

## 半無限弾性体の定常動的問題に対する基本解とその一考察

## FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR STEADY STATE DYNAMIC PROBLEMS IN AN ELASTIC HALF-SPACE AND A CONSIDERATION ON THEIR APPLICABILITY

高谷 富也\*・北村 泰寿\*\*・桜井 春輔\*\*\*

By Tomiya TAKATANI, Yasutoshi KITAMURA and Shunsuke SAKURAI

This paper shows the fundamental solutions of displacements and stresses of an elastic half-space due to harmonic loads acting in the interior of the half-space. The solutions shown in this paper can be used as the fundamental solutions in the Boundary Element Method. As numerical examples, the applicable extent of the solutions of displacements and stresses derived in this paper is discussed in comparison with the ones obtained by the superposition of an elastic free-space solutions. The influence of non-dimensional frequency  $\omega H/V_s$  is also discussed.

## 1. ま え が き

近年、境界要素法が構造物-地盤系の動的問題に適用され、多くの成果を挙げていることは周知である。この境界要素法によって地表面近傍に位置する構造物および周辺地盤の動的挙動を解析する場合、利用する基本解によって2つの方法が考えられる。すなわち、全無限媒体に対する基本解を用いて地表面を近似的に実現し、半無限媒体に対する解を得ようとする間接的な方法と、半無限媒体の基本解を用いる直接的な方法である。前者については、全無限媒体中に有限区間の切り込みを入れる方法<sup>1)</sup>、全無限媒体の基本解に鏡像を重ねただけの解を用いる、いわゆる応力境界条件の一部を無視する方法<sup>2)</sup>などが考えられる。

従来研究において、自由表面をもつ三次元弾性体に対する基本解としては、松岡ら<sup>3)</sup>、著者ら<sup>4)</sup>、Lucoら<sup>5)</sup>の研究が利用できる。しかし、これらの解に含まれる波数積分は特異点を含む無限積分となっており、基本解の

実際の値を得るには煩雑な数値積分を必要とする。これに対して、全無限弾性体における基本解は松岡ら<sup>6)</sup>によって求められているが、その解は比較的簡単な解析的表示となっている。

このような状況において、本文は文献4)の方法によって求めた半無限弾性体の基本解を利用しやすいようにまとめ、さらに全無限弾性体の基本解に鏡像を重ねただけの解が半無限弾性体の基本解をどの程度近似できるかについて調べたものである。

## 2. 基本解のまとめ

Fig. 1に示すように、半無限弾性体内部に調和型点加振力が作用するとき、変位、応力解は以下のようにまとめられる。なお、これらの解の誘導については、文献4)に変位解が、また文献7)に変位、応力解が与えられているため、詳細はこれらの文献に譲る。

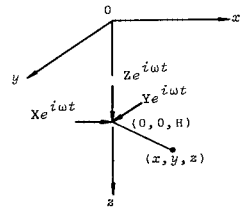


Fig. 1 Coordinate System.

$$v = \frac{I_1 e^{i\omega t}}{4\pi k_s^2} \int_0^\infty I_2 \left\{ K_1 + K_2 \frac{\partial}{\partial x} + K_3 \frac{\partial}{\partial y} + K_4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_5 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + K_6 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + K_7 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right.$$

\* 学生会員 工修 神戸大学大学院自然科学研究科  
(〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)

\*\* 正会員 工博 神戸大学助教授 工学部土地造成工学研究施設 (同上)

\*\*\* 正会員 Ph. D. 工博 神戸大学教授 工学部土木工学科 (同上)

$$+ K_8 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + K_9 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \Big\} J_0(kr) dk \dots \dots (1)$$

ここで、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $k_s = \omega / V_s$ 、 $\omega$  は加振振動数、 $V_s$  は横波速度、 $J_0(\ )$  は 0 次の第 1 種 Bessel 関数である。 $v$  は各変位、応力の別を表わし、 $I_1, I_2$  および  $K_1 \sim K_9$  なる記号は一括して Table 1 に与える。なお、同表に現われない  $K_1 \sim K_9$  は 0 を意味する。Table 1 において、 $u_x, u_y, u_z$  は  $x, y, z$  方向の変位、 $X, Z$  は  $x, z$  方向の点加振力の荷重振幅、 $\mu$  はせん断弾性係数、 $\nu$  はポアソン比である。また、Table 1 中の  $A_v(k), B_v(k), \dots$  等の記号は次式のようにまとめられる。

$$F = L_1 |L_2 e^{-\alpha u} - L_3 e^{-\beta u} | L_4 e^{-\alpha z} - L_5 e^{-\beta z} | f(k) + L_6 G^m(\alpha) + L_7 G^m(\beta) \dots \dots (2)$$

$$G^m(\alpha) = e^{-\alpha z + m} + m e^{\pm \alpha z - m} \dots \dots (3)$$

Table 1 Explanation of symbols in Eq. (1).

v	上 下 加 振				x 方 向 水 平 加 振			
	$I_1$	$I_2$	$K_1 \sim K_9$		$I_1$	$I_2$	$K_1 \sim K_9$	
$u_x$	$Z/\mu$	$k$	$K_2$	$A_v(k)$	$X/\mu$	$1/k$	$K_4$	$B_H(k)$
$u_y$	$Z/\mu$	$k$	$K_3$	$A_v(k)$	$X/\mu$	$1/k$	$K_6$	$-k_s^2 G^*(\beta)/\beta$
$u_z$	$-Z/\mu$	$k$	$K_1$	$B_v(k)$	$-X/\mu$	$k$	$K_5$	$B_H(k) + k_s^2 G^*(\beta)/\beta$
$\sigma_x$	$2Z$	$k$	$K_1$	$-\nu k_s^2 C_v(k)/2(1-\nu)$	$2X$	$1/k$	$K_2$	$-\nu k_s^2 C_H(k)/2(1-\nu)$
			$K_4$	$A_v(k)$			$K_7$	$B_H(k)$
$\sigma_y$	$2Z$	$k$	$K_1$	$-\nu k_s^2 C_v(k)/2(1-\nu)$	$2X$	$1/k$	$K_3$	$-\nu k_s^2 C_H(k)/2(1-\nu)$
			$K_6$	$A_v(k)$			$K_8$	$B_H(k) + k_s^2 G^*(\beta)/\beta$
$\sigma_z$	$Z$	$k$	$K_1$	$D_v(k)$	$X$	$k$	$K_2$	$E_H(k)$
$\tau_{xz}$	$2Z$	$k$	$K_9$	$A_v(k)$	$X$	$1/k$	$K_3$	$k^2 k_s^2 G^*(\beta)/\beta$
$\tau_{yz}$	$-Z$	$k$	$K_3$	$E_v(k)$	$-X$	$1/k$	$K_8$	$2\{B_H(k) + k_s^2 G^*(\beta)/\beta\}$
$\tau_{zx}$	$Z$	$k$	$K_2$	$F_v(k)$	$-X$	$1/k$	$K_4$	$D_H(k)$
							$K_9$	$k_s^2 G^*(\beta)$

Table 2 Explanation of symbols in Eq. (2).

F	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$	$L_7$	m
$A_v(k)$	2	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	-1	1	$\pm$
$A_H(k)$	2	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	$k^2 + \beta^2$	1	-1	$\pm$
$B_v(k)$	$2\alpha$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	$-\alpha$	$k^2/\beta$	-
$B_H(k)$	$2\beta$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$k^2/\alpha$	$-\beta$	-
$C_{v1}(k)$	$k^2 + \beta^2$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	1	0	-1	0	$\pm$
$C_{v2}(k)$	$k^2 + \beta^2$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	1	0	0	0	0
$C_{H1}(k)$	$2k^2\beta$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	1	0	$k^2/\alpha$	0	-
$C_{H2}(k)$	$2k^2\beta$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	1	0	0	0	0
$D_v(k)$	2	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	$(k^2 + \beta^2)^2$	$4k^2\alpha\beta$	$-(k^2 + \beta^2)$	$2k^2$	$\pm$
$D_H(k)$	2	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$4k^2\alpha\beta$	$(k^2 + \beta^2)^2$	$2k^2$	$-(k^2 + \beta^2)$	$\pm$
$E_v(k)$	$4\alpha(k^2 + \beta^2)$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	1	1	$-2\alpha$	$(k^2 + \beta^2)/\beta$	-
$E_H(k)$	$4\beta(k^2 + \beta^2)$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	1	1	$(k^2 + \beta^2)/\alpha$	$-2\beta$	-

注)  $C_v(k) = C_{v1}(k) + C_{v2}(k)$ 、 $C_H(k) = C_{H1}(k) + C_{H2}(k)$

ただし、

$$f(k) = (k^2 + \beta^2)^2 - 4k^2\alpha\beta \text{ (Rayleigh 関数)}$$

$$\alpha = \sqrt{k^2 - k_p^2}, \beta = \sqrt{k^2 - k_s^2}$$

ここで、 $k_p = \omega / V_p$ 、 $V_p$  は縦波速度、 $H$  は加振位置の深さ、 $G^m(\beta)$  は  $G^m(\alpha)$  で  $\alpha$  の代わりに  $\beta$  と置いたものである。式 (2) において、 $F, L_1 \sim L_7$  なる記号は Table 2 に与える。また、式 (3) の  $m$  は指数関数に前掛けの符号を意味する。さらに、式 (3) および Table 1, 2 に現われる複号は、それぞれ加振位置により上層部分 ( $0 \leq z \leq H$ ) および下層部分 ( $H \leq z$ ) に対応することを表わしている。

ところで、式 (2) の分母  $f(k)$  は Rayleigh 根と呼ばれる実根を有するため、式 (1) の積分は通常の積分によって解くことはできない。本文では、一般形で表示

して次式に示すような計算方法によって、直接数値積分による積分値の評価を行う<sup>4)</sup>。

$$\int_0^\infty I(k) dk = P \int_0^\infty \left\{ I(k) - \lim_{k \rightarrow \infty} I(k) \right\} dk - i\pi \text{Res}(k_R) + (\text{Mindlin 解}) \dots \dots (4)$$

ここで、 $P \int$  は Cauchy の主値、 $\text{Res}(k_R)$  は Rayleigh 根  $k_R$  での留数、 $I(k)$  は収束関数、 $\lim_{k \rightarrow \infty} I(k)$  は  $k$  が十分大きな値での近似式を意味する。また、式 (4) はこの近似式を差し引くことによって主値積分の収束を早め、数値積分を有限な積分上限値で終わらせるよう操作したものである。

また、 $\lim_{k \rightarrow \infty} I(k)$  なる関数形は実際の数値計算において重要な役割を果たす。ここでは、式 (2), (3) の近似式を次式のようにまとめておく。なお、これらの近似式の誘導については文献 4), 8) に説明がなされている。

$$\bar{F} = \lim_{k \rightarrow \infty} F = M_1 [M_2 + M_3 kH + M_4 kz + M_5 k^2 zH] e^{-kz + m} + M_6 \{M_7 + M_8 k(z-H)\} \cdot e^{\pm k(z-H)} \dots \dots (5)$$

$$\bar{G}^m(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} G^m(\alpha) = e^{-k(z+m)} + m e^{\pm k(z-m)} \dots \dots (6)$$

Table 3 Explanation of symbols in Eq. (5).

$\bar{F}$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$	$M_6$	$M_7$	$M_8$
$A_v(k)$	$k_s^2/2k^2$	$2\gamma^2/(1-\gamma^2)$	$1+\gamma^2$	$-(1+\gamma^2)$	$-2(1-\gamma^2)$	-	0	$1-\gamma^2$
$\bar{A}_N(k)$	$k_s^2/2k^2$	$2\gamma^2/(1-\gamma^2)$	$-(1+\gamma^2)$	$1+\gamma^2$	$-2(1-\gamma^2)$	+	0	$1-\gamma^2$
$B_v(k)$	$-k_s^2/2k$	$(1+\gamma^4)/(1-\gamma^2)$	$1+\gamma^2$	$1+\gamma^2$	$2(1-\gamma^2)$	+	$1+\gamma^2$	$\mp(1-\gamma^2)$
$\bar{B}_N(k)$	$-k_s^2/2k$	$-(1+\gamma^4)/(1-\gamma^2)$	$-(1+\gamma^2)$	$-(1+\gamma^2)$	$2(1-\gamma^2)$	+	$1+\gamma^2$	$\pm(1-\gamma^2)$
$C_v(k)$	1	$(1+\gamma^2)/(1-\gamma^2)$	2	0	0	+	0	1
$\bar{C}_N(k)$	-k	$(1+\gamma^2)/(1-\gamma^2)$	-2	0	0	+	k	0
$D_v(k)$	$-k_s^2$	1	$1-\gamma^2$	$1+\gamma^2$	$2(1-\gamma^2)$	$\mp$	1	$\mp(1-\gamma^2)$
$\bar{D}_N(k)$	$-k_s^2$	1	$-(1-\gamma^2)$	$-(1+\gamma^2)$	$2(1-\gamma^2)$	$\mp$	1	$\pm(1-\gamma^2)$
$E_v(k)$	$k_s^2/k$	$\gamma^2$	$1-\gamma^2$	$1+\gamma^2$	$-2(1-\gamma^2)$	-	$\gamma^2$	$\mp(1-\gamma^2)$
$\bar{E}_N(k)$	$k_s^2/k$	$\gamma^2$	$-(1-\gamma^2)$	$1+\gamma^2$	$-2(1-\gamma^2)$	-	$\gamma^2$	$\pm(1-\gamma^2)$

注)  $\gamma = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$

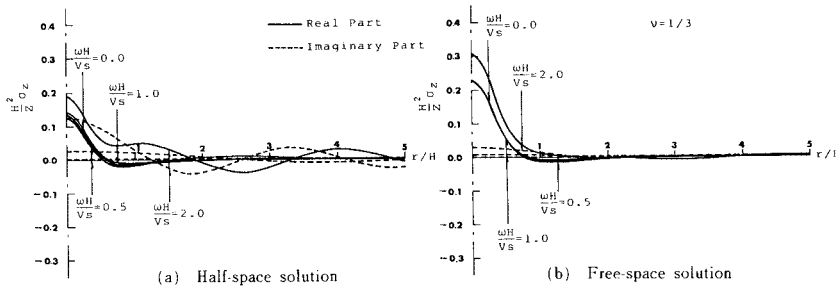


Fig. 2 Normal stress  $\sigma_z$  at the depth  $0.25 H$  due to a vertical concentrated load at the depth  $H$ .

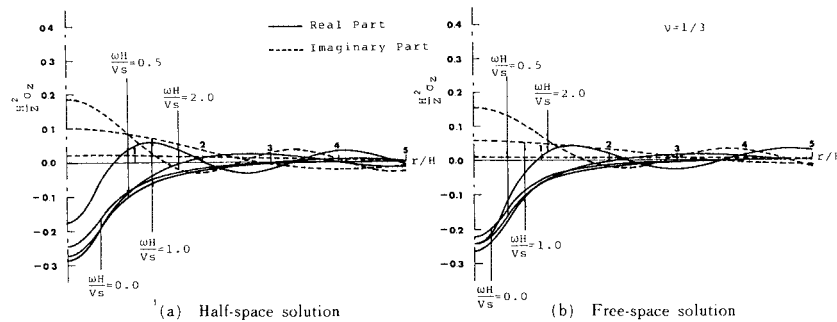


Fig. 3 Normal stress  $\sigma_z$  at the depth  $2.0 H$  due to a vertical concentrated load at the depth  $H$ .

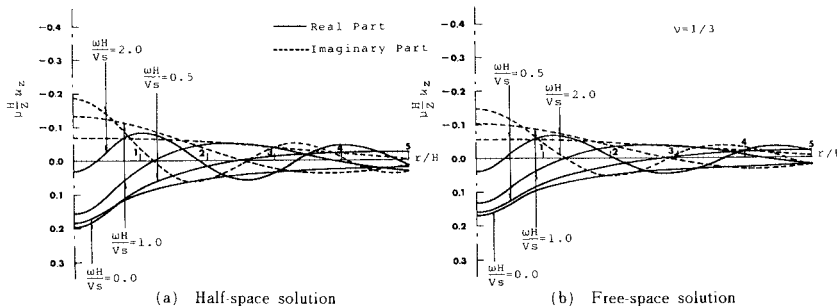


Fig. 4 Vertical displacement at the depth  $0.25 H$  due to a vertical concentrated load at the depth  $H$ .

なお、上式中の  $M_1 \sim M_8$  なる記号は Table 3 に与える。

### 3. 数値計算例

前章に示したように、半無限弾性体の基本解の実際の値を得るためには、煩雑な数値計算を実行しなければならない。このため、全無限弾性体における素解に鏡像を重ねただけの解で代用することも考えられている<sup>2),3)</sup>。この問題は、地表面近傍にある構造物の動的解析に境界要素法を適用する際の基本解として重大な関心事である。

本文では、計算例として、半無限弾性体内部の点加振力による変位、応力解（以下、半無限解と略す）と全無限弾性体における素解に鏡像を重ねただけの変位、応力解（以下、全無限解と略す）の比較を行う。半無限解の数値積分に際して、必要とする計算精度により積分打ち切り上限値および根の近傍での積分きざみ幅の問題が生じるが、本文では文献9)を参考とした。なお、全無限弾性体の素解は文献6)に与えられているため、本文では紙面の都合上省略する。また、ここでは上下点加振力による鉛直応力  $\sigma_z$  および上下変位  $u_z$  の比較のみを示す。

Fig. 2, 3は、それぞれ  $z=0.25 H$ ,  $z=2.0 H$  における  $\sigma_z$  を、無次元加振振動数  $\omega H / V_s$  をパラメーターとして示した

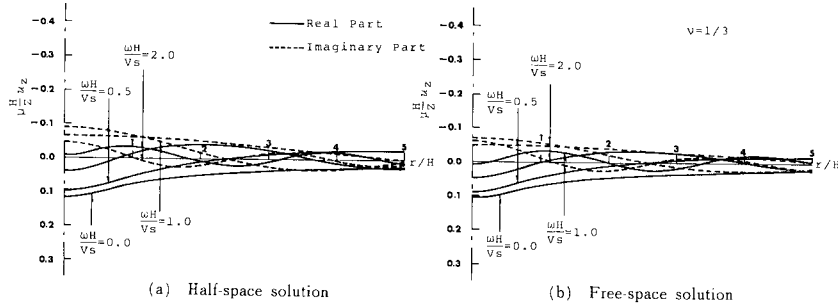


Fig. 5 Vertical displacement at the depth  $2.0H$  due to a vertical concentrated load at the depth  $H$ .

ものである。Fig. 2 より、 $z=0.25H$  なる深さでは  $\sigma_z$  の半無限解と全無限解には明らかに差異がみられる。これに対して、Fig. 3 より、 $z=2.0H$  なる深さでは、 $\sigma_z$  の半無限解と全無限解には  $\omega H/V_s$  が大きくなるとともに差が大きくなる傾向にあるが、 $\omega H/V_s$  が小さい場合には大差ないことがわかる。一方、本文には図示していないが、せん断応力  $\tau_{zr}$  の比較においても同様の傾向が得られており、しかもこの傾向は  $\sigma_z$  より  $\tau_{zr}$  においてより顕著になっている。これは、全無限解の応力のうち、 $\sigma_z$  は  $z=0$  の仮想表面で  $\sigma_z=0$  となり、半無限解における境界条件として一致しているのに対して、 $\tau_{zr}$  は  $z=0$  において  $\tau_{zr} \neq 0$  であることに起因しているものと考えられる。

次に、Fig. 4, 5 は、それぞれ  $z=0.25H$ 、 $z=2.0H$  における  $u_z$  を  $\omega H/V_s$  をパラメーターとして示したものである。両図より、いずれの深さにおいても半無限解と全無限解には大差がないことがわかる。すなわち、 $u_z$  の全無限解を求めるにあたって、仮想表面 ( $z=0$ ) 上で  $\tau_{zr}=0$  が満足されていないことによる補正項の寄与は小さいことを示唆している。

4. ま と め

本文では、半無限弾性体の基本解と数値計算法についてまとめ、若干の数値計算結果を示した。半無限弾性体内部の点加振力による変位、応力解は他の文献にもみられるが、本文では利用しやすいようにまとめた。また、数値計算例として、半無限弾性体における素解に鏡像を重ねただけで得られる変位、応力の比較を行った。この結果、変位については半無限解と全無限解の間に大差はみられないが、応力については表面近傍に近づくにつれて、また無次元加振振動数  $\omega H/V_s$  が大きくなるにつれて半無限解と全無限解の間には顕著な差異がみられた。本文では上下方向の点加振問題のみについて調べたが、水平方向の点加振問題に対しても同様の考察が成り立つ

ものと思われる。したがって、変位、応力の全無限解を基本解として境界要素法を地表面近傍の構造物の動的解析に適用する場合、変位境界の解析には大きな誤差は与えないものと考えられるが、応力境界の解析には問題がある。

最後に、本文の数値計算には、神戸大学総合情報処理センター ACOS-1000 を利用したことを付記し、関係各位に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Kobayashi, S. : Some problems of the boundary integral equation method in elastodynamics, Proc. 5 th Int. Conf. on Boundary Elements, Hiroshima, Japan, pp. 775 ~784, 1983.
- 2) 小長井一男：無限等方弾性体内の剛体円盤の法線方向コンプライアンス，土木学会論文報告集，第 339 号，pp. 231~234, 1983.
- 3) 松岡 理・八幡夏恵子：三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用—その 2, その 3, 日本建築学会論文報告集，第 293 号，pp. 35~44, 1980, 第 298'号，pp. 43~53, 1980.
- 4) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体内部の調和型点加振力による変位の解析，建設工学研究所報告，第 24 号，pp. 33~54, 1982.
- 5) Luco, J. E. and Aspel, R. J. : On the green's functions for a layered half-space-Part I, Part II, Bull. Seism. Soc. Amer., Vol. 73, pp. 909~929, pp. 931~951, 1983.
- 6) 松岡 理・八幡夏恵子：三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用—その 1, 日本建築学会論文報告集，第 288 号，pp. 73~84, 1980.
- 7) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限多層弾性体の内部加振問題への伝達マトリックス法の応用，土木学会論文報告集（投稿中）
- 8) 田治見 宏：建物と地盤の相互作用（分担執筆），地震工学（金井 清ほか 3 名共著），彰国社，p. 96, 1968.
- 9) 北村泰寿・桜井春輔・陳 徳生：二層弾性体表面の点加振力による表面変位の数値解析，建設工学研究所報告，第 22 号，pp. 145~166, 1980.

(1984. 3. 14・受付)