

立体構造物の静定主系の選び方について

正 員 近 藤 繁 人*

要 旨 立体不静定構造物の不静定値は平面不静定構造物の場合と同様に、多元1次の連立方程式で表わされるが、静定主系を適当に選べば不静定値を簡単に

$$X_K = \frac{\sum P_i \delta_{iK}}{\delta_{KK}}$$

の形で表わすことができ、移動荷重 $P_i=1$ に対する X の影響線も容易に求まる。以下方列の理論を使つて立体不静定構造物の静定主系を決定する方法について述べてみたい。

表—1

荷重状態	変位 点 a の $X_a=-1$ 方向への変位	点 b の $X_b=-1$ 方向への変位	点 i の $P_i=1$ 方向への変位
$X_a=-1$	δ_{aa}	δ_{ba}	δ_{ia}
$X_b=-1$	δ_{ab}	δ_{bb}	δ_{ib}
.....
$P_i=1$	δ_{ai}	δ_{bi}	δ_{ii}
備 考	a, b, \dots はそれぞれ X_a, X_b, \dots の作用点で i は荷重 $P_i=1$ の作用点とする。		

1. 一般方針

今ある立体不静定構造物に $P_i=1$ が作用した時の仮の不静定値を X_a, X_b, \dots として仮の静定主系を作り、表—1 のような記号を使えば式 (1) が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} + \dots + X_n \delta_{an} &= \delta_{ai} \\ X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb} + \dots + X_n \delta_{bn} &= \delta_{bi} \\ \dots & \dots \\ X_a \delta_{na} + X_b \delta_{nb} + \dots + X_n \delta_{nn} &= \delta_{ni} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

(1) 式において X の係数を方列 $[\delta]$ で表わせばこの方列は Maxwell の相反法則により対称方列である。なお式 (1)

は n 個の不静定値 X_a, X_b, \dots, X_n を含む n 個の連立方程式であるから、これを解けば n 個の不静定値が求まるわけであるが、計算が非常に煩雑になるので別に n 個の不静定値 X_A, X_B, \dots, X_N を選び、次のような関係式を成立させることができたものとする。

$$\left. \begin{aligned} X_a &= f_{aa} X_A + f_{ab} X_B + \dots + f_{an} X_N \\ X_b &= f_{ba} X_A + f_{bb} X_B + \dots + f_{bn} X_N \\ \dots & \dots \\ X_n &= f_{na} X_A + f_{nb} X_B + \dots + f_{nn} X_N \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

(2) 式の X_A, X_B, \dots の係数を方列 $[f]$ で表わすことにする。(2) 式の X_a, X_b, \dots を (1) 式に代入して得られる方程式の右辺は、(1) 式の右辺のまゝであり、左辺の X_A, X_B, \dots の係数は、これを方列 $[z]$ で表わせば、

$$[z] = [\delta] \cdot [f] \dots (3)$$

z の一般項 (jk 項) は、

$$z_{jk} = \sum_{s=a}^n \delta_{js} f_{sk} \dots (4)$$

さて $[\delta]$ は対称方列であるから $[z]$ の左に $[f]$ の共やく方列 $[g]$ を乗ずれば、対称方列が得られる。これを $[D]$ で表わせば、

$$[D] = [g] \cdot [\delta] \cdot [f] \dots (5)$$

この方列の jk 元素及び kk 元素は、それぞれ、

$$\sum_{r=a}^n \left(\sum_{s=a}^n g_{js} \delta_{sr} \right) f_{rk} = \sum_{r=a}^n \left(\sum_{s=a}^n f_{sj} \delta_{sr} \right) f_{rk}, \quad \sum_{r=a}^n \left(\sum_{s=a}^n g_{ks} \delta_{sr} \right) f_{rk} = \sum_{r=a}^n \left(\sum_{s=a}^n f_{sk} \delta_{sr} \right) f_{rk}$$

で表わされる。また (2) を (1) に代入した方程式の右辺の方列の左側に $[g]$ を乗じたものの第 k 項は、 $\sum_{r=a}^n f_{rk} \delta_{ri}$ で表わされる。従つて jk 元素を全部 0 とおけば、

$$\sum_{r=a}^n \left(\sum_{s=a}^n f_{sj} \delta_{sr} \right) f_{rk} = 0 \dots (6)$$

となり、不静定値は、

$$X_K = \frac{\sum_{r=a}^n f_{rk} \delta_{ri}}{\sum_{r=a}^n \left(\sum_{s=a}^n f_{sk} \delta_{sr} \right) f_{rk}} \dots (7)$$

* 山梨大学教授，工学部土木工学科

(6) 式は、全部で $\frac{n}{2}(n-1)$ 個できる。なお、 $X_K=-1$ が作用することは、(2) 式より $X_a=-f_{ak}$, $X_b=-f_{bk}, \dots, X_n=-f_{nk}$ が同時に作用することと同じで、このときの X_a, X_b, \dots の作用点の移動量は、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} X_a=-1 \text{ 方向に } & \sum_{s=a}^n f_{sk} \delta_{as} \\ X_b=-1 \text{ 方向に } & \sum_{s=a}^n f_{sk} \delta_{bs} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

従つて $X_K=-1$ による仮想仕事は、

$$X_a=-f_{ak}, X_b=-f_{bk}, \dots\dots\dots, X_n=-f_{nk}$$

によるものに等しく、

$$1 \cdot \delta_{iK} = \sum_{r=a}^n \left(\sum_{s=a}^n f_{sk} \delta_{sr} \right) f_{rk} \dots\dots\dots (9)$$

また $X_K=-1$ 及び $P_i=1$ の2種類の荷重状態に対し、Betti の法則を適用すれば、

$$1 \cdot \delta_{iK} = \sum_{r=a}^n f_{rk} \delta_{ri} \dots\dots\dots (10)$$

(9) と (10) とを (7) に代入すれば、

$$X_K = \frac{\delta_{iK}}{\delta_{KK}} \dots\dots\dots (11)$$

すなわち (6) 式を解くことにより X_A, X_B, X_C, \dots と、 X_a, X_b, X_c, \dots との関係を決定することができて静定主系が定まり、新しい不静定値は、(11) 式から簡単に求められることになる。ここで i 点を動かせば X_K の影響線が求められ、また δ_{iK} として鉛直変位、水平変位、廻轉變位などを選べば、鉛直荷重、水平荷重、廻転モーメントなどに対する X_K の影響線が得られる。

なお条件式 (6) の数は、 jk 元素 ($j \neq k$) の数の半分だけできるので、(2) 式の f の中に含まれる未知量の数もそれと同数でなければならない。その数は $\frac{n}{2}(n-1)$ 個である。

たとえば2次不静定の時は、ただ1個で次の式で表わされ、 f の中に含まれる未知量としては、座標 x, y または方向を表わす角 α の中、いずれか1個を選べばよい。すなわち (6) 式において

$$j=a, \quad k=b$$

とおけば

$$\sum_{r=a}^b \left(\sum_{s=a}^b f_{sa} \delta_{sr} \right) f_{rb} = 0$$

$$(f_{aa} \delta_{aa} + f_{ba} \delta_{ba}) f_{ab} + (f_{aa} \delta_{ab} + f_{ba} \delta_{bb}) f_{bb} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

また3次不静定の時は、(6) 式は3個できることになり未知量としては、 x, y, α の3個を選べばよろしい。すなわち (6) 式において

$$\left\{ \begin{array}{l} j=a \\ k=b \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} j=b \\ k=c \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} j=c \\ k=a \end{array} \right\} \text{とおけば}$$

$$\left. \begin{aligned} \{ f_{aa} \delta_{aa} + f_{ba} \delta_{ba} + f_{ca} \delta_{ca} \} f_{ab} + \{ f_{aa} \delta_{ab} + f_{ba} \delta_{bb} + f_{ca} \delta_{cb} \} f_{bb} + \{ f_{aa} \delta_{ac} + f_{ba} \delta_{bc} + f_{ca} \delta_{cc} \} f_{cb} = 0 \\ \{ f_{ab} \delta_{aa} + f_{bb} \delta_{ba} + f_{cb} \delta_{ca} \} f_{ac} + \{ f_{ab} \delta_{ab} + f_{bb} \delta_{bb} + f_{cb} \delta_{cb} \} f_{bc} + \{ f_{ab} \delta_{ac} + f_{bb} \delta_{bc} + f_{cb} \delta_{cc} \} f_{cc} = 0 \\ \{ f_{ac} \delta_{aa} + f_{bc} \delta_{ba} + f_{cc} \delta_{ca} \} f_{aa} + \{ f_{ac} \delta_{ab} + f_{bc} \delta_{bb} + f_{cc} \delta_{cb} \} f_{ba} + \{ f_{ac} \delta_{ac} + f_{bc} \delta_{bc} + f_{cc} \delta_{cc} \} f_{ca} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

なお高次不静定の時は、(2) 式の $[f]$ として次の式を選び、この中に含まれるすべての f をそのまま未知量とする。

$$[f] = \left(\begin{array}{cccc} 1 & f_{ab} & f_{ac} & \dots\dots f_{an} \\ 0 & 1 & f_{bc} & \dots\dots f_{bn} \\ 0 & 0 & 1 & \dots\dots f_{cn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots 1 \end{array} \right) \dots\dots\dots (14)$$

ここに含まれている f の数は $\frac{n}{2}(n-1)$ 個であるから、同数の (6) 式を作ることによりこれらの未知量を決定することができる。

2. 計算例

(1) 仮の不静定値が H_x と M_x の場合

図-1 (a) に対し (b) を静定主系に選べば

$$\begin{cases} X_a = X_A + X_B y \\ X_b = X_B \end{cases}$$

すなわち式 (2) において

$$[f] = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(12) より

$$y = -\frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}}$$

この y で表わされる点に X_A 及び X_B の作用点を移せば、式 (11) より

$$X_A = \frac{\delta_{iA}}{\delta_{AA}} \quad X_B = \frac{\delta_{iB}}{\delta_{BB}}$$

さて y を定めるためには、 $X_a = -1$ を作用させた時の変位を求めなければならないが、これは $X_A = -1$ を作用させた時の変位に等しいので、特別に y を計算する必要はなく、 X_A の影響線を求める計算の途中におのずから y が求まり、静定主系が定まることになって、大変便利である。

(2) 仮の不静定値が H_x と M_z の場合

図-2 (a) に対し (b) を静定主系に選べば、

$$\begin{cases} X_a = X_A - X_B y \\ X_b = X_B \end{cases}$$

$$\therefore [f] = \begin{bmatrix} 1 & -y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(12) より

$$y = \frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}}$$

この y も計算例 (1) の場合と同じように、 X_A の影響線を求める計算の途中におのずから定まる。

(3) 仮の不静定値が M_x と M_y の場合

図-3 (a) に対し、(b) を静定主系に選べば、

$$\begin{cases} X_a = X_A \sin \varphi \\ X_b = X_A \cos \varphi + X_B \end{cases}$$

(2) 式より

$$[f] = \begin{bmatrix} \sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi & 1 \end{bmatrix}$$

(12) 式より

$$\tan \varphi = -\frac{\delta_{bb}}{\delta_{ab}}$$

この $\tan \varphi$ も X_B の影響線を求める計算の途中におのずから定まる。

(4) 仮の不静定値が V , H_x 及び M_x の場合

図-4 (a) に対し (b) を静定主系に選べば

$$\begin{cases} X_a = X_A + X_B (y \cos \alpha - z \sin \alpha) + X_C y \\ X_b = X_B \sin \alpha \\ X_c = X_B \cos \alpha + X_C \end{cases}$$

すなわち

$$[f] = \begin{bmatrix} 1 & y \cos \alpha - z \sin \alpha & y \\ 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

図-1

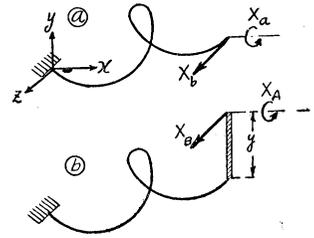


図-2

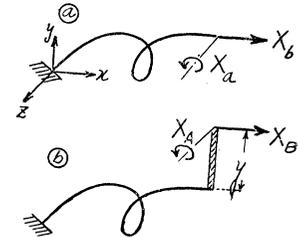


図-3

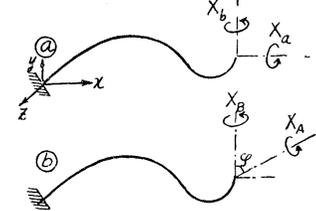
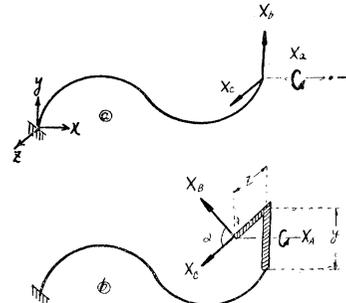


図-4



(13)に代入して

$$\begin{cases} y = -\frac{\delta_{ca}}{\delta_{aa}}, & z = \frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}} \\ \tan \alpha = \frac{\delta_{ca}^2 - \delta_{aa}\delta_{cc}}{\delta_{aa}\delta_{bc} - \delta_{ca}\delta_{ba}} \end{cases}$$

(5) 仮の不静定値が M_y, M_z 及び H_x の場合

図-5 (a) に対し (b) を静定主系に選べば、

$$\begin{cases} X_a = X_A \\ X_b = X_A z + X_B \sin \alpha \\ X_c = -X_A y + X_B \cos \alpha + X_C \end{cases}$$

$$\therefore [f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & \sin \alpha & 0 \\ -y & \cos \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

(13)に代入して

$$\begin{cases} y = \frac{\delta_{bb}\delta_{ac} - \delta_{ab}\delta_{bc}}{\delta_{bb}\delta_{cc} - \delta_{bc}^2} \\ z = \frac{\delta_{ac}\delta_{bc} - \delta_{ab}\delta_{cc}}{\delta_{bb}\delta_{cc} - \delta_{bc}^2} \\ \tan \alpha = -\frac{\delta_{cc}}{\delta_{bc}} \end{cases}$$

なお、両端固定の六次不静定左右対称の立体ラーメン、立体アーチなどについては、第9回、第10回、第11回土木学会年次学術講演会講演概要を参照されたい。

以上は仮の不静定値がただ1個の点に作用している場合についての計算例を示したが、異なる点に作用する場合についてもほぼ同ようにして解くことができる。

3. 結 び

- (1) 本方法は立体ラーメン、立体アーチだけでなく立体トラスなどにも適用できる。
- (2) 立体構造物の弾性重心が、静定主系の変位によつて求められる。
- (3) 式(11)の δ_{iK} として i 点の x, y, z 方向の変位あるいは x, y, z 軸の周りの廻転角を使えば、それに応じて x, y, z 軸方向の単位荷重または x, y, z 軸の周りの単位モーメントが作用したときの X_K 影響線が、6個同時に求まる。
- (4) 仮の静定主系はどんな形でもよいが、この選び方の巧拙が後の計算の難易に大きく影響するので注意しなければならない。
- (5) 平面構造物は立体構造物の特殊なものと考えられるので、平面構造物にも適用できる(平面構造物については、第7回土木学会年次学術講演会にて講演)。

(昭和 31. 2. 7.)

