

梯子ケタの荷重配分について*

正員星治雄**

要旨 箱ヶタを使用する梯子ヶタ橋構造について、横ヶタによるタワミの配分作用など2,3の、定性的性質、並びに荷重配分による近似的簡易計算法について述べたものである。

1. 緒 言

著者は鋼橋の自重の軽量化、ならびにその合理的設計、計算法の一環として、並列ケタ橋構造並びに床組における荷重配分について考究している。橋梁の軽量化に関する研究としては、京都大学、小西教授等によつて、既にその成果の一部が発表されている。また合理的設計に關係ある部門においても若干の研究が発表されているが、まだ考察すべき分野が残されていると思われる。その一端として、こゝに表記の問題を取り扱つた。

箱ヶタを並列したヶタ橋、格子ヶタ橋などの場合の静的計算は、これを正確に行えば、それは結局格子の解法に帰するわけであつて、相当煩雑なる手数を要し、実用に適する精密理論式の誘導は困難であり、個々の場合について厳密解を求めるることは工学的にむだな努力である。それで格子構造に対しては、近似的簡易式が誘導されている¹⁾。要はかかる構造の有する定性的性質を見究めるとともに、それらによつて信頼性があつて精度の高い実用式を誘導することが必要である。

本文は以上の見地より、最も普遍的と思われる並列ケタ構造をとりあげ、先にその一計算法を提示した²⁾ところに基づき、特に幅員の広い街路橋を除き、道路橋の普通の幅員より考え、2本の箱ケタを並列する構造の利用される場合が多いと考えられるので、こゝに引き続き箱ケタ2本を主ケタとして並列した構造を対象として、若干の定性的性質を述べ、その1簡易計算法として、負載荷重を配分して基本的単純化の計算に帰せしめる方法を提案する。

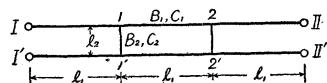
2. 計算方法

次項以下の資料を得るために、主ケタおよび横ケタの寸法比、剛性比を変化させて多数の梯子ケタを解いたが、その計算方法の概要は次のとおりである。まず各場合に対する梯子ケタのツリアイ条件式を作成し³⁾、これによる連立1次方程式を作表し、その逆行列を求めることによつて⁴⁾、未知変形量 $\delta, \theta_x, \theta_y$ を計算した。この際、行列は対称行列であるから、運算は比較的簡単であつて、求める逆行列も対称行列になるから、それによつて計算の正否を驗することもできて好都合である。

3. タワミの配分

任意の梯子ケタにおいて、主ケタ格間長 l_1 、主ケタ中心間隔 l_2 とし、曲げ剛性および捩り剛性は、それぞれ、主ケタ $B_1 = EI_1, C_1 = GJ_1$ 、横ケタ $B_2 = EI_2, C_2 = 0$ とする(図-1)。すると主ケタのタワミの配分の割合は $l_2/l_1, B_2/B_1$ の値によって変化する。その状況を説明するのに簡単のため、2 横ケタの場合について行う。

図-1



(a) l_2/l_1 の変化によるタワミの配分の状況

主ケタおよび横ケタの断面の曲げ剛性の比 B_2/B_1 を一定に保ち、 I_2/I_1 を変える (I_1 を一定として I_2 を変化さす) と両主ケタにおけるタワミの配分の割合が変つてくる。その状況を知るために、単一集中荷重 $P=10\text{ t}$ が任意の格点 1 に作用するものとして、その点のタワミ δ_1 の逆数 $1/\delta_1$ をとつて考える。

いま $B_1 = 32 \times 10^{12} \text{kg}\cdot\text{cm}^2$, $B_2 = 0.9 \times 10^{12} \text{kg}\cdot\text{cm}^2$, $C_1 = 8 \times 10^{12} \text{kg}\cdot\text{cm}^2$, $C_2 = 0$ の場合に対し $l_1 = 20 \text{ m}$ とし l_2 を $2 \text{ m} \rightarrow 20 \text{ m}$ の間に変化させて $1/\delta_1$ を計算した結果は図-2 のとおりであり、その値は $l_2/l_1 = 0 \sim \infty$ の間で $1/\delta_1 = 1.8 \sim 0.9$ の範囲で増減する。

これを近似的に双曲線函数を利用して表現する。そこで $1/\delta_1$ を y 軸に、 l_2/l_1 を x 軸にとつて、直交座標軸 x, y によれば

こゝに ϕ は B_1, B_2, C_1, C_2 の相互関係による係数である。いま $I_2/I_1=0.3$ の場合について ϕ の値を計算すると、 $\phi=2.837$ となる。近似的に $\phi=2.8$ を使用して、種々異なる I_2/I_1 の値について上式より $y=1/\delta_1$ を計算すると、その誤差は $I_2/I_1=1$ において約 1.6% で、 $I_2/I_1<1$ においてはこれより小であつて、式(1)は十分実用的である。

$B_1 = 32 \times 10^{12} \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$ に対し、 $B_2 = 0.1125 \times 10^{12} \text{ kg}\cdot\text{cm}^2 \sim 3.6 \times 10^{12} \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$ の間の 6 種の値に対し、図-2 に相

* 土木学会・昭和 30 年度年次大会において一部発表

**徳島大学教授、工学部土木工学教室

図-2

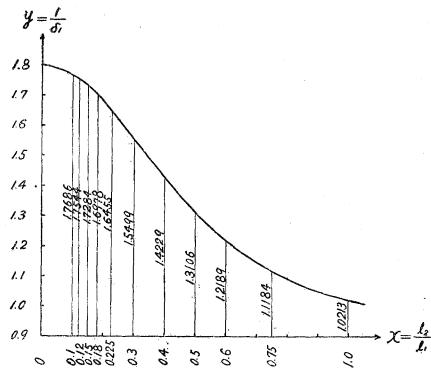
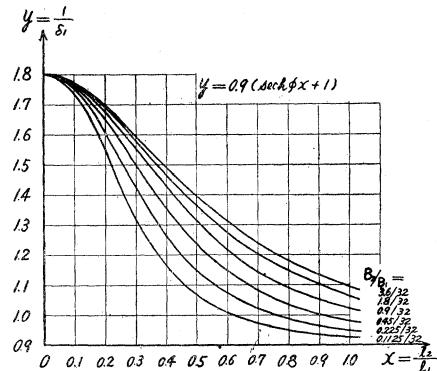


図-3



当する曲線を求めた結果は図-3 のとおりである。

次に δ_1/δ_2 の割合も l_2/l_1 によつて変化し、1/0.875 から始まり、次第に大となり、最大値を経て、またもとの1/0.875 に終る。その状況は B_1/B_2 が $(0.1125 \sim 3.6) \times 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ の範囲において図-4 のとおりである (0.875 = α であつて、 α について図-8 参照)。これは δ_1/δ_2 を y 軸に、 l_2/l_1 を x 軸にとれば

$$y = \frac{1}{0.875} (\operatorname{sech} \phi x - \operatorname{sech} \psi x + 1) \quad \dots \dots \dots (2)$$

として近似的に表現できる。ただし ψ の値は図-4 の中に記したとおりである。

図-4

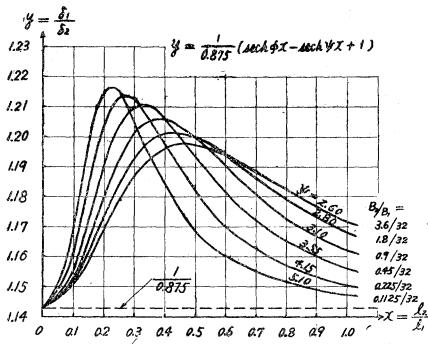
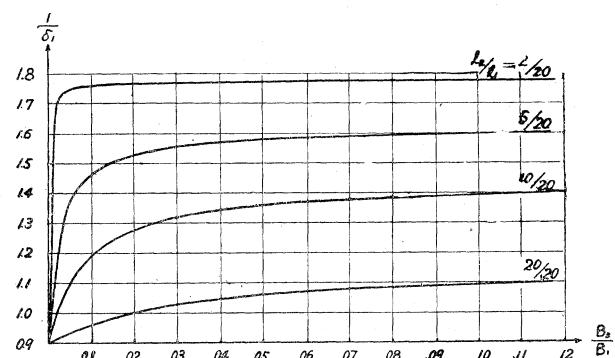


図-5



(b) B_2/B_1 の変化によるタワミの配分の状況

l_2/l_1 を一定にして、 B_2/B_1 を変えるときも両主ケタのタワミの配分の割合は変つてくる。その状況は $l_2/l_1=0.1 \sim 1.0$ に対して図-5 のようである。これらの曲線を見れば、ある程度以上は、横ケタの断面の曲げ剛性を増しても、その増加による主ケタのタワミの配分におよぼす効果は小であることを示している。この事実は l_2/l_1 が小であるほどいちぢらしい。これらの曲線も (a) 項と同じ条件の下では、 $B_2/B_1=0 \sim \infty$ において、 $1/\delta_1=0.9 \sim 1.8$ の間の値をとることはいうまでもない。

(c) ϕ の値について

式 (1) において B_2/B_1 を一定にすれば、それに応じた ϕ の値が対応する。それでそれぞれの B_2/B_1 の値に対応する ϕ の値を求めて、これを図示すると図-6 のようになる。

(d) 総括

図-6 によつて ϕ を求め、この ϕ の値を使用して図-3 または式 (1) から δ_1 を求める。次に図-4 または式 (2) を利用して δ_2 を求める。さらに図-7, 8 に示した記号を使用して

$$\delta_1^0 = \delta_1 + \delta_{1'}$$

$$\delta_2^0 = \delta_2 + \delta_{2'}$$

によつて、すべての格点のタワミを求めることができる。

4. 格点の配分荷重

梯子ケタの主ケタと同一断面、同一支間であつて、梯子ケタの横ケタの位置と同じ位置に格点を有する単純バリ

図-6

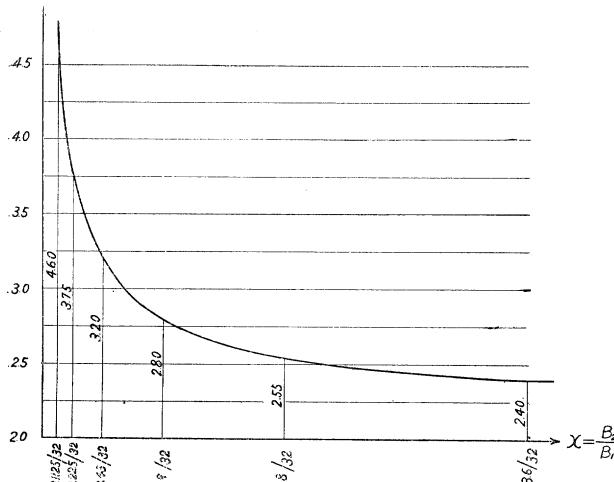


図-7

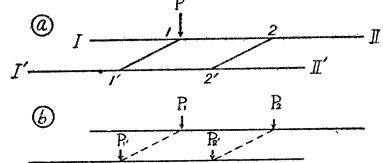
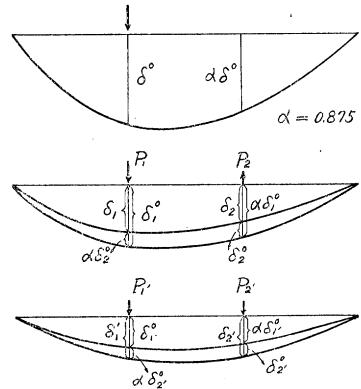


図-8



をもとの梯子ケタに対する基本的単純パリと称することにする。

単純支持の梯子ケタにおいて、両主ケタのタワミ曲線の縦距を加え合わせると、その基本的単純パリの同じ荷重によるタワミ曲線と一致する（連続支持の場合、固定支持の場合にも同様な関係が成立する）。それで任意の格点荷重を受けた場合の両主ケタの各タワミ曲線を、別々の2つの単純パリが同じタワミ曲線を生じたものとして、逆にそれに対応する荷重を求める。このようにして荷重が求めれば、その置換荷重によつて基本的単純パリに生じるタワミ曲線は、もとの荷重によつて梯子ケタに生じるタワミ曲線と一致するから、断面力の計算は近似的に単純パリとして行うことができて、その計算過程が簡易化される。

図-7において、④はもとの状態で、⑤はその基本的単純パリに置換荷重が作用した状態を示し、この両者のタワミ曲線は一致する。さてタワミ曲線を図-8のように分解して考える。こゝで記号は次のとおりである。

$\delta_1, \delta_2, \delta_{1'}, \delta_{2'} :$ 格点1に作用する荷重 $P=1$ による梯子ケタの各相当格点のタワミ

$\delta^0 :$ 荷重 $P=1$ による基本的単純パリの荷重作用格点のタワミ

$\alpha :$ 同上の荷重作用格点でない格点のタワミ量の δ^0 に対する割合、ハリの支間が3等分されている場合は $\alpha=0.875$

$\delta_1^0, \delta_2^0, \delta_{1'}^0, \delta_{2'}^0 :$ 基本的単純パリにそれぞれ荷重 $P_1, P_2, P_{1'}, P_{2'}$ が別々に単独で作用したときの荷重作用格点のタワミ

$P_1, P_2, P_{1'}, P_{2'} :$ それぞれ添字の位置に作用する基本的単純パリの置換荷重すると図-8 から次の関係式が成立する。

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1 = \delta_1^0 + \alpha\delta_2^0 \\ \delta_2 = \alpha\delta_1^0 + \delta_2^0 \\ \delta_{1'} = \delta_{1'}^0 + \alpha\delta_{2'}^0 \\ \delta_{2'} = \alpha\delta_{1'}^0 + \delta_{2'}^0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

上式に $\delta_1^0 = P_1\delta^0, \delta_2^0 = P_2\delta^0, \delta_{1'}^0 = P_{1'}\delta^0, \delta_{2'}^0 = P_{2'}\delta^0$ を入れ、これらから $P_1, P_2, P_{1'}, P_{2'}$ を求めると

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = \frac{1}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\delta_1 - \alpha\delta_2}{\delta^0}, \quad P_{1'} = \frac{1}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\delta_{1'} - \alpha\delta_{2'}}{\delta^0} \\ P_2 = \frac{1}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\delta_2 - \alpha\delta_1}{\delta^0}, \quad P_{2'} = \frac{1}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\delta_{2'} - \alpha\delta_{1'}}{\delta^0} \end{array} \right\} \quad \dots \quad (4)$$

なお、こゝで $\delta_1 + \delta_{1'}, \delta_2 + \delta_{2'}$ はそれぞれ基本的単純パリの格点1に单一集中荷重 $P=1$ が作用したときの、点1および2におけるタワミに等しいから

$$\alpha(\delta_1 + \delta_{1'}) = \delta_2 + \delta_{2'}$$

さらに式(4)において $P_2 + P_{2'}$ を求めると

$$P_2 + P_{2'} = \frac{1}{(1-\alpha^2)\delta^0} [\alpha(\delta_1 + \delta_{1'}) - (\delta_2 + \delta_{2'})]$$

となるから、これを上式に適用すると

$$P_2 + P_{2'} = 0$$

となる。

3横ケタ以上の場合には、図-9に示すように基本的単純バリにおけるタワミの記号を定め、 α については、一般的な表現を次式のようにする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_{31}^0}{\delta_{11}^0} &= \frac{\delta_{13}^0}{\delta_{33}^0} = \alpha_{13} = \alpha_{31} \\ \frac{\delta_{21}^0}{\delta_{11}^0} &= \frac{\delta_{23}^0}{\delta_{33}^0} = \alpha_{12} = \alpha_{32} \\ \frac{\delta_{12}^0}{\delta_{22}^0} &= \frac{\delta_{32}^0}{\delta_{22}^0} = \alpha_{21} = \alpha_{23} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

そして2横ケタの場合と同様にして置換荷重を求める

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{\delta_1^0} \cdot \left| \begin{array}{ccc} \delta_1 & 1 & \alpha_{31} \\ \delta_2 & 1/\alpha_{21} & \alpha_{12} \\ \delta_3 & 1 & 1 \end{array} \right| \\ P_2 &= \frac{1}{\delta_1^0} \cdot \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & 1/\alpha_{21} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & 1 & 1 \end{array} \right| \\ P_3 &= \frac{1}{\delta_1^0} \cdot \left| \begin{array}{ccc} 1 & \delta_1 & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \delta_2 & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \delta_3 & 1 \end{array} \right| \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

($P_{1'}, P_{2'}, P_{3'}$ も同じように表現できる)

以上求めた置換荷重において、2横ケタの場合と同じように

$$P_2 + P_{2'} = 0$$

$$P_3 + P_{3'} = 0$$

が成立する。

5. 計算例

以上において、2横ケタを有する梯子ケタにて、主ケタが $l_1 = 20\text{m}$, $B_1 = 32 \times 10^{12}\text{kg}\cdot\text{cm}^2$ であるものを基準としての資料を提示したのであるが、 l_1 および B_1 が異なる値を有する場合には次のように取り扱う。

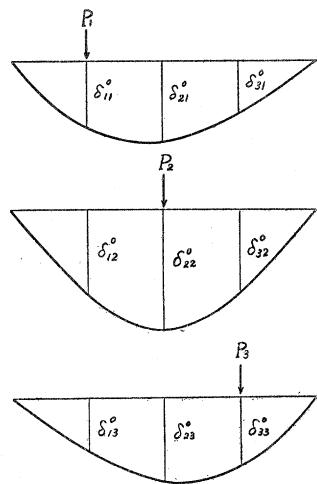
前述のように $\delta_1 + \delta_{1'} = \delta_{11}^0$ であつて、単純バリにおいてそのタワミは、ハリの断面の曲げ剛性に逆比例し、支間の3乗に正比例する関係は、そのまま梯子ケタにも適用できる。例えれば、 $3l_1 = 3 @ 20\text{m} = 60\text{m}$, $l_2 = 6\text{m}$ の梯子ケタの任意点のタワミは、 $3l_1 = 3 @ 40\text{m} = 120\text{m}$, $l_2 = 12\text{m}$ である同じケタ断面を有する梯子ケタの、その相当点のタワミの $1/8$ である。また同寸法であれば曲げ剛性が2倍になれば、そのタワミは $1/2$ になる。

以上のような関係から、前述の資料は基準として示した寸法、断面と異なる寸法、断面を有するものに対しても適用できるのである。その一例として、次のような寸法、断面および荷重をもつ梯子ケタについて述べる。

支間 : $3l_1 = 3 @ 30\text{m} = 90\text{m}$

主ケタ間隔 : $l_2 = 7.5\text{m}$

図-9



曲げ剛性： 主ケタ $B_1 = 40 \times 10^{12} \text{kg}\cdot\text{cm}^2$

横ケタ $B_2 = 1.0 \times 10^{12} \text{kg}\cdot\text{cm}^2$

捩り剛性： 主ケタ $C_1 = 10 \times 10^{12} \text{kg}\cdot\text{cm}^2$

横ケタ $C_2 = 0$

荷重： 格点 1 に作用する単一集中荷重 $P = 10 \text{t}$

以上から $I_2/I_1 = 0.25$, $B_2/B_1 = 0.025$

図-6 により ϕ を求めると

$$\phi \approx 2.85$$

式(1)を適用して、 $\operatorname{sech} \phi x = 0.7906$ になるから

$$\frac{1}{\delta_1} = 1.61154 \quad \therefore \delta_1 = 0.6205$$

これは $I_1 = 20 \text{m}$, $I_2 = 5 \text{m}$, $B_1 = 32 \times 10^{12} \text{kg}\cdot\text{cm}^2$, $B_2 = 0.8 \times 10^{12} \text{kg}\cdot\text{cm}^2$ の場合のタワミであるから、本題に対しても、

$$\delta_1 = 0.6205 \times \left(\frac{30}{20} \right)^3 \times \frac{32}{40} = 1.67535 \text{ cm}$$

と修正する。次に図-4 または式(2)より

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} \approx 1.194 \quad \therefore \delta_2 = 1.40314 \text{ cm}$$

(直接正確に計算した結果は $\delta_1 = 1.66795 \text{ cm}$, $\delta_2 = 1.40465 \text{ cm}$ である)

ところで、基本的単純バリにおける点 1,2 相当点のタワミは $\delta_1^0 = 3 \text{ cm}$, $\delta_2^0 = 0.875\delta_1^0 = 2.625 \text{ cm}$ であるから

$$\delta_{1'} = \delta_1^0 - \delta_1 = 1.32465 \text{ cm}, \quad \delta_{2'} = \delta_2^0 - \delta_2 = 1.22186 \text{ cm}$$

以上で各格点のタワミが求められた。

次に式(4)により置換荷重を求める

$$P_1 = 6.366 \text{ t}, \quad P_2 = -0.893 \text{ t}$$

$$P_{1'} = 3.634 \text{ t}, \quad P_{2'} = 0.893 \text{ t}$$

6. 結 言

- (1) 以上提示した図または近似式を利用して、梯子ケタを近似的に、簡易に解き得ることを示した。
- (2) 上述のように、 B_2/B_1 がある程度以上に大きくなつても、すなわちある程度以上は、それ以上に横ケタ断面を強化しても、タワミの配分におよぼす効果は小である。
- (3) 横ケタの数の増加は、タワミの配分におよぼす効果から考えると、その影響は比較的小である。
- (4) 2,3 項より横ケタの数は 2~3 程度で十分であり⁵⁾、その断面も曲げに耐え得る、軽易なる断面でよい。
- (5) I_2/I_1 が大になると、タワミの配分の効果はいちじるしく減少する。
- (6) 本文に示した図における B_2/B_1 および I_2/I_1 の範囲は、実際の橋梁における、主ケタと横ケタとの断面比、寸法などを十分に包含するものであると思われる。
- (7) 以上において捩り剛性 C_1 の変化の影響を省略したが、これは断面の変化に伴い、曲げ剛性 B_1 とほぼ同じように変化するものと仮定して、近似的にその影響を無視した。
- (8) 本文は任意数の横ケタを有する梯子ケタの場合に対し、一般的に適用するのを目的としたのでなく、実用的の部分について考究したものであるが、定性的性質はその範囲外においても、同様の傾向を示すものと考えられる。

附 記 任意断面の断面力の影響線の作成については省略して、以上のとおりまとめたが、これについての詳細は引続いて別に発表する予定である。

最後に、多大の御助言をいたいた、京大、小西教授、計算、図面作成に協力していたいた、当教室、湯浅助手に厚く謝意を表するものである。

参 考 文 献

- 1) たとえば、Leonhardt-Andrä : Die vereinfachte Trägerrostberechnung.
- 2) 星 治雄 : 箱桁を応用した橋梁構造とその一計算法について ; 土木学会誌, 39巻5号, pp 262-265, 1954.
- 3) 星 治雄 : 橋梁床組の計算について ; 土木学会誌, 37巻8号, pp 353-357, 1952.
- 4) たとえば、柴垣和三雄 : 計算法 ; 第2章
- 5) 上記 Leonhardt の著書に同じような意味のことが述べられている。(s. 36) (昭.30.12.7)