

軟鋼の降伏条件に対する一吟味

正 員 奥 村 敏 惠*

1. 序 言

構造物の設計は弹性設計と極限設計に大別される。通常行われている設計は弹性設計であり、普通引張に対してはその保証破断力、圧縮に対しては座屈荷重に適當な安全率を考慮して設計している。しかし計算の基盤となつてゐるのは弾性であつて、変位後も断面形状の変化がないものと考えてゐるわけであるから、これらの設計の真の安全の基準は降伏点および座屈応力にあることは説明するまでもない。

特に最近構造物が複雑となり、溶接構造が広範囲に採用されるに従い、単純な応力状態だけの考慮では不十分となつてきている。すなわち 2 軸方向の直応力およびこれにせん断応力が加わる状態が多くの例に見られる。この場合一方向のみの応力の値、またはその最大の主応力の値がある限界値に達したときに、その設計における最大許容状態とみなし、これらの応力に対する他の種類の応力の影響を何等考慮しなくともよいかが問題の焦点である。これに解決を与えるものとして I.S.O.¹⁾ では Von-Mises-Hencky の変形エネルギー説にもとづいた換算応力 σ_v

が単純引張試験で得られた材料の強度より推定される許容応力度の範囲内におさまるように設計することを決議している。

この考えは、材料の降伏に関するエネルギーは全エネルギーの内体積変化に費されるエネルギーを除いたセン断変形により費されるエネルギーであるとする点に基く。

また一般に構造物の耐力を吟味するには、塑性理論の助けをかりなければ十分にその完全を期すことができない。これらの塑性理論を体系づけるものとして（1）材料が塑性状態に入る応力状態を示す降伏条件、（2）塑性状態における Hooke の法則にかかる応力ヒズミの関係式があげられる。

後者はとくに軟鋼に対しては、主ヒズミ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) 主応力 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) とするとき次式が適用される。

ここに G はセン断弾性係数、 ν はポアソン比、 ϕ はその瞬間の応力状態、したがつて場所および時間の函数で示される値である。なおこれによるエネルギーを δW とすると、

$$\delta W = \delta(V + \psi\Phi) + \Phi\delta\psi \quad \dots \dots \dots \quad (1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 1 + \varphi, \quad V = \frac{1}{12G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ \Phi &= -\frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

であらわされる。この式中 V は体積の変化に相当する値であり、 θ は形状の変化に相当する値である。

ここで $\psi = \text{一定}$ とすると、一般の弾性状態をあらわすことができ、 $\psi = 1$ は普通の Hooke の弾性体となる。

ϕ =一定は後で示す Von Mises の降伏条件を示すことになり、完全塑性体をあらわすことになる。

$\phi = f(\psi)$ の条件が満足される物体は $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 = 3/G \cdot \phi^{F^2(\Phi)}$ の形となり ヒズミ硬化を受ける塑性体となる。

一方降伏条件は従来の主要なものを考えると、

- $$\left. \begin{array}{ll} (\text{i}) & \text{最大主応力説} \quad \sigma_1 = \sigma_{y,p} \\ (\text{ii}) & \text{最大ヒズミ度説} \quad \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{y,p} \\ (\text{iii}) & \text{最大セン断応力説} \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{y,p} \\ (\text{iv}) & \text{変形エネルギー説} \quad \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{2}\sigma_{y,p} \end{array} \right\} \dots \quad (1.5)$$

ここに主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), σ_y, β は単純引張の降伏点を示す。特に後の 2 つが軟鋼においては問題とされている。以下これらに基く塑性理論の発展にも重要な要素となるため、従来行われている実験と別の見地より、この条件を吟味することにつとめた。このためには最も解明し易い 2 軸応力状態を生ずるような試験片を選んで、厳密にその応力状態を解析する。一方数多くの実験により局部的な応力ヒズミの関係を測定し、明らかにヒズミの増大する限界を以て降伏条件の限界と考え、上に得た応力状態より降伏条件を吟味した。このため両側面に半円の切欠を有する帯状の平板を使用し、単純に引張ることによつて生ずる現象を注目することにした。以

* 工学博士, 東京大学助教授, 工学部土木教室

下この理論的解析と実験およびその結果について述べようと思う。

2. 両側面に半円形の切欠き有し、単純引張を受ける平板の応力解析

2-1 Goursat の応力函数

この問題は既に取扱われているが、いずれも近似解であり厳密でない。このため Goursat²⁾ の応力函数を使用し、等角写像を利用しその解をおこなつた。すなわち Goursat は二次元弾性面 $z=x+iy$ に平面応力が働く場合応力函数を $\varphi(z), \psi(z)$ で与えた。この結果

$$(a) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_x &= R_e[-\bar{z}\varphi''(z) + 2\varphi'(z) - \psi''(z)] \\ \sigma_y &= R_e[\bar{z}\varphi''(z) + 2\varphi'(z) - \psi''(z)] \\ \tau_{xy} &= I_m[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ここに R_e は実部分、 I_m は虚部分、 \bar{z} はその共轭数、' は () の内の値による微分を示す。以下同様に取扱う。

(b) 合力

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \int p_x ds = -I_m[\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)] + I_m[\varphi(z)] \\ P_y &= \int p_y ds = -R_e[\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)] - R_e[\varphi(z)] \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

(c) ヒズミ

$$\left. \begin{aligned} E\varepsilon_x &= R_e[-(1+\nu)\{\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)\} + 2(1-\nu)\varphi'(z)] \\ E\varepsilon_y &= R_e[(1+\nu)\{\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)\} + 2(1-\nu)\varphi'(z)] \\ E\gamma_{xy} &= I_m[2(1+\nu)\{\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)\}] \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

次に物理面 $z=x+iy$ を媒介面 $\zeta=\xi+i\eta$ に一対一に写像するとき、写像函数として

$$z=Z(\zeta) \quad (2.4)$$

を用いて整理すると、

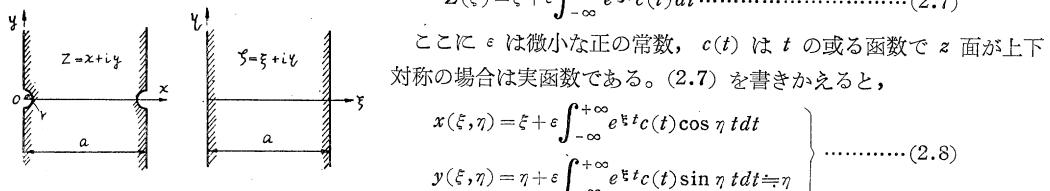
$$P_y + iP_x = -\{\bar{Z}(\zeta)\Phi'(\zeta)/Z'(\zeta) + \Psi^I(\zeta) + \bar{\Psi}(\zeta)\} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= R_e \left[-\Phi''(\zeta) \frac{\bar{Z}(\zeta)}{\{Z'(\zeta)\}^2} + \Phi'(\zeta) \left(\frac{\bar{Z}(\zeta) \cdot Z''(\zeta)}{\{Z'(\zeta)\}^3} + \frac{2}{Z'(\zeta)} \right) - \frac{\Psi^{II}(\zeta)}{Z'(\zeta)} \right] \\ \sigma_y &= R_e \left[\Phi''(\zeta) \frac{\bar{Z}(\zeta)}{\{Z'(\zeta)\}^2} + \Phi'(\zeta) \left(-\frac{\bar{Z}(\zeta) Z''(\zeta)}{\{Z'(\zeta)\}^3} + \frac{2}{Z'(\zeta)} \right) + \frac{\Psi^{II}(\zeta)}{Z'(\zeta)} \right] \\ \tau_{xy} &= I_m \left[\Phi''(\zeta) \frac{\bar{Z}(\zeta)}{\{Z'(\zeta)\}^2} - \Phi'(\zeta) \frac{\bar{Z}(\zeta) \cdot Z''(\zeta)}{\{Z'(\zeta)\}^3} - \frac{\Psi^{II}(\zeta)}{Z'(\zeta)} \right] \\ \Psi^I(\zeta) &= \psi'\{Z(\zeta)\} = \psi'(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

2-2 写像函数の決定

写像函数として Laplace 積分を用い、遠方で $Z=\zeta$ と考えられるから (図-1)

$$\text{図-1} \quad Z(\zeta) = \zeta + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\xi t} c(t) dt \quad (2.7)$$



ここに ε は微小な正の常数、 $c(t)$ は t の或る函数で z 面が上下対称の場合は実函数である。(2.7) を書きかえると、

$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \xi + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\xi t} c(t) \cos \eta t dt \\ y(\xi, \eta) &= \eta + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\xi t} c(t) \sin \eta t dt = \eta \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$y=\eta$ を $x(o, \eta)$ の式に代入すると、

$$x(o, \eta) = \varepsilon \int_0^{\infty} \{c(t) + c(-t)\} \cos \eta t dt$$

$c(t) + c(-t)$ は t の偶函数なる故 Fourier 変換により、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \{c(t) + c(-t)\} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} x(o, y) \cos y t dy \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} \cos y t dy \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$y=\eta$ を $x(a, y)$ に代入すると、

$$x(a, y) = a + \varepsilon \int_0^{\infty} \{e^{at} c(t) + e^{-at} c(-t)\} \cos y t dt$$

同様にして Fourier 変換より

$$f(t) = 2/\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} \cos y t dy$$

$$\varepsilon \{c(t) + c(-t)\} = f(t)$$

$$\varepsilon \{ e^{at} c(t) + e^{-at} c(-t) \} = -f(t)$$

となり、これをとくと

$$c(-t) = -e^{at} c(t) = -\frac{e^{at} f(t)}{\varepsilon(1-e^{at})} \quad \dots \dots \dots \quad (2.11)$$

一方

$$f(t) = 2/\pi \int_0^1 r^2 \sqrt{1-u^2} \cos(rt u) du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{2n+2}}{n! (n+1)! 2^{2n+1}} t^{2n} \quad \dots \dots \dots \quad (2.12)$$

(2.11), (2.12) より $c(t)$ または $c(-t)$ は与えられる。

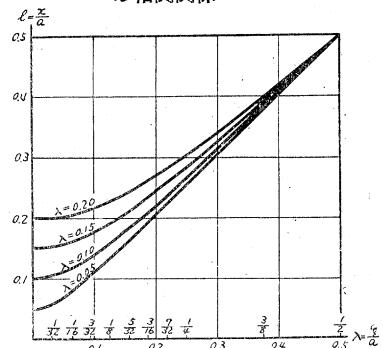
一方(2.8)より $\eta=0$ とすると、 $y=0$ となる。したがつて ξ 軸上の点は x 軸上の点の写像になる。次に(2.11)の関係を用いると、

これは $x/a = l$, $\xi/a = \lambda$, $r/a = \rho$, $y/r = \theta$ とおくと

$$l = \lambda + 2 \rho^2 \int_0^1 \sqrt{1-\theta^2} \frac{\sin(2\lambda\pi)}{\operatorname{ch}(2\rho\theta\pi) - \cos(2\lambda\pi)} d\theta \quad \dots \dots \dots \quad (2.14)$$

これは一般の写像をあらはす式であつて、図-2 で示される。なお特別な点 $\xi = 0, a/2, a$ について ξ と x との関係を求めるとき、

図-2 物理面 x 軸と写像面 ξ 軸の相関関係



$$\xi=0 \quad x=r, \quad \xi=a \quad x=a-r, \quad \xi=-a/2 \quad \text{etc} \quad x=a/2$$

となる。

2-3 応力函数の決定

いま帯板の長さの方向に一様な引張力 T を受ける場合を考えると、もし切欠がなければ $\sigma_y = T$, $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ なる故、Goursat の応力函数 $\varphi(z) = Tz/4$, $\psi'(z) = Tz/2$ である。切欠のある場合も遠方においては $\psi = z$ と考えられるから、正の微小量 ε を用いると、次のような (2.7) と同様な形に書きあらわされる。

$$\varphi(z) = \Phi(\zeta) = T/4 \cdot \{ \zeta + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\zeta t} A(t) dt \} \dots \dots \dots \quad (2.15)$$

$$\psi'(z) = \psi^I(\zeta) = T/2 \cdot \{ \zeta + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\zeta t} B(t) dt \} \dots \dots \dots (2.16)$$

ここに $A(t)$, $B(t)$ は切欠の形が上下対称であるから, t の実函数である。

さてこの問題の境界条件は、図-1 より

$$\zeta = i \eta \quad (\xi = 0) \quad \subset \subset \quad P_y + i P_x = 0$$

$$\zeta = a + i\eta \quad (\xi = a) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \quad P_y + iP_x = -T\alpha$$

すなわち

$$-\left[\bar{Z}(\zeta) \frac{\Phi'(\zeta)}{Z'(\zeta)} + \psi^I(\zeta) + \bar{\Psi}(\zeta) \right] = \begin{cases} 0 & (\zeta = i\eta) \\ -T\alpha & (\zeta = a + i\eta) \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad (2.17)$$

$$(i) \quad \zeta = i\eta$$

(2.17) に (2.7), (2.15), (2.16) を代入すると、 ε を含まぬ項は消える。 ε^2 以上の項は高次の微小量であるから無視すると、

$$-T\varepsilon/4 \cdot \left[i\eta \int_{-\infty}^{+\infty} te^{i\eta t} \{c(t) - A(t)\} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \{e^{i\eta t} 2B(t) + e^{-i\eta t} (\overline{A(t)} - \overline{C(t)})\} dt \right] = 0$$

$e^{-i\eta t}$ の項の t を $-t$ におきかえると

$$i\eta \int_{-\infty}^{+\infty} te^{i\eta t} \{c(t) - A(t)\} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta t} \{2B(t) + \overline{A(-t)} + \overline{c(-t)}\} dt = 0 \dots \dots \dots (2.18)$$

第一項の積分を部分積分し、 $\left[te^{i\eta t} \{c(t) - A(t)\} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$ とすると、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta t} \{2B(t) + A(t) - c(t) + \overline{A(-t)} + \overline{c(-t)} + tA'(t) - tc'(t)\} dt = 0$$

Fourier 変換により、

$$2B(t) + A(t) - c(t) + \overline{A(-t)} + \overline{c(-t)} + tA'(t) - tc'(t) \equiv 0 \dots \dots \dots (2.19)$$

(ii) $\zeta = a + i\eta$

(i) と同様に (2.17) に (2.7), (2.15), (2.16) を代入し、同じような手続をくりかえすと、

$$\begin{aligned} & e^{at} \left[(2at+1) \{A(t) - c(t)\} + 2B(t) + t \{A'(t) - c'(t)\} \right] \\ & + e^{-at} \{\overline{A(-t)} + \overline{c(-t)}\} \equiv 0 \dots \dots \dots (2.20) \end{aligned}$$

(2.19) を (2.20) に代入すると、 $A'(t)$, $c'(t)$, $B(t)$ が消える。かつ $A(t)$, $c(t)$ は実函数であるから
 $\overline{A(-t)} = A(-t)$, $\overline{c(-t)} = c(-t)$

これより

$$at e^{at} \{A(t) - c(-t)\} - \operatorname{sh} at \{A(-t) + c(-t)\} = 0 \dots \dots \dots (2.21)$$

この式は t の如何にかかわらず成立するから、 $t = -t$ とおきかえて

$$at e^{-at} \{A(-t) - c(-t)\} - \operatorname{sh} at \{A(t) + c(t)\} = 0 \dots \dots \dots (2.22)$$

上の 2 式より $A(-t)$ を消去し、(2.11) の $c(-t) = -e^{at} c(t)$ を利用し整理すると

$$A(t) = \frac{at - \operatorname{sh} at}{at + \operatorname{sh} at} c(t) \dots \dots \dots (2.23)$$

(2.23), (2.11) の関係を (2.19) に代入すると、

$$B(t) = \frac{c(t)}{(at + \operatorname{sh} at)^2} \{ (at)^2 (\operatorname{ch} at + e^{at}) + ate^{at} \operatorname{sh} at + (\operatorname{sh} at)^2 \} + \frac{t \operatorname{sh} at}{at + \operatorname{sh} at} c'(t) \dots \dots (2.24)$$

たゞし

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{1}{\varepsilon(1-e^{at})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{2n+2}}{n!(n+1)! 2^{2n+1}} t^{2n} \\ c'(t) &= \frac{1}{\varepsilon(1-e^{at})^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{2n+2}}{n!(n+1)! 2^{2n+1}} t^{2n-1} \{ate^{at} + 2n(1-e^{at})\} \end{aligned}$$

2-4 応力およびヒズミ

前節で求めた応力函数より、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{T\varepsilon}{4} R_e \left[-\bar{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{\xi t} \{A(t) - c(t)\} dt + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{\xi t} \{A(t) - B(t)\} dt \right] \\ \sigma_y &= T + \frac{T\varepsilon}{4} R_e \left[\bar{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{\xi t} \{A(t) - c(t)\} dt + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{\xi t} \{A(t) + B(t) - 2c(t)\} dt \right] \\ \tau_{xy} &= I_m \left[\frac{T}{2} + \frac{T\varepsilon}{4} \bar{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{\xi t} \{A(t) - c(t)\} dt + \frac{T\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{\xi t} \{c(t) - B(t)\} dt \right] \end{aligned}$$

ここで (2.23), (2.24) の $A(t)$, $B(t)$ を代入し、部分積分をおこない、 $\left[e^{\xi t} t e^{i\eta t} \frac{t^2 \operatorname{sh} at}{at + \operatorname{sh} at} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$ とし $f(t)$ の偶函数である性質を利用し積分範囲を $0 \sim \infty$ にかきあらためると、

$$\begin{aligned} \sigma_x/T &= \int_0^{\infty} \frac{t^2}{at + \operatorname{sh} at} \{(a-\xi) \operatorname{sh} \xi t - \xi \operatorname{sh}(a-\xi)t\} f(t) \cos \eta t dt \\ \sigma_y/T &= 1 + \int_0^{\infty} \frac{t \cdot f(t) \cos \eta t}{at + \operatorname{sh} at} \left\{ 2[\operatorname{ch} \xi t + \operatorname{ch}(a-\xi)t] - t[(a-\xi) \operatorname{sh} \xi t + \xi \operatorname{sh}(a-\xi)t] \right\} dt \\ \tau_{xy}/T &= - \int_0^{\infty} \frac{T \sin \eta t}{at + \operatorname{sh} at} \{\xi t \operatorname{ch}(a-\xi)t - (a-\xi)t \operatorname{ch} \xi t + \operatorname{sh} \xi t - \operatorname{sh}(a-\xi)t\} f(t) dt \end{aligned} \dots \dots \dots (2.25)$$

さて本研究の対象となるのは切欠により狭くなつた、断面の応力状態であり、この問題では x 軸上の応力分布

を求める必要がある。(2.25)に $\eta=0$ を代入すると、 $\tau_{xy}=0$ 、すなわち x 軸上で σ_x, σ_y は主応力となる。

(2.12)の関係を用い、 $at=2u, \xi/a=\lambda, \eta/a=\mu, r/a=\rho$ とおきかえてこの σ_x, σ_y をあらわすと、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x/T &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n 4 \rho^{2n+2}}{n! (n+1)!} \frac{u^{2n+2}}{2u + \sinh 2u} \{ (1-\lambda) \sinh 2\lambda u + \lambda \sinh 2(1-\lambda)u \} du \\ \sigma_y/T &= 1 + \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n 4 \rho^{2n+2}}{n! (n+1)!} \frac{u^{2n+1}}{2u + \sinh 2u} \{ \cosh 2\lambda u + \cosh 2(1-\lambda)u \\ &\quad - (1-\lambda)u \sinh 2\lambda u - \lambda u \sinh 2(1-\lambda)u \} du \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.26)$$

ここで $\int_0^\infty \frac{u^s e^{-2tu}}{2u + \sinh 2u} du = I_s t$ とする。

$$\text{ところで } \int_0^\infty \frac{e^{-2tu} u^s (e^{2u} - e^{-2u} + 4u)}{2u + \sinh 2u} du = \int_0^\infty e^{-2tu} u^s du = \frac{s!}{2^s t^{s+1}} (t>0)$$

$$\text{となるから, } I_s^{t-1} - I_s^{t+1} + 4I_s^{t+1} = \frac{s!}{2^s t^{s+1}}$$

t を $(t+1)$ におきかえれば

$$I_s^t = s!/2^s (t+1)^{s+1} + I_s^{t+2} - 4I_s^{t+1} = \frac{s!}{2^s (t+1)^{s+1}}$$

この近似度を更に高めて

$$I_s^t = s!/2^s (t+1)^{s+1} + s!/2^s (t+3)^{s+1} - (s+1)!/2^{s-1} (t+2)^{s+1} \dots\dots\dots(2.27)$$

この式を(2.26)代入すると、 n および λ のべき級数の和の形であらわされる。

そこで

$$\left. \begin{aligned} (b^2 + h^2)^{-3/2} &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n+1} n! (n+1)! b^{2n+3}} h^{2n} \\ (b^2 + h^2)^{-5/2} &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (2n+3)!}{3! 2^{2n} n! (n+1)! b^{2n+5}} h^{2n} \\ (b^2 + h^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 b^{2n+1}} h^{2n} = \frac{1}{b} - \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n+3} n! (n+1)! b^{2n+3}} h^{2n+2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.28)$$

の関係を利用し、展開式を逆にまとめると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x/T &= \rho^2 [(1-\lambda) \{ (1-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} + \{ (3-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} - 6(2-\lambda) \{ (2-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-5/2} \\ &\quad - \{ (1+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} - \{ (3+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} + 6(2+\lambda) \{ (2+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-5/2} \\ &\quad + \lambda \{ (2+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} + \{ (2-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} - 6(1+\lambda) \{ (1+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-5/2} \\ &\quad - \{ (2-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} - \{ (4-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} + 6(3-\lambda) \{ (3-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-5/2}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y/T &= 17 - 2(1-\lambda) \{ (1-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-1/2} - 2(3-\lambda) \{ (3-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-1/2} - 4\rho^2 \{ (2-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} \\ &\quad - 2(1+\lambda) \{ (1+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-1/2} - 2(3+\lambda) \{ (3+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-1/2} - 4\rho^2 \{ (2+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} \\ &\quad - 2(2-\lambda) \{ (2-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-1/2} - 2(4-\lambda) \{ (4-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-1/2} - 4\rho^2 \{ (3-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} \\ &\quad - 2\lambda \{ (\lambda^2 + \rho^2)^{-1/2} - 2(2+\lambda) \{ (2+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-1/2} - 4\rho^2 \{ (1+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} \\ &\quad - (1+\lambda)\rho^2 [\{ (1-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} + \{ (3-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} - 6(2-\lambda) \{ (2-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-5/2}] \\ &\quad - \{ (1+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} - \{ (3+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} + 6(2+\lambda) \{ (2+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-5/2} \\ &\quad - \lambda\rho^2 [\{ (\lambda^2 + \rho^2)^{-1/2} + \{ (2+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} - 6(1+\lambda) \{ (1+\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-5/2} \\ &\quad - \{ (2-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} - \{ (4-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-3/2} + 6(3-\lambda) \{ (3-\lambda)^2 + \rho^2 \}^{-5/2}] \end{aligned} \right\}$$

なお x, y 方向のヒズミ ϵ_x, ϵ_y は次式より計算される。

$$\left. \begin{aligned} E\epsilon_x/T &= \sigma_x - \nu\sigma_y \\ E\epsilon_y/T &= \sigma_y - \nu\sigma_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.31)$$

x 軸上の諸点の応力およびヒズミの値を $\rho=0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ の場合について求めて示したものが図-3および図-4である。

3 切欠試験片による実験

試験片はSS41(八幡製鉄)を用い、図-5に示すような両側両辺に半径 r の半円形の切欠をつけた。唯原板の圧延方向と採取された試験片との関係、並に試験片の化学的組成状態は明かにし得なかつた。試験片の製作は横河橋梁でおこない、実験は東大地下材料実験室でおこなつた。後で説明するように材料の降伏点を知る必要があるが、このため各試験片につきBrinell硬度試験(球径10mm, 荷重3000kg, 荷重速度3t/15sec)をおこなつて、従来の文献³⁾より単純引張による材の降伏点を推定した。測定値は表-2に示すように相当にばらついた。

図-3 (a) 最狭断面の応力分布

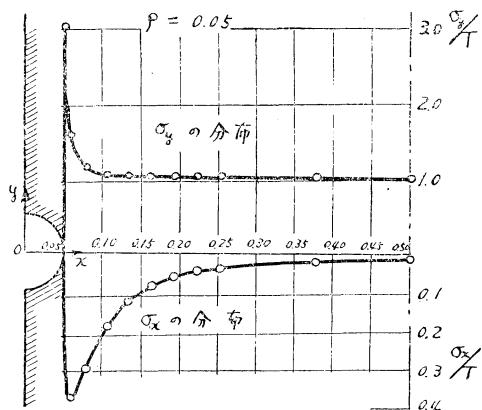


図-3 (b) 応力分布

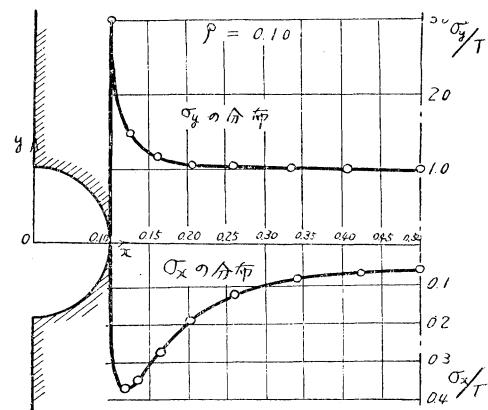


図-3 (c) 応力分布

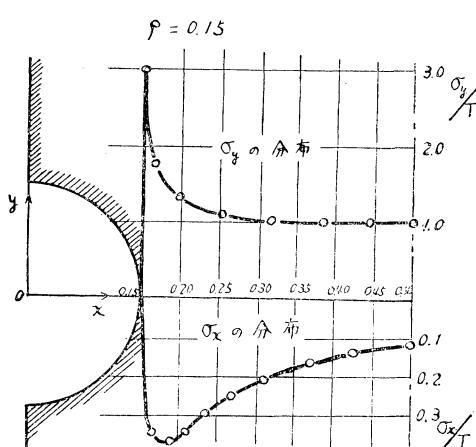


図-3 (d) 応力分布

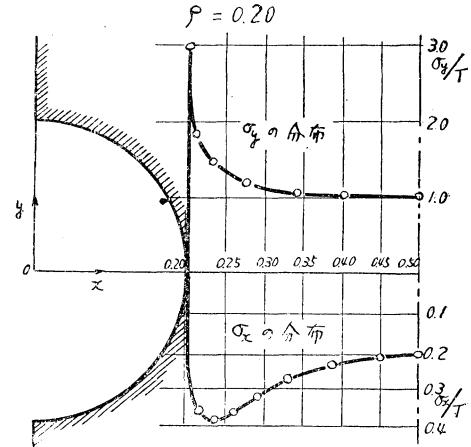


図-4 (a) 最狭断面のヒズミ

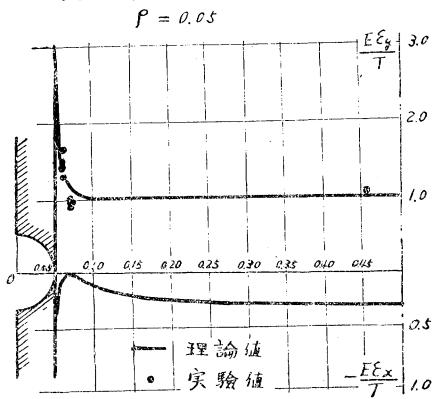


図-4 (b)

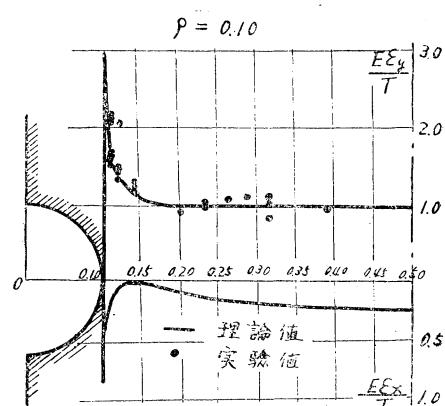


図-4 (c) 応力分布

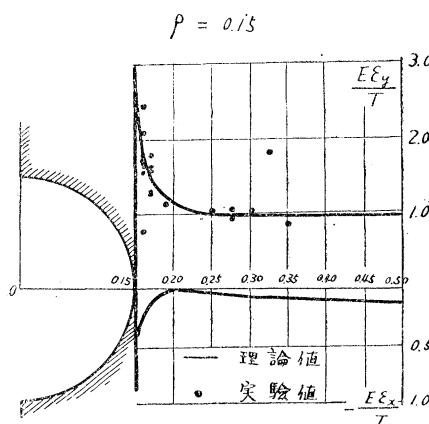


図-4 (d)

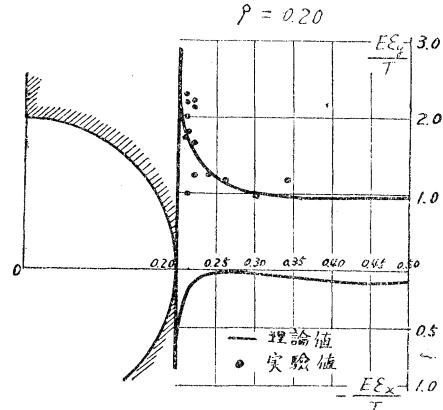


図-5

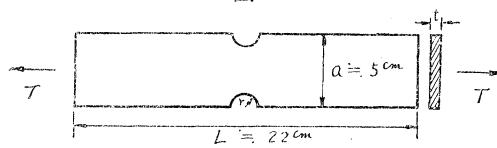


表-1

ρ	6 mm	9 mm	12 mm	15 mm
0.05	11	21	31	41
0.10	12	22	32	42
0.15	13	23	33	43
0.20	14	24	34	44

なお試験片の記号は表-1に示すよう、厚さと切欠比 $\rho = r/a$ で区別し、なお試験片全幅を一定とするもの（記号 *a*, *b* で示す）試験片純幅を一定とするもの（記号 *c*, *d* で示す）の形式を採用した。

各試験片につき（切欠半円の中心を結ぶ線上の任意の2カ所において、標点距離 20 mm のオクイゼンヒズミ計を使用し、引張荷重の途中におけるその部分のヒズミを測定した。なおこの2カ所は σ_x の最大値を示す点より切欠側と軸心側にわけて設けるようにした。この測定の結果を図-6に示す。図は切欠にごく近い部分が先づ応力と共にヒズミの増加する割合が大となり、その部分が降伏したことを示す。この場合軸心に近い方は更に応力が増大してゆくが、急にその曲線が折れる傾向を示す。この状態を以て降伏と考える。ここで切欠部分が降伏すると、この部分はこれ以上応力分担しなくなるため、他の部分に余計な応力がかかり、図-3に示した応力図は変更される。しかしこのような応力分担しない部分の幅は荷重を伝達する全幅に比しごく少であつて、切欠隣接部分の応力分布にいく分の影響を与えるが、著しいヒズミの進行しない限りは内部の応力分布まで影響をおよぼすと見なすにおよばない。したがつて以下の考察には一応この影響を無視した。

4. 降伏条件に対する検討

(1.5) 式より、この場合には $\sigma_{Y,P}$ を材の純引張による降伏点とすると、

$$\text{最大主応力説}, \quad \sigma_y = \sigma_{Y,P}$$

$$\text{最大ヒズミ度説}, \quad \sigma_y - \nu\sigma_x = \sigma_{Y,P}$$

$$\text{最大セン断応力説}, \quad \sigma_y - \sigma_x = \sigma_{Y,P}$$

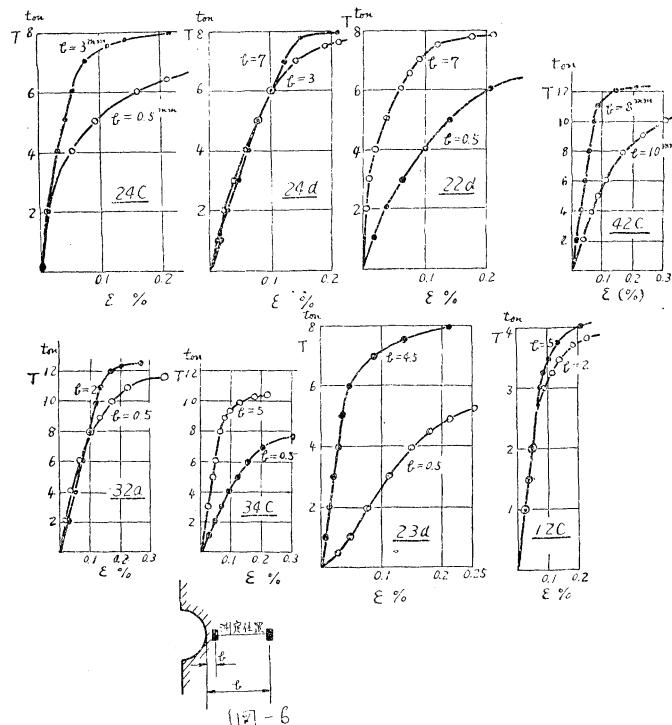
$$\text{最大変形エネルギー説}, \quad \sigma_y^2 + \sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y = 2\sigma_{yield}^2$$

(2.25) より σ_x , σ_y は T に比例するから、これらの条件より材の任意の点が降伏状態に達したときの、試験片全体にかかる引張力 T と $\sigma_{Y,P}$ の比はある特有な値を示すことがいえる。この1例を図-7に示す。明かに最大セン断応力がもつともゆるく、最大ヒズミ度説、最大変形エネルギー

表-2

試片番号	硬 度	試片番号	硬 度
11 a	152	43 a	126
11 b	163	43 b	149
12 a	152	44 a	140
12 b	149	44 b	114
13 a	143	12 c	123
13 b	143	12 d	116
14 a	143	13 c	109
14 b	137	13 d	109
21 a	149	14 c	99.5
21 b	179	14 d	107
22 a	149	22 c	137
22 b	170	22 d	143
23 a	152	23 c	134
23 b	170	23 d	137
24 a	134	24 c	121
24 b	167	24 d	128
31 a	166	32 c	123
31 b	134	32 d	123
32 a	143	33 c	123
32 b	149	33 d	128
33 a	140	34 c	123
33 b	131	34 d	123
34 a	134	42 c	137
34 b	128	42 d	140
41 a	111	43 c	118
41 b	140	43 d	131
42 a	131	44 c	121
42 b	99.2	44 d	131

図-6 荷重とヒズミの進行状況



間は大体比例関係が見られる。この問題においては $\sigma_{Y,P}$ を比較的低くみつもつた方が安全である。このため $\sigma_{Y,P} = 1/2 \cdot \sigma_b$ とみなして、表-2 の測定値より各試験片の単純引張の降伏点を推定した。なおこの試験片の弾性係数は比較的応力が x 方向に一定となる中心附近の測定値より推定し $E = 1.95 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ とした。この値を他の測定値に適用し、実験値と理論値の比較をおこなつた。これは図-4 に見られるように比較的全断面に通じ、よく一致した傾向を見た。従つて一応この値を採用することにした。この値は $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ に比し低い値を示すが、測定器の knife edge がある幅をもつためと、比較的降伏点に近い所の値を採用した結果と思う。

この E と $\sigma_{Y,P}$ を用い、図-6 より得られた降伏時の T の値を採用し、 $T_0/\sigma_{Y,P}$ を計算し図示すると、図-

図-8 (a)

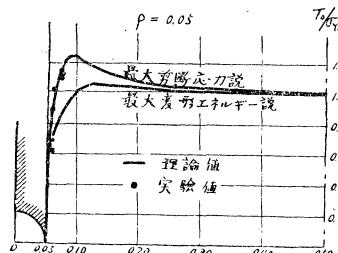


図-8 (b)

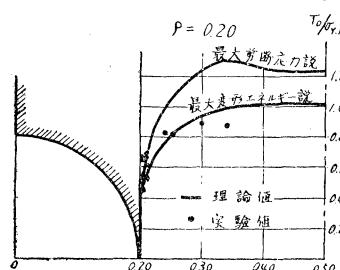
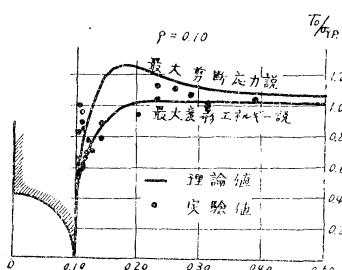
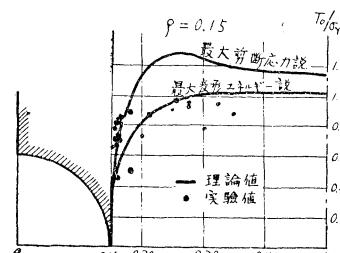
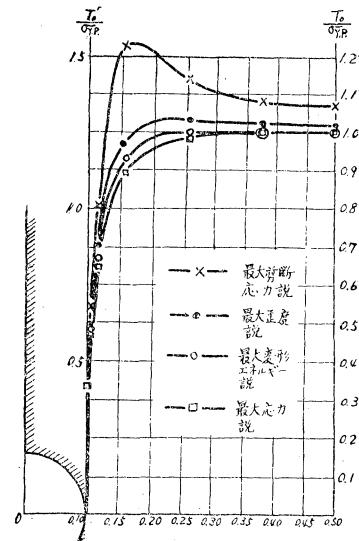


図-7



説、最大主応力説の順になつてある。実験の検討にあたつては、 $\sigma_{Y,P}$ を見つける必要がある。

引張強さ σ_b と Brinell 硬度 H_B の間に ³⁾ 従来の記録より $\sigma_b = 0.355 H_B$ が与えられている。一方 σ_b と $\sigma_{Y,P}$ の

ようになる。これは切欠の近く近傍の比較的自由に変位し得る部分では、高い降伏状態を示し、最大セン断応力説に近い条件を示す。一方内部の 2 軸応力状態が強調される部分では逆に低い降伏状態を示し、最大変形エネルギー説に近い条件を示す。これは比較的低い $\sigma_{Y,P}$ の値を採用したのにも拘らず、全体としてよく似た傾向を示す。

これより変位し易い場においては最大剪断応力説を適用することができるが、比較的応力状態が複雑となり、それによつて変位が拘束されるような場合には最大変形エネルギー説を適用

すべきであり、I.S.O の提案の(1.1)に示す合成応力による設計は妥当と考えられる。なお最大ヒズミ度説および最大応力説がこの最大変形エネルギー説に近い条件を示すのは注目してよいであろう。

あとがき

以上一つの試験片によつて比較的変位の自由な場所の降伏条件と、変位の拘束された場所の降伏条件を比較するため半円切欠を持つ試験片を採用した。この試験片は比較的本来の目的を満足し得るものであつた。唯ここで用いたオクイゼンヒズミ計にしても、後に補足実験した抵抗線ヒズミ計にても、ヒズミ計に幅をもつためこのような局部的な影響を見るためには幾分の障害をもつた。大型の試験片を採用することによりこれらの欠点が除かれるとと思う。なおこの試験は以後に発展すべき低温における切欠の影響の前提をなすものである。

本研究は昭和26年度東大土木工学科卒業の広井、江島両君の卒業論文において手がけたもので、その後昭和30年卒業の後藤君により補足してもらつた。共に鉄道で活躍しており、ここに記し3君の努力を多としたい。本研究は文部省科学試験研究費によつた。

参考文献

- 1) 仲 威雄：溶接継手の設計並びに計算 熔接界第6巻第7号または
仲 威雄：静的応力を受ける溶接構造の計算（熔接界第7巻第10号）
- 2) 森口繁一：複素函数を利用した応用弹性学（未刊）
- 3) Hollomon Jaffe : Ferrous Metallurgical Design
三島徳七：金属材料及其熱処理
日本学術振興会：金属材料III 金属総論

(昭.30.11.21)

土木学会論文集 第33号 正誤表

曲げモーメントと軸圧縮力を設ける部材の安定

頁	カ 所	誤	正
44	図-1 の説明	bt	C_{bt}
44	15 行目	8割位の低下	8割位に低下
45	12 行目 (2.1)	(2.1)	(2.1) _a
"	"	M_x	M_y
"	13 行目 (2.2)	(2.2)	(2.1) _b
"	"	M_y	M_x
"	17 行目	$\partial M_y / \partial z$	$\partial M_x / \partial z$
48	36 行目	は z に……	は z に……
56	表 - 3	09.7	97.0