的な能力である！)．

本稿は，まず積分方程式法とはどういうものかを概説し，次いで土木工学分野を対象として，その方法の適用性ならびに適用上の留意事項を検討し，最後に将来の発展方向を展望したものである．もとより，広範な土木全般にわたる分野をくまなく見渡して，公正かつ的確に評価することは著者のとうてい及ぶところではない．本稿は，いささかの偏見と独断をもって書かれていることをおゆるし願いたい．

なお，積分方程式法の一般的な解説とか展望としては，文献1)～4) などを，テキストないし専門書としては，

文献5)～18)を，会議のプロシーディングとしては，文献19)～24)などを参照されたい．

2. 積分方程式法の発展—スケッチ

積分方程式法の歴史は古く，そのルーツはおそらく19世紀前半にまで遡ることができる．その頃までには，ポテンシャルという概念がすでに形成されており，1928年には，G. GreenがいわゆるGreen公式を導き，ポテンシャル関数の性質を論じている[25]．そこでは，調和関数の領域内の値は，境界上での法線微分係数の値を密度とする一重層ポテンシャルで表わされることが示されているという．

弾性学に関連しては，1872年にBettiが相反定理を示し[26]，1885，1886年にはSomiglianaが，領域内の変位は，境界上の変位を密度とする二重層ポテンシャルから境界上の表面力を密度とする一重層ポテンシャルを差し引いた差で表わされることを示した[27]．これが，弾性学の積分方程式への定式化の出発点となる，いわゆるSomiglianaの式である．これは，Green式の弾性学版といえる．同じ頃（1883年），Kirchhoffは，波動伝播に関して，遅延ポテンシャルを用いた表現式（波動伝播に関するGreen式）を得ている[28]．これは，Huygensの原理を数学的に表わしたものと解されている[29]．

以上の表現は，いずれも境界上の値（密度）が与えられた際に，領域内の任意点の値を求める一般式となっている．これらの式は，境界上の値が未知であっても成立するので，次節で示すように，領域内の点を境界上に移行した極限を考えれば，境界上の未知量で表わした境界積分方程式が導かれることとなる．

実際に弾性学に関する積分方程式論を最初に展開したのはFredholmである（1906年頃）[30]．その後，20世紀の初頭には，弾性学の境界値問題の解の存在に関連して，積分方程式の研究がいくつかみられる．同じ頃，ポテンシャル論に関しても詳しい研究が行われていた[31]．その後，特異ポテンシャル論とその応用研究は，1940年代まで，主としてソ連のTbilisi学派によって推進され，幾多の記念すべき成果が得られている．Muskhelishviliは，平面弾性問題をCauchy核を用いた積分方程式に定式化し[32]，Mikhlinは，多次元特異積分方程式論を展開した[33]．また，Kupradzeは，動弾性学のポテンシャル・アプローチによる積分方程式を詳細に論究した[5]．

1960年代になると，電子計算機が急速に発達して大容量の計算が可能となり，数値解析法も飛躍的に発展した．特に，有限要素法の開発は，その後の数値解析に大変革をもたらした．

1960年代の始め頃までは，積分方程式は，区分的に平面(直線)で近似した多面体(多角形)境界に関して，選点法により境界代表点上の密度を未知量とする連立一次方程式に離散化されて解かれていた．Jaswon (1963)[34]，Symm (1963)[35]，Hess (1962)[36]などによって主としてポテンシャル問題が，またFriedman & Show (1963)[37]，Banaugh & Goldsmith (1963)[38),39]などによって音響波とか弾性波の散乱問題が手掛けられた．われわれもやや遅れて，動弾性問題を含めていくつかの弾性問題を解析した[40]．これらの解法は，いずれも密度を介してポテンシャル論によって定式化されており，いわゆる間接法（Indirect Method）といわれる手法に分類される．

これに対して，1967年にRizzoはSomigliana式を出発点として，境界上の変位および表面力を未知量とする積分方程式を導いて，弾性学の問題を解いた[41]．これが，直接的に物理量を未知量として定式化する，いわゆる直接法(Direct Method)の始まりといわれている．その後，彼の一派のCruseやShippyらによって，1970年代に静弾性学，熱弾性学，動弾性学のいくつかの問題が解かれた[42)～45]．これらの成果は，積分方程式の有効性を工学者に強く印象付けたようであり，以後この線に沿った数値解析法が急速に発展した．特に，英国のSouthampton大学のBrebbiaを中心とする研究グループの寄与は大きい．

積分方程式法は，原理的には線形の場にしか適用できないが，領域をも分割して領域積分をも行うことにすると，弾塑性問題とかクリープ問題など，増分形が線形で表わされるような非線形問題にも拡張して適用することが可能である．1970年代に入って，いくつかの定式化が提案され，非線形問題への適用性が検討されるようになった．また，移動境界とか自由境界問題などへの適用も試みられた．

さらに，過渡的な問題に対しても，Laplace変換とか高速Fourier変換などを用いた解析も試みられ，同時に固有値問題への適用も検討されるようになった．

最近の数年間における積分方程式法の発展は目覚しく，種々の初期値・境界値問題や移動境界とか非線形問題への拡張が活発に試みられ，同時に有限要素法のスキームの適用が普遍化して解析精度も一段と向上してきた．一方，有限要素法などと結合したハイブリッドな技法も開発されて，より複雑なモデルの解析も行われるようになった．これらに関しては，最近出版された専門書(8)～18)および国際会議のプロシーディング(19)～24)などをみられたい．

積分方程式法の分野では，毎年国際会議が開催されており，昨年は広島で第5回の会議が成功裡に終了した．参考のために，プロシーディング[23]による分類と論文件数を示すと次のようである．

数学・基礎理論	4	ポテンシャル問題	3

電磁場問題	3	熱伝導問題	1
ポテンシャル波動問題	4	流体問題	7
静弾性問題	11	応力集中・破壊力学	4
板とシェル	4	非弾性問題	5
地盤力学問題	5	振動・動弾性・波動	10
最適化問題	3	カップリング問題	8
その他の応用	6	数値解析技法	4

合計で85件である．これをみると最近の動向がおおよそ推測されよう．

3. 積分方程式法

(1) 積分方程式への定式化

線形な微分方程式を積分方程式に定式化する手法は種種考えられている[7),9),46)]．以下には，最も代表的である，Green公式を用いたものを示そう．

領域 D とその境界 ∂D に対して，微分方程式を用いて適正に表現された次の問題を考える．

$$\boldsymbol{Lu}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{x}\in D \cdots\cdots (1)$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x}\in\partial D_1 \cdots\cdots (2)$$

$$\boldsymbol{Tu}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})=\overline{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x}\in\partial D_2, \cdots\cdots (3)$$

$$\partial D_1\cup\partial D_2=\partial D$$

ここに，$\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{T}$ は，線形な微分演算子とし，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ はベクトル（点 $\boldsymbol{x}$ の関数），$\overline{\boldsymbol{u}}$，$\overline{\boldsymbol{t}}$ は境界上で与えられた量とする．なお，簡単のために，以下では，$\boldsymbol{L}$ は2階の演算子としよう．

$\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{T}$ の随伴を $\boldsymbol{L}^*$，$\boldsymbol{T}^*$ と書くことにすると，よく知られているように，Greenの第2公式は，任意のベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ に対して，次のように表わされる[47)]．

$$\int_D(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{Lu}-\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})dV$$

$$=\int_{\partial D}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{Tu}-\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})ds \cdots\cdots (4)$$

ここに，$\boldsymbol{T}$ はGaussの発散定理を用いることにより $\boldsymbol{L}$ から導かれる境界上の演算子であり，式(3)に現われたものである．

さて，ここで次式で定義される基本解（fundamental solution）$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を導入する．

$$\boldsymbol{LU}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{1}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \cdots\cdots (5)$$

ここに，$\boldsymbol{1}$ は単位テンソルを表わし，$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ はDiracのデルタ関数を表わす．成分 $U_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は，具体的には，無限領域内の任意点 $\boldsymbol{y}$ に $\boldsymbol{e}_k$ 方向に作用する単位の大きさの刺激（たとえば力）によって，任意点 $\boldsymbol{x}$ に生じる応答（たとえば変位）の $\boldsymbol{e}_i$ 方向成分を表わしている．なお，$\boldsymbol{U}$ は，無限領域のGreen関数とも呼ばれる．

このように定義された $\boldsymbol{U}$ を式(4)の $\boldsymbol{v}$ の代わりに用い，デルタ関数の性質

$$\int_D\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})dV(\boldsymbol{y})$$

$$=\begin{cases}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}\in D\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x}\in D_c\ (D\text{の補領域})\end{cases} \cdots\cdots (6)$$

を考慮すると，以下の式が導かれる．

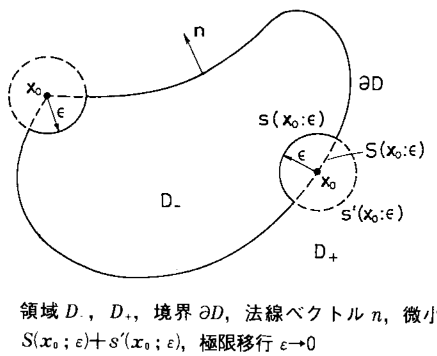
(1) ∂D の内部領域（図—1参照）に対して：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=&\int_{\partial D}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{T}_y\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})\\ &-\int_{\partial D}\boldsymbol{T}_y^*\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})\\ &+\int_{D_-}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})dV(\boldsymbol{y}),\quad \boldsymbol{x}\in D_-\\ \boldsymbol{0}=&\text{上式右辺}\qquad \boldsymbol{x}\in D_+\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (7)$$

ここに，添字 $\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{y}$ に関して演算するという意味で付した．

式 $(7)_1$ は，ポテンシャル問題（後述4.(2)，a)参照）ではGreen式として，また，弾性学（後述4.(2)，c)参照）ではSomigliana式としてよく知られているものである（ただし，普通には第3項の領域積分がないものをいう）．この式は，境界上の $\boldsymbol{Tu}=\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{u}$ および領域内の $\boldsymbol{f}$（線形問題では最初から与えられている）が与えられれば，領域内の任意点 $\boldsymbol{x}\in D_-$ の $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ が定まることを示している．ただし，境界上の $\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{u}$ は任意に取り得るものではなく，式 $(7)_2$ という関数式を満たさなければならない．また，一般には，与えられた境界条件（式(2)および(3)）に共役な値，すなわち，∂D_1 上の $\boldsymbol{t}$ と ∂D_2 上の $\boldsymbol{u}$ は未定であるので，この段階ではまだ式 $(7)_1$ を適用することはできない．式 $(7)_1$ を利用するためには，これらの値を何らかの方法で定めることが必要である．それには，$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\in\partial D$ とした極限を取ると ∂D_1 上の未知量 $\boldsymbol{t}$ と ∂D_2 上の未知量 $\boldsymbol{u}$ に関する積分方程式が導かれることを利用すればよい．積分方程式の解として，境界条件に共役なこれらの値が定められる．

極限移行の操作は，直接的に行ってもよいが，たとえば図—1に示すように，境界 ∂D 上に $\boldsymbol{x}_0\in\partial D$ を取り，その点を中心として描いた半径 ε の微小球 $B(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon)$ を追加した境界 $\partial D-S(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon)+s'(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon)$ に対して，式 $(7)_1$ を適用した後，$\varepsilon\to 0$ とした極限を考えても同じことである．あるいは，これは，$\partial D-S(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon)+s(\boldsymbol{x}_0$



図—1 領域 D_-，D_+，境界 ∂D，法線ベクトル n，微小球面 $S(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon)+s'(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon)$，極限移行 $\varepsilon\to 0$

$;\varepsilon$）に対して，式（7）$_2$を適用し，$\varepsilon\to 0$としても全く同じである．いずれにしろ，このような極限操作を行うと，次式が得られる．

$$\begin{aligned}C^e\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)=&\int_{\partial D}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})\\&-⨍_{\partial D}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})\\&+\int_{D_-}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})dV(\boldsymbol{y})\cdots\cdots(8)\end{aligned}$$

ここに，

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\equiv\boldsymbol{T}_y^*\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\cdots\cdots(9)$$

$$C^e\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S(x_0;\varepsilon)}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})\cdots\cdots(10)$$

である．後者は，境界が$\boldsymbol{x}_0$近傍でなめらかであれば，$C^e\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{1}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)/2$となる．また，$⨍(\ )ds$は，Cauchyの主値積分，すなわち

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D-S(x_0;\varepsilon)}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})\cdots\cdots(11)$$

を意味している．

一般に，式（8）の第3項の領域積分に現われる$\boldsymbol{f}$は既知であるので，式（8）は，境界上の$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{t}$に関する積分方程式を表わしている．その特別な場合として，$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$ in D_-で，∂D_1部分がない場合には，$\boldsymbol{t}$に関するFredholm型第1種積分方程式となり，∂D_2部分がない場合には，$\boldsymbol{u}$に関するFredholm型第2種積分方程式となる．第2種積分方程式の解の存在と一意性は，Fredholmの交代定理[48]により示されるが，他の積分方程式に関する条件は十分には知られていないようである．

（2）∂Dの外部領域に対しても，内部領域に対するものと同様な式が導かれる．境界上の法線方向に注意すると，次式を得る．

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=&⨍_{\partial D}\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{T}_y^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})\\&-\int_{\partial D}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{T}_y\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})\\&+\int_{D_+}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})dV(\boldsymbol{y})\quad \boldsymbol{x}\in D_+\\\boldsymbol{0}=&\text{上式右辺}\qquad\qquad \boldsymbol{x}\in D_-\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(12)$$

（上式で右辺の境界積分の符号が式（7）と異なるのは，法線方向が領域内へ向くことによる）．

極限操作$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\in\partial D$を行うと，次の積分方程式を得る．

$$\begin{aligned}-C^i\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)=&⨍_{\partial D}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})\\&-\int_{\partial D}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})\\&+\int_{D_+}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})dV(\boldsymbol{y})\cdots\cdots(13)\end{aligned}$$

ここに，$C^i\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$は式（10）と同様にして，$s'(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon)$上の積分の極限として与えられ，$\boldsymbol{x}_0$近傍でなめらかであれば，$C^i\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)=-\boldsymbol{1}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)/2$である．

なお，式（13）で表現される外部問題に一意解が存在するためには，無限遠境界上の積分値がゼロとなること，すなわち無限遠からの寄与がないことが必要である．その条件は放射条件（radiation condition）と呼ばれる[49]．

上のようにして得られた積分方程式（8），（13）は，直接的に未知量$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{t}$に関して導いたものである．この定式化による解法を直接法（direct method）という．

なお，今までは$\boldsymbol{L}$を線形2階の演算子としてきたが，この制約をはずしても，上述と同様にして積分方程式を導くことができるのはいうまでもない．

（2）**動弾性問題の例**

以上の定式化をはっきりさせるために，具体的な例として動弾性問題を考えよう．動弾性を支配する微分方程式，境界条件および初期条件は次のように与えられる[49),50)]．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}+\rho\boldsymbol{b}\equiv&\mathring{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{u}+\rho\boldsymbol{b}-\rho\ddot{\boldsymbol{u}}\\&=\mu\Delta\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\rho\boldsymbol{b}-\rho\ddot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}\cdots(14)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)\quad(\boldsymbol{x},t)\in\partial D_1\times\boldsymbol{T}^+\,(\equiv[0,\infty))\\&\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n}\cdot\sigma\\&\quad=\boldsymbol{n}\cdot\{\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\mu(\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\nabla)\}\\&\quad=\bar{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x},t)\quad(\boldsymbol{x},t)\in\partial D_2\times T^+\end{aligned}\right\}\cdots(15)$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}),\\&\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})\quad\boldsymbol{x}\in D\cdots\cdots(16)\end{aligned}$$

ここに，$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}$は，それぞれ応力テンソル，変位ベクトル，物体力ベクトルおよび境界∂D上の外向き単位法線ベクトルであり，ρ，λ，μは，それぞれ密度，Lamé定数を，∇は勾配を，$(\dot{\ })$は時間微分を表わす．なお，$\bar{\boldsymbol{u}}$，$\bar{\boldsymbol{t}}$，$\boldsymbol{u}_0$，$\boldsymbol{v}_0$は与えられた量である．

式（14）～（16）を式（8）に代入すると内部問題に対する積分方程式が得られる．

$$\begin{aligned}C^e\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0,t)=&\int_{\partial D}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y},t;\boldsymbol{x}_0,0)*\boldsymbol{t}(\boldsymbol{y},t)ds(\boldsymbol{y})\\&-⨍_{\partial D}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{y},t;\boldsymbol{x}_0,0)*\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},t)ds(\boldsymbol{y})\\&+\int_{D_-}\rho\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y},t;\boldsymbol{x}_0,0)*\boldsymbol{b}(\boldsymbol{y},t)dV(\boldsymbol{y})\\&+\int_{D_-}\rho\{\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{y})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y},t;\boldsymbol{x}_0,0)\\&+\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{y})\dot{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{y},t;\boldsymbol{x}_0,0)\}dV(\boldsymbol{y})\cdots\cdots(17)\end{aligned}$$

ここに，$\phi*\psi$は合成積分

$$[\phi*\psi](\boldsymbol{x},t)=\int_0^t\phi(\boldsymbol{x},t-\tau)\psi(\boldsymbol{x},\tau)d\tau$$

$$(\boldsymbol{x},t)\in D\times T^+\cdots\cdots(18)$$

を意味し，基本解$U_{ik}(\boldsymbol{y},t;\boldsymbol{x}_0,0)$は，$t=0$で点$\boldsymbol{x}_0$に$\boldsymbol{e}_k$-方向に作用する単位力によって，$t$で点$\boldsymbol{y}$に生じる$\boldsymbol{e}_i$-方向の変位成分を意味している．基本解の具体的な形は，たとえば文献49），50）をみられたい．

なお，動弾性問題のように，時間変数を含む問題は，Laplace 変換とか Fourier 変換などによって解かれることも多い[44),45),51),52)]. たとえば，Fourier 変換

$$(\hat{\ })=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\ )e^{i\omega t}dt \quad \cdots\cdots(19)$$

を用いて，式 (14)，(15) を変換すると，像空間では次のように表わされる.

$$\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)\equiv(\mathring{\boldsymbol{L}}+\rho\omega^2\boldsymbol{1})\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)+\rho\hat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x},\omega)=\boldsymbol{0} \quad \cdots\cdots(20)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)=\hat{\bar{\boldsymbol{u}}}(\boldsymbol{x},\omega) & \boldsymbol{x}\in\partial D_1\\ \boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)=\hat{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x},\omega)=\hat{\bar{\boldsymbol{t}}}(\boldsymbol{x},\omega) & \\ & \boldsymbol{x}\in\partial D_2\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(21)$$

これに対応する積分方程式は，式 (8) あるいは式 (13) の形に容易に求められる.

なお，参考のために基本解を示せば次のようである.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\,;\,\omega)=\dfrac{1}{4\pi\mu}\Big[\dfrac{e^{ik_T r}}{r}\boldsymbol{1}\\ \qquad +\dfrac{1}{k_T^2}\nabla\nabla\Big\{\dfrac{e^{ik_T r}}{r}\Big\}-\dfrac{e^{ik_L r}}{r}\Big] \text{(3 次元)}\\ \hat{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\,;\,\omega)=\dfrac{i}{4\mu}\Big[H_0^{(1)}(k_T r)\\ \qquad +\dfrac{1}{k_T^2}\nabla\nabla\{H_0^{(1)}(k_T r)-H_0^{(1)}(k_L r)\}\Big]\\ \qquad \text{(2 次元：平面ひずみ)}\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(22)$$

ここに，$r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$，$k_L=\omega/C_L=2\pi/l_L$，$k_T=\omega/C_T=2\pi/l_T$，$C_L=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$，$C_T=\sqrt{\mu/\rho}$ であり，k_L，k_T はそれぞれ縦波および横波の波数，C_L，C_T は縦波，横波の伝播速度，l_L，l_T は縦波，横波の波長である. また，$H_0^{(1)}(\ )$ は，第 1 種 0 次の Hankel 関数である. なお，これらの基本解は放射条件 (14)[5),51)]（この場合は無限遠から波は帰って来ないこと）を満たしている.

動弾性問題の解は，Fourier 逆変換により求められる.

以上の表現で $\omega\to 0$ とすると静弾性の場合のものとなる（ただし，2 次元の場合には，$\{(\lambda+\mu)/(4\pi\mu(\lambda+2\mu))\}\ln k_T$ という特異性が残る）. 静弾性の基本解は，次のように与えられる.

$$\left.\begin{array}{l}\mathring{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\dfrac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\\ \qquad \Big[\dfrac{\lambda+3\mu}{r}\boldsymbol{1}+\dfrac{\lambda+\mu}{r}(\nabla r)(\nabla r)\Big] \text{(3 次元)}\\ \mathring{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\dfrac{1}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}\\ \qquad \Big[(\lambda+3\mu)\ln\dfrac{1}{r}+(\lambda+\mu)(\nabla r)(\nabla r)\Big]\\ \qquad \text{(2 次元：平面ひずみ)}\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(23)$$

これらは，Kelvin 解として知られている.

(3) 非線形問題の定式化

非線形問題は，場が非線形な場合と境界条件などが非線形な場合に分けられる.

場が線形であって，境界条件が非線形とか移動境界のような場合には，非線形な境界積分を処理するとか，非線形な境界条件を連立して解くこととなる. このような場合には，境界条件を満足するように逐次的に境界を修正しながら反復計算をしなければならない. この種の解析では，境界を一部修正したり，追加すればよいので，境界積分方程式法が有利に適用できる.

場が非線形な場合でも，非線形性があまり強くなければ，積分方程式に定式化することができる. いま，支配微分方程式の主要部を表わす線形演算子を $\boldsymbol{M}$，残りの非線形部分の演算子を $\boldsymbol{N}$ として，式 (1) に代わって，場が

$$\boldsymbol{Mu}+\boldsymbol{Nu}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0} \quad \cdots\cdots(24)$$

と表わされ，境界条件は式 (2)，(3) で与えられるものとしよう. このような問題では，非線形項 $\boldsymbol{Nu}$ を $\boldsymbol{f}$ と同様にみなして取り扱い，反復計算によって解を得ることができる. 一般に $\boldsymbol{f}$ は既知であるので，いま初期値を $\boldsymbol{u}^0$ として計算を開始すると，n 回反復時には

$$\boldsymbol{Mu}^{(n)}=-\boldsymbol{f}-\boldsymbol{Nu}^{(n-1)} \quad \cdots\cdots(25)$$

となるので，これを式 (8) あるいは式 (13) に代入すると，n 回反復時の積分方程式が導かれる. このとき領域積分は反復回数ごとに行う必要があるが，境界積分を次節で述べるように離散化した際に得られる連立一次方程式の係数行列は一定であるので，反復計算はそれほど困難ではない.

なお，上の問題の特別な場合は，$\boldsymbol{N}$ が線形の演算子の場合である. この場合には反復計算の必要はない. たとえば，Fourier 変換の像空間での動弾性の微分方程式，式 (20) において，$\mathring{\boldsymbol{L}}\leftrightarrow\boldsymbol{M}$，$\rho\omega^2\boldsymbol{1}\leftrightarrow\boldsymbol{N}$ と考えれば，

$$\mathring{\boldsymbol{L}}\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)+\rho\omega^2\boldsymbol{1}\,\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)+\rho\hat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x},\omega)=\boldsymbol{0} \quad \cdots\cdots(26)$$

に対する積分方程式は，主要部 $\mathring{\boldsymbol{L}}\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)$ に関するもの，すなわち，静弾性学の積分方程式となり，その領域積分に

$$\int_D\rho\omega^2\,\mathring{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},\omega)dV(\boldsymbol{y}) \quad \cdots\cdots(27)$$

が追加されることとなる. なお，積分方程式に現われる基本解は，もちろん，静弾性のものである. このような定式化を行えば，上述のように，離散化した際の連立方程式の係数行列は変化しないので，領域積分は必要とするけれども，種々の ω の値に対する解を得るには便利かもしれない.

(4) 数 値 解 析

上述のようにして得られた積分方程式は，一般に数値解析的に解かれる. 数値解法としては，重み付き残差法，なかでも選点法が最も普通に用いられている.

境界積分は，境界を有限個の境界要素に分割して区分

的に評価される．各要素上の積分は，Gauss 積分[53]などを用いて数値的に求められる．単純には，境界を一定要素で近似することもあるが，普通には，境界の形状および関数をアイソパラメトリック要素で近似した上で積分を評価する方法が取られている．領域積分についても同様である．なお，領域積分では境界積分ほど高い精度が要求されないことも多いので，一定要素もよく用いられている．

以下に，アイソパラメトリック要素を用いて，選点法により積分方程式を離散化する方法を示す[54]．

アイソパラメトリック要素では，直交デカルト座標系で表わした全体座標 x_i と自然座標系で表わした局所座標 ξ との間に

$$x_i(\xi)=\sum N^\alpha(\xi)x_i^\alpha \cdots\cdots(28)$$

という関係がある．ここに，x_i^α は節点 $\alpha(\alpha=1,2,\cdots)$ の座標，$N^\alpha(\xi)$ は形状関数である．

境界要素の形状を上式（28）で近似し，同じ形状関数を用いて境界上の関数も同様に

$$u_i(\xi)=\sum N^\alpha(\xi)u_i^\alpha,\quad t_i(\xi)=\sum N^\alpha(\xi)t_i^\alpha \cdots\cdots(29)$$

と近似する．$\boldsymbol{f}$ についても同様である．

$$f_i(\xi)=\sum M^\gamma(\xi)f_i^\gamma \cdots\cdots(30)$$

一般に $M^\gamma(\xi)$ は $N^\alpha(\xi)$ とは異なった形状関数である．

さて，境界を n 個の節点より成る m 個の要素に分割し，領域内を q 個の節点より成る p 個の要素に分割して，たとえば，式（8）を選点法（節点を選点とする）により離散化しよう．境界要素 β の節点 α の位置の全体座標系での番号を $k(\beta,\alpha)$，また領域要素 δ の節点 γ の位置の番号を $h(\delta,\gamma)$ と記すと，次のように離散化される．

$$\begin{aligned}
&C_{ij}^e\, u_i(\boldsymbol{x}^a)+\sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n} u_i(\boldsymbol{y}^{k(\alpha,\beta)})\\
&\int_{\partial D_\beta} N^\alpha(\xi)W_{ij}^{(\beta)}(\boldsymbol{x}^\alpha,\boldsymbol{y}(\xi))J_s\,ds(\xi)\\
&=\sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n} t_i(\boldsymbol{y}^{k(\beta,\alpha)})\\
&\int_{\partial D_\beta} N^\alpha(\xi)U_{ij}^{(\beta)}(\boldsymbol{x}^\alpha,\boldsymbol{y}(\xi))J_s\,ds(\xi)\\
&+\sum_{\delta=1}^{p}\sum_{\gamma=1}^{q} f_i(\boldsymbol{y}^{h(\delta,\gamma)})\int_{D_\delta} M^\gamma(\xi)\\
&U_{ij}^{(\delta)}(\boldsymbol{x}^\alpha,\boldsymbol{y}(\xi))J_v\,dV(\xi)\cdots\cdots(31)
\end{aligned}$$

ここに，J_s，J_v は面積，体積要素に関するヤコビアンを表わし，$ds(\boldsymbol{y})=J_s\,ds(\xi)$，$dV(\boldsymbol{y})=J_v\,dV(\xi)$ である．なお，上式においては添字 i に関して総和規約（項，式において２度繰り返し現われる添字に関しては総和を取る．たとえば，$a_{ij}\,b_j\equiv\sum_{j=1}^{3}a_{ij}\,b_j$）を適用していることに注意されたい．

式（31）は，境界の総節点数を l 個とすると，$3\,l$（３次元）あるいは $2\,l$（２次元）の連立一次方程式を表わしている．これに与えられた境界条件，式（２），（３）を入れて解けば，境界上の共役な未知量が求められる．領域内部の値は，たとえば，式（７）$_1$ を上と同様に離散化したものに，得られた境界量を代入することにより容易に求められる．

4. 積分方程式法の適用

（１） 適用上の留意事項

積分方程式法は，適用性が広くかつ融通性に富む方法ではあるけれども，それを有効に適用するためには，以下に述べるような点に留意することも必要であろう．

ａ） 適用性に関すること

積分方程式法は線形場の問題への適用性は高い．特に外部問題に対しては非常に有効である．しかし，内部問題に関しては，有限要素などとの優劣はつけがたい．それは個々の問題によって異なるからである．応力集中などのように境界上の値を高精度で求める際には，一般に積分方程式法が有利である．

非均質場を含む問題は，比較的簡単なものであれば，均質領域ごとに積分方程式をつくり，隣接領域との共通な節点上での結合条件を満たすようにして，非均質領域全体に関する積分方程式を導くことができる．しかし，複雑な問題に対しては，有限要素法などと結合したハイブリッドな解法が有利なことが多い．なお，このような場合にも，領域積分を伴う積分方程式法も検討されてよい．

非線形問題に関しては，境界条件が非線形とか移動境界の場合には，積分方程式法は有利である．また，比較的非線形性の弱い場の問題に対しては，相当有効に利用できる．しかし，適用性は一般的に個々の問題によって異なってくる．

積分方程式法は，動的な問題にも有効である．

ｂ） 数値解析上のこと

（ｉ） 数値積分について：積分は各要素に分割して評価されるので，要素上の積分は，直接に積分方程式法の解の精度を支配する重要な因子である．要素への分割は十分このことを配慮して行う必要がある．値が急激に変化すると予想される場所（たとえば，応力集中度の高い場所）では，要素分割を細かくするのは当然である．また，波動問題などでは，対象とする最も短い波長をも十分表現し得るように要素節点（少なくとも一波長に 4 節点）を選ぶことも必要である．

要素上の積分は，普通 Gauss 積分で評価される．計算時間の相当な部分がこのために費やされるので，できれば何らかの基準を設けて最適化しておくとよいであろう．

特異積分（境界積分で $r\to 0$，i.e. $\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}_0$ となるときの積分）の評価は，できれば特異部分を取り出して別に

高精度で評価することが望ましい．たとえば，２次元問題では基本解 $\boldsymbol{U}$ に $\ln r$ の特異性を含む項があるので，その積分は解析的に行うか，あるいは特異点を座標原点に一致させて対数重み付き Gauss 積分で評価するなどである．なお，$\boldsymbol{W}$ を含む特異積分は，たとえば式（８）に $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{u}=$const. を代入すればわかるように，$\boldsymbol{C}^e$ を含めた形で，

$$\boldsymbol{C}^e+\fint_{\partial D_S}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})=-\int_{\partial D-\partial D_S}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})$$

と与えられる[55]．ここに，∂D_S は特異点を含む要素である．右辺の積分は特異とはならないので（$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}_0$），Gauss 積分により評価される．$\boldsymbol{C}^e$ は，幾何学的形状から定められるので，$\boldsymbol{W}$ の特異積分の値が求まる．また，$\boldsymbol{U}$ を含む特異積分（３次元問題）は，特異点を原点として極座標で表示して Gauss 積分すればよい[55]．

その他，数値計算の際の“けた落ち”についても十分注意する必要がある[51),52]．たとえば，動弾性問題を積分変換を用いて解く際には，$kr\to 0$ で基本解に“けた落ち”のおそれがある（式（22）の｛　｝の部分）ので，数値計算に先立って級数展開などを用いて，不都合な項を消去しておくことが必要である．

なお，解析はすべて数値的に行われるので，Fourier 変換とその逆変換には，高速 Fourier 変換（FFT）を用いると都合がよい[51),56]．数値逆 Laplace 変換に関しては，数ある中で Durbin の方法が最も有効なようである[57]．

（ⅱ）特異性に関すること：いままでの議論では，対象とした領域は暗になめらかな曲面（線）で囲まれていると考えてきた．しかし，異質領域とか境界面上の角，あるいは混合境界の境目などは一般に特異点となる．

特異点を含む積分方程式の解を精度よく求める標準的な方法は，その特異性を考慮することである．すなわち，その特異点を含む要素に，支配微分方程式と境界条件を満たす特異解を用いることである．特異解は，一般に特異点を原点とする極（球）座標に関する固有関数展開となる[58]．

境界上の特異性を考慮するこの方法は，Symm により導入された[7]．Watson は，フラック問題の解析において，特異点を含む要素の特異解を含んだ積分を補助的な経路上の積分に置き換えて評価することを提案した[59]．この考え方は，凸角を有する領域に対して，間接法にも適用された[60]．なお，特異解を用いる代わりに，しばしば特異性のオーダーが同じ（程度）となるような特異要素も用いられている[17]．

実用的な隅角部の処理法としては，角の両側に各一点を独立に取ったようにみなして，角点周辺での独立な条件（たとえば，弾性問題では，応力の対称性とひずみの第一不変量）を追加して解く２重点法（double point method）も提案されている[61),62]．なお，特に領域内の異質領域間の隅角部に関しては，特異点（角点）の両側に少し離した点を節点として，特別な配慮をせずに計算してもよいであろう．

ｃ）その他のこと

今までは，基本解を積分核として用いることを考えてきた．しかし，核としては与えられた境界条件をできるだけ満足するものを用いるようにすると，数値積分を必要とする境界が少なくなり，数値計算上は好都合である．同時に，精度の向上も期待される．たとえば，弾性半無限問題に対しては，Mindlin 解（自由境界条件を満たす解）を用いるとかである．

（２）代表的な問題への適用

土木分野におけるいくつかの代表的な問題への積分方程式法の適用を検討しよう．なお，以下の選択，分類は便宜上行ったものであって，必ずしも統一の取れたものではなく，また，重複している点もあることを了承されたい．

ａ）ポテンシャル問題[7),9),11),18),63),64]

ポテンシャル問題は，次のように与えられる．

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{k}\nabla u)+f=0\quad \text{in } D$$

$$u=\bar{u}\quad \text{on } \partial D_1$$

$$q=\boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial n}=\bar{q}\quad \text{on } \partial D_2$$

$$(q^1-q^2)-h(u-u_l)=0\quad \text{on } \partial D_3$$

ここに，u はポテンシャル，f は熱源，$\boldsymbol{n}$ は ∂D 上の外向き法線，$\bar{u}$，$\bar{q}$ は与えられた境界条件，u_l は周辺の（条件から定まる）値，$\boldsymbol{k}$，h は係数である．なお，上添字１，２は領域１，２を意味する．

このような式で記述されている代表的なものには，定常浸透流，定常熱伝導，弾性棒のねじりなどがある．$\boldsymbol{k}$ が定数であれば，式（８）にならって容易に積分方程式が得られる．$\boldsymbol{k}$ が２階の対称テンソル i.e. $k_{ij}=k_{ji}$ であれば，主方向に座標系を選び，座標軸のスケールを変換すると，容易に等方（k＝一定）の場合と全く同じ形式に表わされる．なお，∂D_3 上の条件の特別な場合には，自由境界条件，i.e. $q^1=q^2(=0)$，$u=u_l$ がある．たとえば，アース・ダム内の自由水面とか，海岸での淡水と海水の境界面などである．このような境界は，3.（３）でも述べたように，初期値を仮定して計算を開始し，$q^1=q^2(=0)$ の条件を十分満足するまで逐次 u の値を修正することにより決定される[17),65]．

$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}(u)$ であれば微分方程式は非線形となるが，Kirchhoff 変換

$$\frac{d\psi}{du}=\boldsymbol{k}(u)$$

を用いると，微分方程式は次のように線形となる[66].

$\nabla^2\psi+f=0$

したがって，これを ψ に関する境界条件のもとで積分方程式に変換して解けばよい．ただし，∂D_3 上の条件は非線形となることに注意されたい．

この種のポテンシャル問題に関する応用例は，文献 7)〜14)，16)〜23)に多数掲載されているので参照されたい．

b） 拡散問題[8),9),17),67),68)]

ポテンシャル問題の支配微分方程式の右辺を $\alpha(\partial u/\partial t)$（$\alpha$：係数）で置き換えれば，拡散の微分方程式が得られる．非定常な浸透流とか熱伝導は，それに支配される．なお，条件としては，上述の境界条件のほかに初期条件 u_0，q_0 が追加される．また，融解とか凍結，水位変動に伴うダム内の自由水面の変動など移動境界条件は，一般的に次のように与えられる．

$$\beta\frac{\partial u}{\partial t}=(q^1-q^2)-h(u-u_l)\quad \text{on } \partial D_3$$

ここに，β,h は係数である．

なお，土-水-氷系では，熱源 f は

$$f=f_0+\gamma_d\lambda\frac{\partial W}{\partial t}=f_0+\gamma_d\lambda\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}$$

で与えられる．ここに，u は温度，γ_d は土の乾燥密度，λ は融解の潜熱，W は凍っていない水の含水比である．

上のように与えられる拡散問題は，時間空間領域で，あるいは Laplace 変換像空間で容易に積分方程式に変換されて解析される．移動境界値問題（Stefan 問題）とか，非均質，非線形問題では数値計算上の取り扱いが面倒とはなるが，今まで述べてきた方法で解析することができる．最近の動向は文献 21)〜23)をみられたい．

c） 弾性問題[7)〜13), 16),18)〜24)]

線形弾性問題は，3.(2) で述べた特別の場合として，時間項を除いたもので記述される．積分方程式の定式化も容易であり，種々の問題に適用されている．大きく分けると，(ⅰ)応力解析，応力集中問題[54),69)]（2，3次元，軸対称問題，非均質体，インクルージョン問題など），(ⅱ)破壊力学関係[70),71)]（応力拡大係数の決定，3次元表面クラックの解析，クラック伝播，クラック先端の特異性の処理法など），(ⅲ)板，シェル問題[69),72)]（種々の定式化[46),73)]，開口周辺の応力集中，クラック問題など），および(ⅳ)その他の構造解析[74)]などである．

なお，弾性問題では，物体力 $\rho\boldsymbol{b}$ が $\nabla^2\phi=\text{const.}$ を満たすスカラーポテンシャル ϕ から導かれる場合には，領域積分は Gauss の発散定理を用いて容易に境界積分に変換される[55),75)]．したがって，実用上の多くの場合には，境界積分方程式を解けばよいことになる．

その他，熱弾性問題[55),76)]（まず熱伝導問題を解き，次いで熱膨張に伴う温度応力を弾性問題として解くのが普通である．両者が連成した問題は，圧密問題と同じ），圧密問題[77)]（間隙水圧に関する拡張方程式と間隙水圧の勾配を物体力とみなした弾性方程式（Navier 式）とが連成されている）なども解析されている[78)〜80)]．また，大変形問題[81),82)]とか，形状決定問題への試み[83),84)]もある．

なお，異方性の問題などでは，基本解を求めること自体が困難であるので，それを避けて Navier 式を直接 Fourier 変換して積分方程式に導く方法も提案されている[85)]．

d） 非弾性問題[14)]

非弾性問題の代表的なものは，粘弾性，弾塑性，弾粘塑性などに関するものである．たとえば，時間依存の弾粘塑性問題では，速度場 $\dot{\boldsymbol{u}}$ に対して，弾性および非弾性ひずみをそれぞれ $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$ とすると，式 (14)，(15) を参照して，

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)}+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(n)}=\frac{1}{2}(\nabla\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\boldsymbol{u}}\nabla),\quad \sigma^{(e)}=\lambda tr\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$$

$$\mathring{\boldsymbol{L}}\dot{\boldsymbol{u}}=-\rho\dot{\boldsymbol{b}}+\lambda\nabla\ tr\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(n)}+2\mu\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(n)}=-\rho\dot{\boldsymbol{b}}'$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{t}}&=\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{u}}-(\lambda\boldsymbol{n}\ tr\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(n)}+2\mu\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(n)})\\&=\dot{\boldsymbol{t}}'=-(\lambda\boldsymbol{n}\ tr\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(n)}+2\mu\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(n)})\end{aligned}$$

であるので，この $\rho\dot{\boldsymbol{b}}'$，$\dot{\boldsymbol{t}}'$ を弾性問題の $\rho\dot{\boldsymbol{b}}$，$\dot{\boldsymbol{t}}$ の代わりに用いると，弾性問題の場合と全く同様にして，たとえば，式 (8) に対応して，次式が導かれる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^e\,\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0)=&\int_{\partial D}\mathring{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\cdot\dot{\boldsymbol{t}}'(\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})\\&-\oint_{\partial D}\mathring{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\cdot\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{y})ds(\boldsymbol{y})\\&+\int_{D}\rho\mathring{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\cdot\dot{\boldsymbol{b}}'(\boldsymbol{y})dV(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

ここに，$\mathring{\boldsymbol{U}}$，$\mathring{\boldsymbol{W}}$ は線形弾性の基本解であることに注意されたい．この積分方程式は，3.(3) で述べた手法により数値解析される．

なお，線形粘弾性問題では，境界条件が時間に無関係であれば，対応原理（correspondence principle）[86)]が適用できるので，Laplace 像空間で積分方程式を解くことも多い．

非弾性板[14)]，接触問題[87)]，大変形の粘塑性問題[88)]なども解析されている．

e） 動弾性問題[51),52)]

動弾性問題は，地震波動とか耐震問題に関連して，土木分野では最も重要なものの一つである．この問題に対する積分方程式の例は，3.(2) で示した．

構造物-地盤系モデルの種々の入力波に対する応答解析はいくつか試みられ，積分方程式法の有効性が示されている[51),52),89),90)]．これらは，主として Fourier 変換とか Laplace 変換などの像空間における境界値問題として解析されている．なお，最近では，時間空間領域での解析

も試みられている[91),92)].

非均質場の解析には，3.(3) で述べたような領域積分を行うか[93)]，4.(1)，a) の示唆するところにより有限要素法とのハイブリッドな方法[94)]を選択することになる．非線形な場に対しては等価線形化により近似して解くこととなる．

なお，周波数領域による解析では，SH 波は Helmholtz 式に支配され，音響問題と全く同じ取扱いとなる（いわゆるスカラー波動の問題となる）.

時間調和な動弾性問題では，静弾性学の Mindlin 解に対応するような Green 関数を求めることは容易ではない．時間調和な 2 次元面内動問題では，次のような簡略計算法が用いられている．

(ⅰ) 半無限要素を用いる方法[95)]：半無限境界上では攪乱源からある程度離れると，Rayleigh 波のみが卓越することに注目して，Rayleigh 波のみを考慮した半無限要素を導入することができる．

(ⅱ) 境界の有限部分のみを考慮する方法[89)]：半無限境界の有限な範囲だけを要素に分割し，それ以遠は無視する最も簡単なものである．実際問題としては，攪乱源から入射波長の 2 倍程度両側の部分を考慮すれば十分な解が得られるようである．このことは，(ⅰ)および相当厳密に半数値的に求めた Green 関数を用いた解析結果[89),96)]より検証されている．

波動問題に関連して，見かけの固有振動問題は重要である．時間調和な外部領域に関する波動問題（弾性波，音響波，水面波など）を積分方程式法で解く際には，その領域に内部領域が含まれておれば，その内部問題の固有振動数が，外部問題にも見かけの固有振動（fictitious eigenfrequency）として導入されて，外部問題の解の唯一性が失われることになる[46),51),97),98)]．たとえば，空洞周辺の時間調和な応答を解析する際に，外部第 2 種（境界条件が応力で与えられる）問題に対しては，Fredholm 型第 2 種の積分方程式で定式化すると，内部第 1 種（境界条件が変位で与えられる）問題の固有値が導入されることになる．このような問題は，古くから知られており，それを回避する技法が特に音響問題に関して詳しく検討されている[98)].

固有振動数は，時間調和な問題に対する同次な積分方程式が非自明解（ゼロ以外の解）をもつための条件より定められる[46)]．数値解析的には，同次な積分方程式を離散化して得られる同次な代数方程式において，その係数行列式の値をゼロとするような周波数パラメーター ω の値が固有振動数である．一般に，この係数行列式は，ω に関する非線形関数であるので，その根を求めることは容易ではなく，実際には適当な刻み幅 $\Delta\omega$ で試行的に探る方法が取られている[46)].

過渡応答解析では，入力波のスペクトルは Fourier 変換をすれば容易にわかるので，その振動数が固有値か否かをまず判定することが必要である．数値計算においては，振動数パラメーター ω の値が固有振動数に近づくと，上述の係数行列式の値がゼロに近づくので，ω が固有振動数か否かは，たとえば，Crout 法による行列の 3 角（$L-U$）分解などで容易に検査できる[51)].

このような見かけの固有振動を回避して，外部問題の応答を求める方法としては，次のようなものが提案されている．

(ⅰ) 内部表現式を用いる方法[99)]：外部問題では，式 (12) のような一対の式が得られるので，この両者を満たすように解く．あるいは，式 $(12)_2$ を制約条件として式 (13) を解く．

(ⅱ) 2 つの積分方程式を用いる方法：たとえば，外部第 2 種問題を Fredholm 型第 1 種および第 2 種の両方の積分方程式で表現して，連立して解く[100)]．あるいは両者を結合したものを解く[101)]．さらに，混合ポテンシャル(一重層および二重層ポテンシャルに重みを付けた和)を用いるなど[102)].

(ⅲ) 修正した基本解を用いる方法[103),104)]：内部領域の（有限個の）点（たとえば円周上）でゼロとなるように修正した基本解を用いる．

(ⅳ) 補間法を用いる方法[51)]：見かけの固有振動数がわかっている場合には，この振動数より大きい振動数と小さい振動数に対する応答を（数個）求めて，それらを補間して固有振動数に対応する応答を近似的に求める．

なお，実際問題としては，固有振動数に対応した入力波のスペクトルが相当卓越しない限り，見かけの固有振動に伴う誤差はそれほど大きくないので，それを無視して解析することもある．

f) 流体問題[105)]，ポテンシャル波動問題[9),18),106)]

浸透流とか地下水の問題は，ポテンシャル問題あるいは拡散問題として取り上げたので，ここでは除外する．

流体は，Navier-Stokes 式で記述される．非圧縮性を仮定すると，次のようである．

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right]=-\nabla p+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+\rho\boldsymbol{b}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

ここに，$\boldsymbol{u}$ は速度ベクトル，p は圧力，$\boldsymbol{b}$ は物体力ベクトル，ρ は密度，μ は粘性係数である．

この式は，$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ を物体力のようにみなして，3.(3) のおわりの部分で述べたところにより積分方程式に定式化できる．また，定常（$\partial\boldsymbol{u}/\partial t=0$）で，ゆっくりした流れ（移流項($\boldsymbol{u}\cdot\nabla\fallingdotseq 0$) の場合には，非圧縮性固体の場合と同じとなる．

また，渦度（vorticity）$\boldsymbol{W}=\nabla\times\boldsymbol{u}$ を導入することにより，式 (a) の回転を取り，連続式 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ を用いる

ことにより，次の渦伝達式を得る（$\rho \boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ と仮定した）．

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}=\nabla\times\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{W}+\nu\nabla^2\boldsymbol{W} \quad\cdots\cdots(\mathrm{b})$$

ここに，ν は動粘性係数である．

また，渦度の回転を取り，$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ を用いると，

$$\nabla^2\boldsymbol{u}=-\nabla\times\boldsymbol{W} \quad\cdots\cdots(\mathrm{c})$$

を得る．

非圧縮性粘性流体問題は，式（b），（c）に対して，積分方程式を導き，連立して解けばよい．積分方程式は，次のように表わされる．

$$\beta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\int_V \boldsymbol{W}\times\boldsymbol{G}dV-\int_{\partial D}\{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{G}-(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{G}\}ds \quad\cdots\cdots(\mathrm{d})$$

$$\begin{aligned}\beta\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t)=&\int_D[\boldsymbol{W}G^*]_{t=0}\,dV\\&+\int_0^t d\tau\int_D\{\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{W})\}G^*\,dV\\&+\nu\int_0^t d\tau\int_{\partial D}\{G^*(\nabla\times\boldsymbol{W})\times\boldsymbol{n}\\&-\boldsymbol{W}\nabla G^*\cdot\boldsymbol{n}\}ds \quad\cdots\cdots(\mathrm{e})\end{aligned}$$

$$\beta=\begin{cases}1 & \boldsymbol{x}\in D\ (\text{流体領域})\\ 1/2 & \boldsymbol{x}\in\partial D(\text{なめらかな境界})\end{cases}$$

また，$\boldsymbol{G}$，G^* は，式（c），（b）に対応する基本解であり，次のように与えられる．

$$\boldsymbol{G}=\nabla\frac{1}{4\pi r}\ (\text{3 次元}),\quad \boldsymbol{G}=\nabla\left[\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right]\ (\text{2 次元})$$

$$G^*=\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu(t-t_0)}}\exp\left\{-\frac{r^2}{4\nu(t-t_0)}\right\}$$

流体をさらに，非圧縮，非粘性で非回転と仮定すると，速度ポテンシャル ϕ，i.e. $\boldsymbol{u}=\nabla\phi$，に関して，水面波の問題は次のように与えられる[106]．

$$\nabla^2\phi=0 \quad \text{in } D \quad\cdots\cdots(\mathrm{f})$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\\&\qquad-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\\&\frac{\partial\phi}{\partial t}=B-g\zeta-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]\end{aligned}\right\}\ \text{水面上}\quad\cdots\cdots(\mathrm{g})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=V \quad \text{剛体面上} \quad\cdots\cdots(\mathrm{h})$$

ここに，$z=\zeta(x,y,t)$ は自由水平の変位，B は Bernoulli 定数，$\boldsymbol{n}$ は剛体の外向き単位法線ベクトルである．

微小振幅を仮定すると，水面上の条件の高次の項が省略され，$B=0$ として，静水面 $z=0$ 上の条件が次のように与えられる．

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-g\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad z=0$$

時間調和な波動とすると，周波数を ω として，次のように与えられる．

$$\nabla^2\phi=0 \quad\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\omega^2}{g}\phi \qquad z=0 \quad\cdots\cdots(\mathrm{j})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=v \quad\cdots\cdots(\mathrm{k})$$

ここに，v は剛体面の振幅である．なお，領域が無限遠に及ぶ場合には，放射条件を考慮することが必要である．

水面波の問題は，ポテンシャルの問題である．海洋（水理）構造物，浮体などの解析が試みられている[107)~110)]．

なお，特別な場合，水平あるいは鉛直な柱のような物体を対象とすると，２次元問題として記述されて，水平面内では散乱波の速度ポテンシャルは Helmholtz 式で表わされ，一方鉛直面内でのそれは修正 Helmholtz 式で表わされることになる[106)]．この種の問題は，積分方程式に定式化して解くことは容易である．湾内振動の問題は，前者の典型的な例である．深さが変化するような場合には，３次元問題として[111)]，あるいは近似的に２次元非均質場の問題として[112)]定式化されている．なお，いずれの場合にも，3.（3）のおわりの部分で述べたことにより，Laplace 方程式に対応した積分方程式を用いて，振動数依存の項は領域積分で取り扱うこともできる．

非線形波動の問題（式（f）～(h)）では，線形波動の問題（式（i）～(k)）とは，自由水面上の条件（g）だけが異なっている．条件（g)$_1$には，水面の変位 ζ が未知であり，(g)$_2$では，速度の２乗項による非線形が導入されている．これらの条件を満たすように，Laplace 方程式から導かれた積分方程式を，境界を修正しながら解くことになる．この種の問題の例としては，孤立波の発生，伝播，鉛直壁へのかけ上がりなども解析されている[113)]．

g） カップリングの問題

カップリングの問題というのは，異なった支配方程式に伴う物体の連成系を対象とした問題を指すが，われわれに最も関連の深いのは，構造物-流体系の動的問題であろう．これに関しては，前項 f）で述べたほかに，タンクなどの問題も含まれる．これに関してもいくつかの研究がみられる[114)]．

h） 最適化問題

最適化問題を積分方程式法で取り扱うと便利なことも多い．特に，形状を決定するような問題などでは，逐次的に境界を変形してある条件を満足するまで修正をする操作が必要であるので，積分方程式法は有効である．いくつかの試みもみられる[83),84),115)]．数理計画法に取り入れることなどは，有限要素法の場合などと同様に考えられよう[116)]．

i） そ の 他

種々の問題，特に非線形場を含む問題では，積分方程

式法と有限要素法とを結合したハイブリッドな解法も多く試みられるようになってきた.

なお，積分方程式の誤差評価については，文献117)を参照されたい.

5. 将来の動向

積分方程式法は，数値解析の道具としては相当の発達を遂げており，前節でも述べたように，広範囲の分野で適用性が検討され，その有効性が確かめられている．具体的な問題への適用においては，まだいくつか不十分な点もあるが，将来多くの問題に有効に適用されることは間違いない.

今後積分方程式法がどのように発展するかを予見することは容易ではないが，数値解法として1. で述べたような長所もあり，またすでに数多くの適用例もあるので，これらを参考に有効に適用できる対象をいくつか列挙しておこう.

a) 無限領域を含む問題

積分方程式法は，基本解として無限遠での条件を導入しているので，無限領域の問題には最も適している．したがって，特に，波動伝播に関連した問題，たとえば，構造物-地盤系，構造物-流体系，浮体あるいは海洋構造物などの動的な解析，波圧の解析，湾内振動問題の解析などには有効であろう．これらの分野への適用は，特に注目されるようになった.

b) 移動境界問題

境界積分方程式法は，特にこの種の問題に適している．たとえば，融解，凍結などの問題，自由境界を含む浸透問題，非線形波動の問題，最適形状決定問題などへの適用性は高い．今後，大いに発展が期待される.

c) 非線形領域が限定された問題

弾塑性問題に代表されるように，非線形領域が線形領域内の一部に生じるような問題には，領域積分は必要となるけれども，積分方程式法の適用性は高い．なお，非線形領域周辺を有限要素法で近似したものと結合するハイブリッドな解法は，問題によれば最も有効な方法となるであろう．a)とも関連して有望である.

d) そ の 他

その他，たとえば，超音波非破壊検査とか，弾性波検査などのように，固体表面上で得た情報のみから逆に内部構造を推定する類の問題に対しては，シミュレーション逆解析法としての利用価値は高いであろう．もちろん，静的逆解析問題にも有効であろう.

総括的にいえば，積分方程式法は無限領域の線形問題とか移動境界問題に，有限要素法などの領域法は非線形問題への適用性が高い．両者の長所を取り入れたハイブリッドな解析法[118]は，Zienkiewicz のいうように"Marriage *à la mode*—The Best of Both Worlds (Finite Element and Boundary Integrals)"[119]ということであろうか.

なお，有限要素法については，特には言及しなかったが，最初に述べたように積分方程式法の数値解析スキームは有限要素法に負うところが大きく，またハイブリッド法などとも関連して，最近の有限要素法の動向を知ることも大切であろう．これに関しては，文献120)を勧めたい.

6. おわりに

本稿は，積分方程式法の最近の発展を中心に，種々の問題への適用性と将来の動向を探ろうとしたものである．しかし，著者の力量不足から十分に言及できなかった点，あるいは見落としている点も少なくないと思う．これらについては，参考文献により補っていただきたい.

最後に，積分方程式法が，有限要素，差分法などとともにますます発展し，さらに強力な解析手段となることを期待したい.

参 考 文 献

1) 小林昭一：積分方程式法(境界要素法)とその応用，材料，Vol. 32, No. 365, pp. 1293～1303, 1983.
2) 田中正隆：境界要素法(BEM)による非線形解析の現状と将来，日本機械学会論文集(A), Vol. 49, No. 442, pp. 651～657, 1983.
3) 「数理科学」特集／境界要素法，12月号，1982.
4) 「数理科学」特集／境界要素法の新展開，8月号，1984.
5) Kupradze, V. D. : Potential Methods in The Theory of Elasticity, Israel Progr. Sci. Transl., Jerusalem, 1965.
6) Cruse, T. A. and Rizzo, F. J. : Boundary Integral Equation Method : Computational Applications in Applied Mechanics, AMD Vol. 11, ASME, 1975.
7) Jaswon, M. A. and Symm, G. T. : Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics, Academic Pr., 1977.
8) Brebbia, C. A. and Walker, S. : Boundary Element Techniques in Engineering, Newnes-Butterworths, 1980, 田中, 田中(訳)：境界要素法の基礎と応用，培風館，1981.
9) Banerjee, P. K. and Butterfield, R. : Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw-Hill, 1981.
10) Banerjee, P. K. and Butterfield, R. (eds.) : Developments in Boundary Element Methods, Vol. 1, Applied Science, 1979.
11) Banerjee, P. K. and Shaw, R. P. (eds.) : Developments in Boundary Element Methods, Vol. 2, Applied Science, 1982.
12) Brebbia, C. A. (ed.) : Progress in Boundary Element Methods, Vol. 1, Pentech Press, 1981.
13) Brebbia, C. A. (ed.) : Progress in Boundary Element

Methods, Vol. 2, Pentech Press, 1982.
14) Mukherjee, S. : Boundary Element Methods in Creep and Fracture, Applied Science, 1982.
15) 日本材料学会編：続・初心者のための有限要素法，日本材料学会，1982.
16) 田中正隆・田中喜久昭：境界要素法—基礎と応用，丸善，昭. 57.
17) Liggett, J. A. and Liu, P. L-F. : The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow, George Allen & Unwin, 1983.
18) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C. : Boundary Element Techniques, Springer, 1984.
19) Brebbia, C. A. (ed.) : Recent Advances in Boundary Element Methods, Pentech Press, 1978.
20) Brebbia, C. A. (ed.) : New Developments in Boundary Element Methods, CML Publ., 1980.
21) Brebbia, C. A. (ed.) : Boundary Element Methods, Springer, 1981.
22) Brebbia, C. A. (ed.) : Boundary Element Methods in Engineering, Springer, 1982.
23) Brebbia, C. A., Futagami, T. and Tanaka, M. (eds.) : Boundary Elements, Springer, 1983.
24) Boundary Integral Equation Method in Stress Analysis, Mech. Eng. Pub., London, 1983.
25) たとえば，Lamb, H. : Hydrodynamics, § 43, § 58, Dover, 1954.
26) たとえば，Love, A. E. : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, § 121, Dover, 1944.
27) 文献 26)，§ 169.
28) 文献 26)，§ 210.
29) Baker, B. B. and Copson, E. T. : The Mathematical Theory of Huygens's Principle, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1950.
30) Fredholm, I. : Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Vol. 2, No. 28, pp. 3～8, 1906.
31) たとえば，Kellog, D. D. : Foundations of Potential Theory, Springer, 1929.
32) Muskhelishivili, N. I. : Some Basic Problems of the Theory of Elasticity, (transl. J. R. M. Radok), Groningen, Noordhoff, 1953.
33) Mikhlin, S. G. : Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations, Pergamon, 1965.
34) Jaswon, M. A. : Integral equation methods in potential theory, I, Proc. Roy. Soc. (A), No. 275, pp. 23～32, 1963.
35) Symm, G. T. : Integral equation methods in potential theory, II, Proc. Roy. Soc. (A), No. 275, pp. 33～46, 1963.
36) Hess, J. : Calculation of potential flow about bodies of revolution having axes perpendicular to the free stream direction, J. Aero. Sci., No. 29, pp. 726～742, 1962.
37) Friedman, M. B. and Shaw, R. P. : Diffraction of a plane shock wave by an arbitrary rigid cylindrical obstacle, J. Appl. Mech., Vol. 29, pp. 40～46, 1963.
38) Banaugh, R. P. and Goldsmith, W. : Diffraction of steady acoustic wave by surface of arbitrary shape, J. A. S. A. Vol. 35, pp. 1590～1601, 1963.
39) Banaugh, R. P. and Goldsmith, W. : Diffraction of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape, J. Appl. Mech., Vol. 30, pp. 589～595, 1963.
40) 丹羽義次・小林昭一・横田和男：積分方程式法による任意形状，多数空洞周辺応力の解析，土木学会論文報告集，第 195 号，pp. 27～35，1971.
41) Rizzo, F. J. : An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, Quart. Appl. Math., Vol. 25(1), pp. 83～95, 1967.
42) Rizzo, F. J. and Shippy, D. J. : A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem, Int. J. Solids Structures, Vol. 4, pp. 1161～1179, 1968.
43) Cruse, T. A. : Numerical solutions in three dimensional elastostatics, Int. J. Solids Structures, Vol. 5, pp. 1259～1274, 1969.
44) Cruse, T. A. and Rizzo, F. J. : A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem, I, J. Math. Anal. and Appl., Vol. 22, pp. 244～259, 1968.
45) Cruse, T. A. : A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem, II, J. Math. Anal. and Appl., Vol. 22, pp. 341～355, 1968.
46) Niwa, Y., Kobayashi, S. and Kitahara, M. : Determination of Eigenvalues by Boundary Element Methods, 文献 11)の第 6 章.
47) たとえば，Morse, P. M. and Feshbach, H. : Methods of Theoretical Physics, chapt. 7, McGraw-Hill, 1953.
48) たとえば，講畑　茂：積分方程式入門，第 4 章，朝倉書店，昭. 54.
49) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S. : Elastodynamics, chapt. 5, Academic Press, 1975.
50) Achenbach, J. D. : Wave propagation in Elastic Solids, North-Holland, 1973.
51) Kobayashi, S. and Nishimura, N. : Transient Stress Analysis of Tunnels and Cavities of Arbitrary Shape due to Travelling Waves, 文献 11)の第 7 章.
52) Dominguez, J. and Alarcón, E. : Elastodynamics, 文献 12)の第 7 章.
53) Stroud, A. H. and Secrest, D. : Gaussian Quadrature Formulae, Prentice-Hall, 1966.
54) Watson, J. O. : Advanced implimentation of boundary element method in two and three-dimensional elastostatics, 文献 10)の第 3 章.
55) Rizzo, F. J. and Shippy, D. J. : An Advanced Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Thermoelasticity, Int. J. num. Meth. Engng, Vol. 11, pp. 1753～1768, 1977.
56) Cooley, J. W. and Tukey, J. W. : An algorithm for machine calculation of complex Fourier series, Math. Comp., Vol. 19, pp. 297～301, 1965.
57) Narayanan, G. V. and Beskos, D. E. : Numerical oper-

ational methods for time-dependent linear problems, Int. J. num. Meth. Engng. Vol. 18, pp. 1829~1854, 1982.
58) Williams, M. L. : Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in tension, J. Appl. Mech., Vol. 74, pp. 526~528, 1952.
59) Watson, J. O. : Hermitian cubic boundary elements for plane problems of fracture mechanics, Res. Mech., Vol. 4, pp. 23~42, 1982.
60) Kobayashi, S., Nishimura, N. and Kawakami, T. : Simple layer potential method for domains having external corners, Appl. Math. Modelling, Vol. 8, pp. 61~65, 1984.
61) Chaudonneret, M. : On the discontinuity of the stress vector in the boundary integral equation method for elastic analysis, 文献 19), pp. 233~249.
62) Rudolphi, T. J. : An implimentation of the boundary element method for zoned media with stress discontinuities, Int. J. num. Meth. Engng., Vol. 19, pp. 1~15, 1983.
63) Banerjee, P. K. : Non-linear problems of potential Flow, 文献 10)の第 2 章.
64) Paris, F., Martin, A. and Alarcón, E. : Potential Theory, 文献 12)の第 3 章.
65) Niwa, Y., Kobayashi, S. and Fukui, T. : An application of integral equation method to seepage problems, Proc. 24th Japanese Nat. Congr. Appl. Mech., pp. 479~486, Univ. of Tokyo Press, 1974.
66) Skerget, P. and Brebbia, C. A. : Non-linear potential problems, 文献 13)の第 1 章.
67) Banerjee, P. K. and Shaw, R. P. : Boundary Element Formulation for Melting and Solidification Problems, 文献 11)の第 1 章.
68) Wrobel, L. C. and Brebbia, C. A. : Time dependent potential problems, 文献 13)の第 6 章.
69) Hartmann, F. : Elastostatics, 文献 12)の第 4 章.
70) Cruse, T. A. : Two- and Three-Dimensional Problems of Fracture Mechanics, 文献 10)の第 5 章.
71) Atkinson, C. : Fracture mechanics stress analysis, 文献 14)の第 3 章.
72) Tottenham, H. : The Boundary Element Method for Plates and Shells, 文献 11)の第 8 章.
73) Stern, M. : Boundary integral equations for bending of thin plates, 文献 13)の第 6 章.
74) Komatsu, S. and Nagai, M. : Analytical Combination of Boundary Element Method and Thin-Walled Segment Method and Its Application to Box Girder Bridges, 文献 22), pp. 636~649.
75) Danson, D. : Linear isotropic elasticity with body forces, 文献 13)の第 4 章.
76) Rizzo, F. J. and Shippy, D. J. : The Boundary Element Method in Thermoelasticity, 文献 10)の第 7 章.
77) Banerjee, P. K. and Butterfield, R. : Transient Flow through porous Elastic Media, 文献 11)の第 2 章.
78) 西村直志・小林昭一：Biot の方程式のポテンシャル表示とその応用について, 第 17 回土質工学研究発表会論文集, pp. 153~156, 昭. 57.
79) Predeleau, M. : Boundary Integral Method for Porous Media, 文献 21), pp. 325~334.
80) Aramaki, G., Kuroki, T. and Ohnishi, K. : Consolidation Analysis by Boundary Element Method, 文献 22), pp. 363~376.
81) Novati, G. and Brebbia, C. A. : Boundary element formulation for geometrically nonlinear elastostatics, Appl. Math. Modelling, Vol. 6, pp. 136~138, 1982.
82) Tanaka, M. : Integral Equation Approach to Small and Large Displacements of Thin Elastic Plates, 文献 22), pp. 526~539.
83) Kobayashi, S., Nishimura, N. and Yoshida, K. : Applications of boundary integral equation method to changing boundary shape problems, Proc. 3rd Int. Conf. Num. Meth. Geomech., Aachen, pp. 39~46, 1979.
84) Mota Soares, C. A., Rodrigues, H. C. and Oliveira Faria, L. M. : Optimization of Shape of Solid and Hollow Shafts using Boundary Elements, 文献 23), pp. 883~889.
85) Nishimura, N. and Kobayashi, S. : A Boundary Integral Equation Formulation for Three Dimensional Anisotropic Elastostatics, 文献 23), pp. 345~354.
86) たとえば, Y. C. ファン (大橋・村上・神谷 訳)：固体の力学／理論, 第 15 章, 培風館, 昭. 45.
87) Anderson, T. and Allan-Persson, B. G. : The boundary element method applied to two-dimensional contact problems, 文献 13)の第 5 章.
88) Chandra, A. and Mukherjee, S. : Applications of the boundary element method to large strain large deformation problems of viscoplasticity, 文献 24), pp. 58~67.
89) Kobayashi, S. : Some Problems of the Boundary Integral Equation Method in Elastodynamics, 文献 23), pp. 775~786.
90) Manolis, G. D. and Beskos, D. E. : Dynamic response of lined tunnels by an isoparametric boundary element method, comp. meth. Appl. Mech. Engng, Vol. 36, pp. 291~307, 1983.
91) Niwa, Y., Fukui, T., Kato, S. and Fujiki, K. : An application of the integral equation method to two-dimensional elastodynamics, Theoret. Appl. Mech., Vol. 28, pp. 281~290, Univ. of Tokyo Press, 1980.
92) Mansur, W. J. and Brebbia, C. A. : Transient elastodynamics using time-stepping technique, 文献 23), pp. 677~698.
93) Niwa, Y., Kitahara, M. and Hirose, S. : Elastodynamic Problems for Inhomogeneous Bodies, 文献 23), pp. 751~763.
94) Mita, A. and Takanashi, W. : Dynamic Soil-Structure Interaction Analysis by Hybrid Method, 文献 23), pp. 785~794.
95) Kobayashi, S. and Nishimura, N. : Analysis of Dynamic Soil-Structure Interactions by Boundary Integral Equation Method, Proc. 3rd Int. Symp. Num. Meth. in

Eng, Paris, pp. 353～362, Pluraris, 1983.

96) 木下雅敬：半無限基本解を用いた積分方程式法による地盤-構造物系の動的解析，修士論文，昭. 58.

97) たとえば，文献 25)，§290.

98) Shaw, R. P. : Boundary Integral Equation Methods Applied to Wave Problems, 文献 10)の第 6 章.

99) Schenk, H. A. : Improved integral formulation for acoustic radiation problems, J. A. S. A. Vol. 44, pp. 45～58, 1968.

100) Kleinman, R. E. and Roach, G. F. : Boundary integral equations for the three dimensional Helmholtz equation, SIAM Review, Vol. 16, pp. 214～236, 1979.

101) Burton, A. J. and Miller, G. F. : The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems, Proc. Roy. Soc. London (A), No. 323, pp. 201～210, 1971.

102) Filippi, P. : Layer potentials and acoustic diffraction, J. sound and vib., Vol. 54, pp. 473～500, 1977.

103) Jones, D. S. : Integral equations for the exterior acoustic problem, Q. J. Mech. appl. Math. Vol. 27, pp. 129～142, 1974.

104) Kobayashi, S. and Nishimura, N. : On the indeterminancy of BIE solutions for the exterior problems of time-harmonic elastodynamics and incompressible elastostatics, 文献 22), pp. 282～296.

105) Wu, J. C. : Problems of General Viscous Flow, 文献 11)の第 4 章.

106) Liu, P. L-F. and Liggett, J. A. : Applications of Boundary Element Methods to Problems of Water Waves, 文献 11)の第 3 章.

107) 井島武士・松井　創・永田修一：任意断面形の空隙浮体の 2 次元運動と波の変形，土木学会論文報告集，第 296 号，pp. 25～37, 1980.

108) 清川哲志・大山　巧・小林　浩：グリーン関数法による任意形状浮体の動揺解析，土木学会論文報告集，第 332 号，pp. 55～65, 1983.

109) 清川哲志・大山　巧：ハイブリッド法による軸対称構造物に作用する流体力および周辺波動場の解析，土木学会論文集，第 345 号／II-1, pp. 131～140, 1984.

110) Nagata, S. and Ijima, T. : Numerical Analysis of Transient, Finite Amplitude Motion of a Moored, Submerged Cylinder. 文献 23), pp. 239～248.

111) Yoshida, A. and Ijima, T. : Resonance in Harbors of Arbitrary Topography, 文献 23), pp. 217～226.

112) Mattioli, F. : Wave-induced oscillations in harbours of variable depth, Computer and Fluids, Vol. 6, pp. 161～171, 1978.

113) 中山　司：非線形造波問題の境界要素法解析，文献 3), pp. 53～58.

114) Komatsu, K. : Fluid structure interaction, 文献 13)の第 7 章.

115) Zochowski, A. and Mizukami, K. : A Comparison of BEM and FEM in Minimum Weight Design, 文献 23), pp. 901～911.

116) Futagami, T. : Boundary Element Method-Finite Element Method Coupled with Linear Programming for Optimal Control of Distributed Parameter Systems, 文献 23), pp. 891～900.

117) Wendiand, W. L. : Asymptotic accuracy and convergence, 文献 13)の第 9 章.

118) Kelly, D. W., Mustoe, G. G. W. and Zienkiewicz, O. C. : Coupling Boundary Element Methods with Other Numerical Methods, 文献 10)の第 10 章.

119) Zienkiewicz, O. C., Kelly, D. W. and Bettess, P. : Marriage *à la mode*—The Best of Both Worlds (Finite Element and Boundary Integrals), R. Glowinski, E. Y. Rodin and O. C. Zienkiewicz(eds.) "Energy Methods in Finite Element Analysis", 第 5 章, Wiley, 1979.

120) Zienkiewicz, O. C. : The Generalized Finite Element Method—State of the Art and Future Directions, J. Appl. Mech., Vol. 50, pp. 1210～1217, 1983.

(1984. 6. 15・受付)