

合成格子ケタ橋の自由振動周期について

正 員 成 岡 昌 夫*

准 員 平 井 一 男**

1. はしがき ケタ橋構造の自由振動周期については、従来主として、ケタの自由振動周期の計算式をもつて論じていたようである。これに対して、山口大学米沢助教授は、直交異方性板理論による自由振動周期の計算公式を提案し、実測値と理論値の一一致することを述べている。しかし、直交異方性板理論の適用において問題となる点、すなわち $H/\sqrt{B_x B_y}$ の値のとり方、端辺条件のとり方について、若干疑問が残されているし、なおケタ橋構造の平面形（細長いか、あるいは正方形に近いかなど）と公式の適用との関連性について、なお検討すべき余地が残されているようである。

この見地にかんがみ、著者は、関西において最近竣工した二つの合成格子ケタ橋、坂越橋（兵庫県赤穂市）、新喜多大橋（大阪市城東区）について、その自由振動周期を測定し、これを計算値と比較し、種々検討を加えたので、ここに報告したいと思う。

2. 測定の対象とした橋梁の概要と自由振動周期の測定値

a) 坂越橋 スパン $l=15\text{ m}$, 有効幅員 6 m , 主ケタ数 4 本, 主ケタ間隔 1.7 m (縁ケタ間距離 $2b=5.1\text{ m}$), 荷重分布用横ケタ 1 本 (スパン中央に配置), $J_R=5.098 \times 10^6 \text{ cm}^4$ (コンクリートに換算, $n=10$), $J=4.621 \times 10^6 \text{ cm}^4$, $\bar{J}=0.998 \times 10^6 \text{ cm}^4$, $J_R/J=1.10$, 床板の厚さ 15 cm .

b) 新喜多大橋 スパン $l=20\text{ m}$, 有効幅員 22 m , 主ケタ数 12 本, 主ケタ間隔 1.8 m (縁ケタ間距離 $2b=19.8\text{ m}$), 荷重分布用横ケタ 3 本 (5 m 間隔に配置), $J_R=9.060 \times 10^6 \text{ cm}^4$ (コンクリートに換算, $n=7$), $J=7.655 \times 10^6 \text{ cm}^4$, $\bar{J}=4.400 \times 10^6 \text{ cm}^4$, $J_R/J=1.19$, 床板の厚さ $=18\text{ cm}$.

両橋はともに合成格子ケタ橋で、スパンに大差はないが、有効幅員が相当異なつており、横ケタ数も 1 本と 3 本のよう違つてある。これらの点が、比較に当つて、おもしろい点である。

実測にあたつては、スパン中央断面において、坂越橋は 4 本のケタすべてに、新喜多大橋では 12 本のケタのうち端から $1, 2, 4, 6, 7$ 本目のケタに、インダクタンス型あるいはサーチコイル型変位計をとりつけ、トラックを走行せしめて、動的タワミをオシログラフで記録した。荷重が橋梁を通過し終つてからの自由振動の記録から、坂越橋の自由振動周期として 0.136 sec (5 個の平均値)、新喜多大橋のそれとして、 0.127 sec (2 個の平均値)を得た。

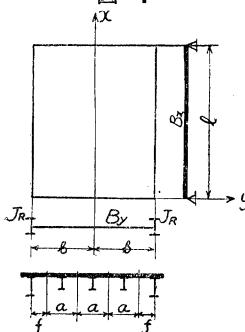
3. M.T. Huber の直交異方性板の基礎微分方程式による解法 公式の誘導 いま、正規振動のみを考えることとし、自由振動の円振動数を p とすれば、タワミ曲面の方程式は次のようにある。

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho p^2 w \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $B_x (B_y) = x(y)$ 方向の板剛度、 H = 板の捩り剛度、 ρ = 単位面積あたりの密度である。

さて、問題となるのは、 $\kappa = H/\sqrt{B_x B_y}$ の値の仮定である。W. Corneliusによれば、 κ の値は、合成格子ケタでは 0 と 1 との中間であるようであるが、ここでは、両極端をとつて、 $\kappa=0$ および $\kappa=1$ の二つの場合を考える。

図-1



なお、以下の計算では、ポアソン比 $\nu=0$ と仮定する。

板が $x=0$ および $x=l$ で単純支持されると仮定し(図-1 参照)、 w の式として、次のようにおく。

$$w = \sum Y(y) \sin(n\pi x/l) \quad \dots \dots \dots (2)$$

なお、次の記号を用いる。

$$\alpha^4 = (B_x/B_y)(n\pi/l)^4, \phi = \{(EJ_R/B_x) - f\}\alpha$$

a) $\kappa=0$, $(\rho p^2/B_x) \cdot (l/n\pi)^4 - 1 = r^4 > 0$ の場合、対称振動のみをとれば、

$$w = \sum (A \cosh ry + B \cos ry) \sin(n\pi x/l), r = \alpha r \quad \dots \dots \dots (3)$$

板が $y=\pm b$ において、縁ケタで弾性ハリ支持されているものとすれば、境界条件は $y=b : \partial^2 w / \partial y^2 = 0, EJ_R (\partial^4 w / \partial x^4) + q = 0$ (q = 反力)，
である。上式に (3) 式を代入すれば

* 工学博士、京都大学教授、工学研究所

** 京都大学工学研究所

$$\begin{aligned} A \cosh rb - B \cos rb &= 0 \\ \phi(A \cosh rb + B \cos rb) - r^3(A \sinh rb + B \sin rb) &= 0 \end{aligned}$$

従つて、求める振動数方程式は

b) $\kappa = 0, 1 - (\rho p^2/B_x)(l/n\pi)^4 = \gamma' > 0$ の場合、対称振動のみをとり、全く同様にして、次の振動数方程式を得る。

ただし、 $r' = \beta r$, $\beta = \alpha/\sqrt{2}$ である。

c) $\kappa = 1, 1 - \{(\omega p^2/B_x)(l/n\pi)^4\}^{1/2} > 0$ の場合、対称振動のみをとり、次の振動数方程式を得る。

$$\phi(r^2 - r'^2) \cosh rb \cosh r'b + r^2 r'^2 (\gamma \sinh rb \cosh r'b - \gamma' \cosh rb \sinh r'b) = 0 \quad \dots \dots (6)$$

ただし、 $r = dr$, $r' = dr'$

$$r^2 = 1 + \{(\rho \dot{p}^2/B_x)(l/n\pi)^4\}^{1/2}, \quad r'^2 = 1 - \{(\rho \dot{p}^2/B_x)(l/n\pi)^4\}^{1/2}$$

d) $\kappa=1$, $\{(\rho b^2/B_x)(l/n\pi)^4\}^{1/2}-1>0$ の場合, 対称振動のみをとり, 次の振動数方程式を得る。

ただし, $r = \alpha r$, $r' = \alpha r'$

$$\gamma^2 = \{(\rho p^2/B_x)(l/n\pi)^4\}^{1/2} + 1, \quad \gamma'^2 = \{(\rho p^2/B_x)(l/n\pi)^4\}^{1/2} - 1$$

計算例 1. まず, $B_y = nE\bar{J}/l$ として, 計算を進めよう。

a) 坂越橋の場合 $B_x = EJ/a = 5.712 \times 10^9 \text{ kg}\cdot\text{cm}$, $B_y = EJ/l = 0.139 \times 10^9 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ (横ヶタ 1 本の曲げ剛さをスパンで割る), $\rho = 6 \times 10^{-5} \text{ kg}/\text{cm}^3 \cdot \text{sec}^2$ ($w_d = 600 \text{ kg}/\text{m}^2$) とすれば、次のようになる。

- i) $\kappa=0$ と仮定すれば、式(4)を用いて、 $p=49.5$ を得、 $\tau=2\pi/p=0.127\text{ sec}$ となる。
 ii) $\kappa=1$ と仮定すれば、式(7)を用いて、 $p=56.1$ を得、 $\tau=0.112\text{ sec}$ となる。

b) 新喜多大橋の場合 $B_x = EJ/a = 1.275 \times 10^{10} \text{ kg}\cdot\text{cm}$, $B_y = 3E\bar{J}/l = 0.198 \times 10^{10} \text{ kg}\cdot\text{cm}$ (横ヶタが 3 本あるので, 3 本分の曲げ剛さの合計をスパンで割る), $\rho = 7 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3 \cdot \text{sec}^2$ ($w_d \div 700 \text{ kg/m}^2$) とし,

- i) $\kappa=0$ と仮定すれば、式(4)より、 $\tau=0.123 \text{ sec}$
ii) $\kappa=1$ と式定すれば、式(7)より、 $\tau=0.105 \text{ sec}$

となる。

計算例 2. 上記の計算においては、 $B_y = nE\bar{J}/l$ を用いている。しかし、坂越橋に対しては、横ケタが 1 本であるので、上の B_y の計算式の使用にあたって、多少考えさせられる点がある。従つて、ここでは、 B_y の計算に、すべて横ケタを無視し、床板のみを考えて、 $B_y = Eh^3/12$ (床板の板剛度、 $\nu = 0$ と仮定) とすれば、次のようにある。

a) 坂越橋の場合 $B_y = Eh^3/12 = 2.1 \times 10^5 \times 15^3/12 = 0.591 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ となる。従つて、 $\kappa=0$ と仮定して、 $\tau=0.134 \text{ sec}$, $\kappa=1$ と仮定して、 $\tau=0.116 \text{ sec}$ を得る。

b) 新喜多大橋の場合 $B_y = Eh^3/12 = 3.0 \times 10^5 \times 18^3/12 = 1.458 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ となる ($B_x/B_y = 87.5$)。従つて、
 $\kappa = 0$ と仮定して、 $\tau = 0.153 \text{ sec}$, $\kappa = 1$ と仮定して、 $\tau = 0.132 \text{ sec}$ をうる。

計算例 3. 上の 2 つの計算では、板の両端は弾性ハリである縁ヶタによって支持されるものとしている。もしこれをやめて、両端自由とすることは結果にどの程度影響するかの問題も残されている。新喜多大橋について、両端自由とした場合の計算結果は、 $\tau = 0.150 \text{ sec} (\kappa=0)$ 、 $\tau = 0.112 \text{ sec} (\kappa=1)$ である。ただし、 $B_y = 3 E \bar{J}/l$ とし、両端が縁ヶタで弾性ハリ支持の場合には、縁ヶタ間距離 $2b = 19.8 \text{ m}$ としたが、両端自由の場合には、板の幅 $2b = 21.6 \text{ m}$ としている。

以上の計算結果を表に示す。なお参考のために、両端単純支持のケタとしての自由振動周期を、既知の公式で求めて、併記してある。この場合、ケタの断面二次モーメントとしては、中ケタのそれをとつている。もしこの場合、仮りに縁ケタの断面二次モーメントをとつても、 $J_R/J=1.10$ （坂越橋）、1.19（新喜多大橋）であるから、大きな影響はないはずである。

検討 以上の計算結果から、次のようなことがいえる。

i) 坂越橋 ($2b/l=0.34$) のような細長い橋梁、すなわち、ケタ橋であつても細長くてケタとみなしうる構造では、自由振動周期（以下 τ と略記する）は、ケタとしての τ と、直交異方性板理論で求めたケタ橋としての τ とでは、大差がなく、実測値ともよく一致している。これに反して、新喜多大橋 ($2b=19.8/20.0 \approx 1.0$) のような正方形の橋梁、すなわち、坂越橋のようにケタとみなしえない構造では、ケタとしての τ と、直交異方性板で

表一 自由振動周期の実測値と計算値の比較
(単位 sec.)

区分		坂越橋	新喜多大橋
実測値		0.136	0.127
計算値	B_y の計算法	κ の値	支持方法
	横ケタのみ考慮	0	0.127
	横ケタのみ考慮	1	0.123 0.112 0.105
	床板のみ考慮	0	0.134 0.153 0.116 0.132
	横ケタのみ考慮	1	0.150 0.112
	両端自由と仮定した厳密な直交異方性板理論		0.121
ケタ理論		0.147	0.189

であるので、むしろ簡単に $\kappa=0$ とした方が、よりよく実測値をうりし、この方が適当であると思う。

iii) B_y の計算方法については、坂越橋のような横ケタ 1 本の場合に対しては、 $B_y=Eh^3/12$ として、床板のみを考えた方がよく、新喜多大橋のような横ケタ 3 本の場合には、 $B_y=nE\bar{J}/I$ とした方が好ましいようである。

iv) 端での支持条件のとり方については、やはり、縁ケタで弾性ハリ支持を考えた方が、実測値とよくあつて好ましいと思う。

以上は直交異方性板のタワミ曲面の基礎微分方程式として、M. T. Huber の四階の偏微分方程式を用いてい。この方程式の根本的な欠点は、まず A. Pflüger によって指摘された。すなわち、Huber の微分方程式は、板が両側に対称にある補剛材によって補剛され、全体としての中立面が板の中立面に常に一致する場合にのみ正しいわけである。ケタ橋では完全な片側補強であるので、中立面は板の中央ではない。従つて Huber の微分方程式を使用することは、原理的には誤りであるが、計算が簡単であつて、従来の簡単なケタ理論では説明のつかない場合に対しても、比較的よく実験事実を説明しうるので、一般に用いられているわけである。

4. 厳密な直交異方性板理論にもとづく振動周期の計算 上に述べたように、Huber の偏微分方程式は正しくないので、これを訂正しようとする研究が盛んになってきた。こゝでは、A. Pflüger の理論にもとづけば、 x , y , z 方向における力のツリアイ条件式として、次の三つの微分方程式が成立する(図-2 参照)。ただしボアソン比 $\nu=0$ と仮定する。

次のような記号を用いるものとする。

x, y, z =板の中立面にとつた座標軸(最初は、 $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ として用い、無次元化して、 x, y, z と記号をかえる)。

$2a=x$ 方向のスパン(今までの計算では、 I で表わしていた)。

$2b=y$ 方向のスパンすなわち板の幅。

t =等方性板の厚さ、この場合は床板のみの厚さを意味する。

$F_x^+(F_y^+)=x(y)$ 方向にある補剛材(すなわち鋼ケタ)の $y(x)$ 方向の単位長あたりの断面積。

$S_x(S_y)=F_x^+(F_y^+)$ の等方性板の中立面に関して求めた断面一次モーメント。

$J_x^+(J_y^+)=$ 上記 $F_x^+(F_y^+)$ の、等方性板の中立面に関して求めた断面二次モーメント。

u, v, w =等方性板の中立面にある点の、 x, y, z 方向の変位。

$$\left. \begin{aligned} F_x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{t}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \frac{t}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tilde{y}^2} - S_x \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \tilde{x}^3} &= 0 \\ F_y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{t}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \frac{t}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tilde{x}^2} - S_y \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \tilde{y}^3} &= 0 \\ J_x \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \tilde{x}^4} + 2 \bar{J}_T \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} + J_y \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \tilde{y}^4} - S_x \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \tilde{x}^3} - S_y \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \tilde{y}^3} &= \frac{\rho p^2 \bar{w}}{E} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、

$$F_x=t+F_x^+, F_y=t+F_y^+, J_x=N+J_x^+, J_y=N+J_y^+, J_T=N, N=Et^3/12$$

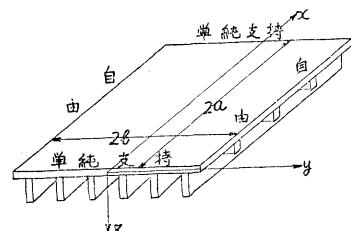
いま、計算例 3 で考えたように、板は 2 辺 $x=\pm a$ で単純支持され、 $y=\pm b$ で自由であるものとすると、境

理論で求めたケタ橋としての τ とは大差があり、後者の方がよく実測値と一致している。

この比較から、坂越橋のように細長いケタ橋ではケタの公式から τ を求めてよいが、新喜多大橋のように正方形に近いものでは、ケタの公式でケタ橋の τ を求めるることは、大きな誤りを犯すことになり、ぜひとも、ケタ橋としての τ の公式で求める必要がある。

ii) $\kappa=H\sqrt{B_x B_y}$ のとり方については、 B_y の計算に横ケタを考慮するかあるいは考慮しないにしろ、総合的に考えて、 $\kappa=0$ とした方がよく実測値にあうようである。W. Cornelius の指摘しているように、合成格子ケタ橋では、 $0 < \kappa < 1$ であるが、 κ をこの中間値のいずれにとるかは、実験的にきめるべきこと

図-2



界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x = \pm a, w = 0, M_x &= -N \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \right) + E \left(S_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - J_x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \right) = 0 \\ y = \pm b, M_y &= -N \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) + E \left(S_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - J_y \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) = 0 \\ V_y &= -N \left(\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y}^3} + 2 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}^2} \right) + E \left(S_y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} - J_y \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y}^3} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

さて、式(8)および(9)を無次元化するために、次のような変換を行う。

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}/a, y = \bar{y}/b, u = \bar{u}a/t^2, v = \bar{v}b/t^2, w = \bar{w}/t, A' = F_x \alpha^3/t, B' = \alpha/2, C' = S_x \alpha^3/t, \\ D' &= F_y/t, E' = \alpha^2/2, F' = S_y/t, G' = J_x \alpha^4/t^3, H' = 2J_T \alpha^2/t^3, I' = J_y/t^3, \\ J' &= S_x \alpha^4/t^2, K' = \rho p^2 b^4/E t^3 \end{aligned}$$

従つて、式(8)は無次元化されて式(10)のように、境界条件式(9)は、式(11)となる。

$$\left. \begin{aligned} A' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B' \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + B' \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - C' \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= 0 \\ D' \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + E' \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + E' \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - F' \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= 0 \\ G' \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + H' \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + I' \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - J' \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - F' \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} &= K' w = 0 \\ x = \pm 1, w = 0, -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{12 J'}{\alpha^4} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{12 G'}{\alpha^4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ y = \pm 1, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 12 K' \frac{\partial v}{\partial y} - 12 I' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \\ -\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - 2 \alpha^2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + 12 K' \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 12 I' \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} x = \pm 1, w = 0, -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{12 J'}{\alpha^4} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{12 G'}{\alpha^4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ y = \pm 1, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 12 K' \frac{\partial v}{\partial y} - 12 I' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \\ -\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - 2 \alpha^2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + 12 K' \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 12 I' \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

従つて問題は、微分方程式(10)と境界条件式(11)を同時に満足する u, v, w の解を見出すことである。しかし、微分方程式(10)を満足する解を見出すことは甚だ困難である (w については 8 階、 u, v については $v=0$ と仮定して 8 階の偏微分方程式となる) ので、次のような方法をとることにする。すなわち、まず、 u, v, w を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= a_0 u(px) \cos(\pi y/2), v = b_0 v(qy) \cos(\pi x/2), w = c_0 w(ry) \cos(\pi x/2) \\ u(px) &= \sinh px \sin p - \sinh p \sin px \\ v(qy) &= \sinh qy \sin q + \sinh q \sin qy \\ w(ry) &= \cosh ry \cos r + \cosh r \cos ry \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

何故なれば、 u は $x(y)$ について奇(偶)函数、 v は $x(y)$ について偶(奇)函数、 w は $x(y)$ について偶函数であり、かつ、 $x=\pm 1$ にて $u=0, y=\pm 1 v \neq 0, y=\pm 1$ にて $w \neq 0$ の条件を満足するからである。

さて式(12)が境界条件式(11)を満足するためには、

$$\tanh p - \tan p = 0, \tanh q + \tan q = 0, r^2 \left(\frac{\tanh r + \tan r}{\tanh r - \tan r} \right) = \frac{\alpha^2 \pi^2}{2(1+12 I')}$$

であることを必要とする。これによつて、 p, q, r の値が決定される。

u, v, w の式(12)は微分方程式(10)の解ではないので、式(10)に代入しても、右辺は 0 とならない。すなわち、誤差函数 $\epsilon_1(x, y), \epsilon_2(x, y), \epsilon_3(x, y)$ が求められることになる。ここにおいて、Galerkin 法を適用すると、次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_0 [A' \textcircled{①} - B' (\pi/2)^2 \textcircled{②}] - b_0 [B' (\pi/2) \textcircled{③} \textcircled{④}] - c_0 [C' (\pi/2)^3 \textcircled{⑤} \textcircled{⑥}] &= 0 \\ -a_0 [E' (\pi/2) \textcircled{⑦} \textcircled{⑧}] + b_0 [D' \textcircled{⑨} - E' (\pi/2)^2 \textcircled{⑩}] - c_0 F' \textcircled{⑪} &= 0 \\ -a_0 [J' \textcircled{⑫} \textcircled{⑬}] - b_0 [F' \textcircled{⑭}] + c_0 [G' (\pi/2)^4 \textcircled{⑯} - H' (\pi/2)^2 \textcircled{⑭} + I' \textcircled{⑮} - K' \textcircled{⑯}] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \textcircled{①} &= \int u''(px) u(px) dx, & \textcircled{②} &= \int u^2(px) dx, & \textcircled{③} &= \int v'(qy) \cos(\pi y/2) dy \\ \textcircled{④} &= \int u(px) \sin(\pi x/2) dx, & \textcircled{⑤} &= \int w(ry) \cos(\pi y/2) dy, & \textcircled{⑥} &= \int u'(px) \cos(\pi x/2) dx \\ \textcircled{⑦} &= \int v(qy) \sin(\pi y/2) dy, & \textcircled{⑧} &= \int v''(qy) v(qy) dy, & \textcircled{⑨} &= \int v^2(qy) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{10} &= \int w'''(ry) v(qy) dy, & \textcircled{11} &= \int u'''(px) \cos(\pi x/2) dx, & \textcircled{12} &= \int v'''(qy) w(ry) dy \\ \textcircled{13} &= \int w^2(ry) dy & \textcircled{14} &= \int w''(ry) w(ry) dy & \textcircled{15} &= \int w'''(ry) w(ry) dy \end{aligned}$$

積分範囲は -1 より +1 までである。

従つて、式 (13) の a_0 , b_0 および c_0 の係数よりなる行列式の値を 0 とおくことにより、所要の振動数方程式が得られる。

数值計算例 新喜多大橋を対象として計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} 1) \quad t &= 18 \text{ cm}, F_x = 26.4 \text{ cm}, F_y = 21.1 \text{ cm}, S_x = 595 \text{ cm}^2, S_y = 184 \text{ cm}^2, J_x = 54,000 \text{ cm}^3, \\ &J_y = 13,900 \text{ cm}^3, J_T = 486 \text{ cm}^3, \alpha = 10.8/10 = 1.08 \\ 2) \quad A' &= 1.85, B' = 0.54, C' = 2.32, D' = 1.17, E' = 0.58, F' = 0.57, G' = 13.20, \\ &H' = 0.19, I' = 2.38, J' = 2.50, K' = 5.45 \times 10^{-2} p^2 \\ 3) \quad p &= 3.927, q = 2.365, r = 2.398 \\ 4) \quad \textcircled{1} &= -7,650, \textcircled{2} = 643, \textcircled{3} = 12.40, \textcircled{4} = -18.80, \textcircled{5} = 2.33, \\ &\textcircled{6} = -28.90, \textcircled{7} = 7.90, \textcircled{8} = -159, \textcircled{9} = 62.6, \textcircled{10} = 405, \\ &\textcircled{11} = 7.06, \textcircled{12} = 383, \textcircled{13} = 32.6, \textcircled{14} = -98.0, \textcircled{15} = 1,080 \end{aligned}$$

従つて、方程式 (13) は次のようになる。

$$\begin{aligned} -14,985 a_0 + 198 b_0 + 394 c_0 &= 0 \\ 210 a_0 - 275 b_0 - 231 c_0 &= 0 \\ -410 a_0 - 22 b_0 + (5,226 - 32.6 K') c_0 &= 0 \end{aligned}$$

故に、 a_0 , b_0 および c_0 の係数よりなる行列式の値を 0 とした方程式、すなわち振動数方程式を解くと、 $p = 52.3$ が得られる。従つて $\tau = 2\pi/p = 0.121 \text{ sec}$ となる。

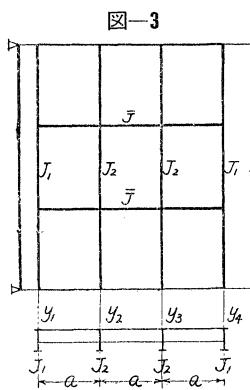
この問題を同一境界条件 ($y = \pm 1$ の二辺で直交異方性板が自由である) のもとに、同一の w の仮定式 (12) を用いて、Galerkin 法を適用すると、次のような値が得られる。

$$\begin{aligned} \kappa = 1 &\text{ と仮定して, } \tau = 0.125 \text{ sec,} \\ \kappa = 0 &\text{ と仮定して, } \tau = 0.148 \text{ sec} \end{aligned}$$

3. 述べたところにより、 $\kappa = 0$ の場合の $\tau = 0.148 \text{ sec}$ と比較するのを適當と考える。すなわち、Huber の理論に従えば、 0.148 sec となるが、より厳密に解くならば、同じ解法に従つても 0.121 sec となるわけであつて、このように厳密に解くことが望ましいことがわかる。

この厳密解を曲げの場合に応用したものに、K. Trenks の研究がある。しかし彼の対象としたのは、相対する辺が単純支持の無限板に正弦荷重の作用した場合に止まつている点から、一般的の支持条件を有する矩形板の曲げの問題、振動の問題に厳密解を適用するのは、相当困難と思われる。従つて、ここでは、Galerkin の方法を応用し、しかも計算を簡単にするために第 1 項のみの仮定に限つたわけである。それでも相当な精度のあることは、注目に値すると思う。

5. 4 本主ケタの格子ケタの自由振動周期の解法 ここに述べようとする方法は、A.J.S. Pippard が interconnected beam の曲げの解法に用いたのを、振動の問題に準用したものである。坂越橋を例にとつて計算しよう。主ケタ 1 および 2 の微分方程式は、次のようにある (図-3 参照)。



$$\left. \begin{aligned} EJ_1 \frac{\partial^4 Y_1}{\partial x^4} &= -\rho_1 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + \frac{12 E \bar{J}}{la^3} (Y_2 - Y_1) \\ EJ_2 \frac{\partial^4 Y_2}{\partial x^4} &= -\rho_2 \frac{\partial^2 Y_2}{\partial t^2} + \frac{12 E \bar{J}}{la^3} (Y_1 - 2Y_2 + Y_3) \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

まず、 $Y_1 = y_1 \sin pt$, $Y_2 = y_2 \sin pt$ とおき、さらに、対称振動変形 (橋梁の中心線について) の場合のみを考えることとし、次のような記号を用いる。

$$r_1 = \rho_1 p^2/EJ_1, r_2 = \rho_2 p^2/EJ_2, J_1/J_2 = j, k = 12 \bar{J}/la^3 J_1, k_j = 12 \bar{J}/la^3 J_2$$

所要の微分方程式は、次のようである。

$$y_1^{(4)} = r_1 y_1 + k(y_2 - y_1), \quad y_2^{(4)} = r_2 y_2 + jk(y_1 - y_2) \dots \dots \dots (15)$$

この二式より、 y_1 についての 8 階の微分方程式が得られる。

$$y_1^{(8)} - \{(r_1 + r_2) - k(j+1)\} y_1^{(4)} + \{r_1 r_2 - k(r_2 + j r_1)\} y_1 = 0$$

厳密には、 $r_1 \neq r_2$ であるが、近似的に $\rho_1/\rho_2 = J_1/J_2$ が成立すると仮定すると、

$r_1 = r_2 = r$ となる。従つて

y_1 に関する微分方程式を解き、 $k(j+1) > r$ と仮定し、さらに、スパン中央に関して対称な振動を考えると

となり、これから、 y_2 を求めると、

となる。ただし、 $\mu^4 = r$ 、 $\lambda^4 = \{(k+1)-r\}/4$ である。

さて、主ケタ 1,2 とも両端で単純支持とすれば、境界条件 ($x=\pm l/2 : y_1(y_2)=0, y_1''(y_2)=0$) を代入して、 A, B, C および D に関する 4 つの方程式が得られる。この A, B, C および D の係数よりなる行列式を 0 とおけば、これが求める振動数方程式である。この方程式は、計算結果、次のようになる。

$$J = 2(\lambda^2/\mu^2)(j+1)^2 \cosh(\mu l/2) \cos(\mu l/2) \cosh^2(\lambda l/2) \cos^2(\lambda l/2) \\ \cdot \{1 + \tanh^2(\lambda l/2) \tan^2(\mu l/2)\} = 0 \dots \dots \dots \quad (18)$$

たゞし、 $\mu^4 = r$, $4\lambda^4 = (k+1) - r$, $r = \rho p^2/EJ$, $k = 12\bar{J}/la^3J$

式(18)は、4本主ケタの格子ケタ橋の橋梁の中心線およびスパン中央に関して対称な自由振動の振動方程式である。

数値計算 坂越橋を対象として計算を進めよう。 r の計算に対しては、 $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$ 、 $J = (J_1 + J_2)/2$ を用いることにし、 $\rho = 1020 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3 \cdot \text{sec}$ 、 $J = 4.861 \times 10^6 \text{ cm}^4$ とする。従つて、 $r = 1.0 \times 10^{-14} p^2$ となる。また $\bar{J} = 0.994 \times 10^6 \text{ cm}^4$ 、 $J_1 = 5.098 \times 10^6 \text{ cm}^4$ であるから、 $k = 3.17 \times 10^{-10}$ となる。なお、 $j = 1.10$ である。

従つて、 $\mu^4 = 1.0 \times 10^{-14} p^2$, $\lambda^4 = 1.639 \times 10^{-10} - 0.25 \times 10^{-14} p^2$ をうる。これより、振動数方程式 $A=0$ の根を試索的に求めると、 $p=44.1$ 、従つて、 $\tau=0.142 \text{ sec}$ となる。

この値は単純ケタとして求めたものとなんら変りない。すなわち格子ケタとして解いても、あるいは直交異方性板として解いても、さらに簡単に単独ケタとしても、なんらの差も生じないわけである。この理由は、前に述べたとおりである。

6. 結論 合成格子ケタ橋である坂越橋と新喜多大橋の二橋について、自由振動周期を実測し、これを、一般に用いられている直交異方性板理論、厳密な直交異方性板理論、単なるケタ理論による計算値と比較した。この結果、次のようなことがいえると思う。

a) M.T. Huber の直交異方性板理論は、種々欠点はあるが、実測値を比較的よく説明できる。この場合橋梁の中心線に直角方向の両端の支持方法としては、縁ヶタで弾性ハリ支持とした方がよく、また $\kappa = H/\sqrt{B_x B_y}$ の値としては、簡単のため、 $\kappa=0$ とした方がよい。さらに、橋梁の中心線に直角方向の板剛度としては、横ヶタ数が1本のものでは、単に床板の板剛度をとり、横ヶタ1本のものでは、横ヶタの曲げ剛さの合計をスパンで割つたものをとるとよいようである。

b) より厳密な直交異方性板理論と Huber の理論とを、同一の境界条件のもとで Galerkin 法を応用して用いた結果によれば、前者ははるかに正しい値を与えるようである。

c) 橋梁の平面形が細長く、ケタ橋をむしろケタとみてさしつかえないような場合に対しては、ケタの自由振動周期の公式を用いてよく、平面形が正方形に近い場合には、ケタの公式を用いることは、大きな誤りであり、直交異方性板理論を用いるべきである。

d) 4本主ケタのような場合には、格子ケタとして簡単に解くことができ、またよい結果を与えるようであるが、計算の手数からは、直交異方性板理論の方が便利である。もしこの場合、平面形が細長ければ、ケタ公式で十分である。

以上は僅か二橋の測定結果を種々の計算方法で検討した結果にすぎない。しかし、これで、合成格子ケタ橋の自由振動周期の計算方法については、一応の概念がえられるものと思う。なお種々の幅員とスパンとの比、種々の横ケタ数の場合について、確かめてゆきたいと思う。

実験にあたつては、新三菱重工業神戸造船所技師山口富夫氏の御援助を受けた。ここに深謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) M.T. Huber, Bauing, Bd. 5 (1923), s.354, 392; Bd. 6 (1924), s. 259, 354; など
 - 2) 米沢, 土木学会誌 第 40 卷 (1955), p. 59
 - 3) A. Pfleider, Ing. Archiv, Bd. 16 (1947), S. 113
 - 4) K. Trenks, Bauing, Bd. 29 (1954), S. 372
 - 5) A.J.S. Pippard, Elastic Structure, p. 91 (1952)
 - 6) W. Krieger, Ing. Archiv, Bd. 18 (1949), S. 391

(昭. 31. 2. 8.)