【土木学会論文集 第347号／IV-1 1984年7月】

予算制約下の段階的施設規模拡張について

CAPACITY EXPANSION IN STAGES UNDER BUDGET CONSTRAINT

江藤剛治*・室田 明**・水野雅光***

By Takeharu ETOH, Akira MUROTA and Masamitsu MIZUNO

Staged capacity expansion of a single facility under budget constraint is mathematically formulated and analyzed. It is suggested that there are some fundamental units for staged capacity expansion models. The fundamental unit is defined as a model which possesses a minimum set of conditions under which staged expansion is favorable. The excess-demand model, one of the fundamental units, is defined as the model with the set of conditions : (1) economies of scale, (2) budget constraint, and (3) excessive demand (to the capacity of the facility). An explicit expression of the optimum number of stages is derived for the model.

1. はじめに

1施設の段階的規模拡張問題のうち，著者らが過剰需要問題（the excess-demand model）と名付けた問題[1]の特性について理論的検討を行う．過剰需要問題は段階的規模拡張問題の基本型の1つである．基本型とは，段階的規模拡張の意義を明確にするために著者らが導入した概念であり，次のように定義される．「段階的規模拡張が意味をもつための最小限の条件を具備する問題.」

まず1施設の段階的規模拡張問題を数種の基本型に分類する．既往の研究がどのような型に属する問題を取り扱っているかを明らかにする．過剰需要問題の成立条件は次の3要素が存在することである．

①規模の経済性 ②予算制約 ③過剰需要

平易にいえば，次のような問題である．「十分な需要があるにもかかわらず，年ごとの施設拡張予算に限界があるため，段階的に規模拡張を行わざるを得ない」という種類の問題．過剰需要問題は実際上重要な問題ではあるが，これまで理論的検討が加えられていなかったことを明らかにする．

次に，過剰需要問題の模型的な問題を示す．割引率，需要の伸びなどは無視する．費用関数も単純化する．ただし過剰需要問題の基本的特性は残す．純便益を最大とする最適拡張段階数の式を解析的に導く．

割引率などを考慮して，より一般化した場合について純便益の式を導き，その特性を数値解析的に検当する．

以上をもとにして過剰需要問題の一般的特性について検討する．

2. 1施設の段階的規模拡張問題の分類

施設計画問題とは次の4種の変数を決定することである[2]．施設あるいは施設の拡張の，

①種類 ②場所 ③規模 ④時期

段階的規模拡張問題ではこのうち，主として施設の拡張規模・時期を変数とする．以下では拡張すべき施設数が1の場合を考える．

Chenery[3]，Manne[4]の先駆的な研究以来，規模の経済性（economies of scale）が存在するときの，施設規模の拡張問題について多くの研究が行われている[5)~17),20)]．Sorensen と Jackson[7]は，水工計画における段階開発の意義を，種々の見地から豊富な例を挙げて分析している．わが国においても長尾らの研究[14),15),20)]や吉田の段階的

* 正会員 工博 近畿大学教授 理工学部土木工学科
（〒577 東大阪市小若江3-4-1）
** 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科
（〒565 吹田市山田丘2-1）
*** 正会員 人事院（〒100 東京都千代田区霞ケ関2-1-2）

道路建設計画に関する検討[5]などのすぐれた研究成果がある．

著者らは，これらの研究における段階的規模拡張の意義（なぜ段階的拡張が有利になるのかという理由づけ）を抽出し，整理した[1,17]．1施設の段階的規模拡張問題について整理したものを表—1に示す．本論文では手戻り費用・段取り費用等も広義の規模の経済性に含めて考える．また施設規模を施設の容量（能力，capacity）で評価する（補遺1参照）．

表—1　1施設の段階的規模拡張問題の分類

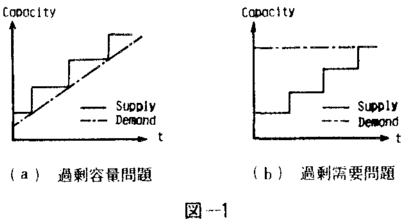
タイプ	A-1：過剰容量問題 Excess Capacity	A-2：過剰需要問題 Excess Demand	B：不確実条件下の段階的規模拡張問題*
成立条件	① 規模の経済性		
	② 割引率	② 資金・原材料制約	② 将来の不確実要因
	③ 需要の増大	③ 過剰需要	
トレード・オフ関係	過剰（遊休）容量小（割引率で有利になる） ↕ 規模の経済性	部分供用を急ぐ ↕ 規模の経済性 全面供用を急ぐ	不確実性・冗長施設の削減** 部分供用を急ぐ ↕ 規模の経済性 全面供用を急ぐ

*　不確実条件下の段階的規模拡張問題については考察不十分
**　過剰容量状態で拡張するときは，多段階拡張により，過剰需要状態で拡張するときは，一括拡張により，不確実性の減少，冗長施設の削減などが可能になるものと考えられる．

a）　過剰容量問題（A—1，図—1（a））

需要が伸び，それを満たすように施設規模を拡張する場合である．割引率が十分小さいときは，現在投資しても将来投資しても投資額の現在価値は変わらないので，最終需要に見合うだけの容量をもつ施設を初期段階に一括建設すればよい．逆の場合できるだけ投資を遅らせるよう，需要の増分に対応するだけの容量の施設拡張を行う．この場合あまり小きざみに拡張すると，規模の経済性からの損失が大きくなる．すなわち割引率を享受することと，規模の経済性を享受することのトレード・オフより，最適な1回当たりの拡張規模が定まる．この場合段階的な規模拡張が意味をもつためには，最少限次の3条件が必要である．

①規模の経済性　②割引率の存在　③需要の増大



（a）　過剰容量問題　　（b）　過剰需要問題

図—1

Manne[4]，長尾・森杉ら[14]が取り扱ったのは過剰容量問題（A—1），およびこれに需要の伸びにおける不確実性の影響を考慮した問題（A—1，Bの複合型）である．たとえばManneの理論解によれば，次のような条件下でより小規模・多段階の施設拡張が有利である．

①規模の経済性が小　②割引率が大

③需要における不確実性が小（補遺2参照）

b）　過剰需要問題（A—2，図—1（b））

需要に対して施設容量が不足し，かつ資金・原材料（土地を含む）等の供給が不足するときに生ずるタイプ．たとえば各年の予算に制限があるときは，次の代替案のいずれかを選ばなければならない．

①一括拡張によりできるだけ早い時期に全面供用

②部分供用しつつ段階的に施設を拡張

割引率を考えなければ，前者では総工費が最小となる．また年間の資金供給が一定であるから工期も最小となる．しかし施設の完工まで全く需要を満たすことができず，したがってその間の便益は0である．一方後者では需要の一部は当初よりカバーされるが，規模の経済性より工期・工費とも大となる．このようなトレード・オフより最適な単位拡張規模が定まる．この問題の成立条件は次のとおりである．

①規模の経済性　②予算制約　③過剰需要

成立条件を比較すれば，過剰容量問題と過剰需要問題が本質的に異なる問題であることは明らかである．

c）　不確実性への対応（B）

規模の経済性がなければ需要に追随するように施設拡張を行えばよい．この問題に関して，著者らは十分な分析を行っていない．BがB-1，B-2，…のように基本型に分類できる可能性は高い．本論文では仮に，Bも基本型とよんでおくことにする．

実際の問題は上記の基本型の複合問題となっている．

既往の研究で，過剰需要問題を純粋な形で抽出し，その特性を理論的に検討した例はないようである．予算制約や原材料制約が段階的規模拡張の一因になることは以前から指摘されている．事例研究や数理計画モデルにはこの制約を組み入れたものも多い[6,12,13]．しかしながらこれらは，過剰需要問題の本質的特性を究明しようとしたものではない．Manne[4]ほかは，一時的な容量不足（需要過剰）に対して，負の利益（ペナルティー）を導入したモデルも解析している．しかしこれも予算制約が入っていないという点で，過剰需要問題とは本質的に異なる．

参考文献18）における「段階計画」の用語の定義でも，需要の増大，割引率，過剰容量，および規模の経済性，段階建設の技術的可能性が成立条件として挙げられているが，前3者はいずれも過剰容量問題の成立条件であって，過剰需要問題においては全く必要のない条件である．

以上より，過剰需要問題の存在，およびその重要性については，これまで看過されてきたとみることができる．

具体的に公共事業について考えてみると，非常に強い（潜在）需要に押された後追い行政になっている場合が少なくない．この場合，予算・用地等が不十分であるために，抜本的な対策を講ずることが難しく，ある程度ずつ住民の要望を満たしつつ本来望ましい姿に近づけるという政策が取られる．これは過剰需要問題にほかならない．都市河川等，比較的整備水準の低い河川の治水問題もこの例に含まれる．

以上より，過剰需要問題について，基礎的検討を行っておくことには十分意義があるものと考えられる．

3. 解 析 解

（1） 前 提 条 件

以下の仮定を置く．仮定は通し番号で示す．

（過剰需要問題の成立条件）

① 規模の経済性の存在　② 年予算は一定

③ 過剰需要

（計画の評価に関する仮定）

④ 純便益最大のとき最適とする．ただし純便益は正の範囲で計画を評価する．

⑤ （$0\leqq t\leqq t_M$）の範囲で計画を評価する．t_M 以後の施設の残存価値を無視する．

⑥ 割引率を無視する．

（費用に関する仮定）

⑦ 拡張費用は拡張規模のみの関数とし，定弾性率型，あるいは固定経費型[12]の費用関数を仮定する．

⑧ 維持管理費は，施設規模によらず全期間を通じて一定，あるいは各時点の年平均便益に比例する．

（便益に関する仮定）

⑨ 施設規模と年平均便益の関数関係は，図—4（c）の折れ線で近似する．

⑩ この関係は経時的に変化しないものとする．

⑪ 各段階の施設拡張が完了する時点に一定時間先だって，あるいは遅れて，ステップ関数状に，年平均便益が増大する．

（変数に関する仮定）

⑫ 等規模拡張

⑬ 最終拡張規模 s_f は与えられている．図—4（c）で，$s_f\leqq s'_f$ ならば s_f まで，$s_f>s'_f$ ならば s'_f まで工事を行う．

過剰需要問題では，割引率，需要の伸びは支配的な役割を演じない（⑥，⑩）．他の仮定もおおむね妥当なものである．よって上記の諸仮定を導入しても，過剰需要問題の本質的特性は損なわれない．

（2） 変数と無次元化

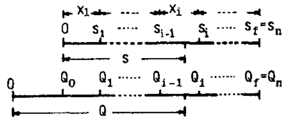
施設規模，初期施設規模からの累積拡張規模，第 i 段階での拡張規模をそれぞれ，Q，s，x で表わす．初期状態，全拡張完了状態，第 i 段階拡張完了時の状態に対応する量の下付添字をそれぞれ，0，f，i で表わす．

このとき，

$$\left.\begin{aligned} &x_i=Q_i-Q_{i-1},\quad s=Q-Q_0\\ &s_i=\sum_{j=1}^{i}x_j=Q_i-Q_0\\ &s_f=Q_f-Q_0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

これらの関係を図—2 に示す．以後簡単のために $Q_0=0$ とし，s を施設規模 Q とみなす．

本来，段階的規模拡張の最適化問題は，最終拡張規模 s_f と単位拡張規模 x（あるいは拡張段階数 n）の 2 種類の変数を決定変数とする最適化問題である．すなわち，何段階程度で，最終的にどの程度の規模をもつ施設を建設するかを決定する問題である．実際には最終拡張規模 s_f が，より上位の計画からあらかじめ与えられる場合が多い．このときは，x あるいは n のみが変数となる．



図—2　Q, s, x の関係

表—2　主な無次元量

（a） 基 本 量

次 元		記 号	意 味
時 間（T）		t_*[1]	代 表 時 間
金 額（¥）		ct_*[1]	年投資額×代表時間
規模の測度		s_f[2]	最終拡張施設規模
注	1）	$t_*=\begin{cases}t_M\\ 1/r\end{cases}$	計画評価期間（耐用年数）（割引率を考慮しない場合） 1/割引率（割引率を考慮する場合）
	2）	s_f も決定変数とする場合は，s_f の代表値 s_{f0} を基本量とする．	

（b） 変 数

ct_* により無次元化するもの	$\tilde{C}_f=C(s_f)/(ct_*)$ $\tilde{C}_T=C_T/(ct_*)$ $\tilde{C}_0$, $\tilde{B}_T$, $\tilde{B}_W$, $\tilde{B}_i$, $\tilde{B}_R$, $\tilde{B}_N$ も同様
s_f により無次元化するもの	$\tilde{x}=x/s_f=1/n$ $\tilde{x}_0$, $\tilde{x}_*$, $\tilde{s}$ も同様 $\tilde{\theta}=\theta s_f$
t_* により無次元化するもの	$\tilde{t}_n=t_n/t_*$ $\tilde{t}_i$, $\tilde{t}_M$, $\Delta\tilde{t}_i$ も同様 $\tilde{r}_s=r_s/r$, $\tilde{r}'=(r-r_s)/r$
基本量の関数で無次元化するもの	$\tilde{b}=b/c$ $\tilde{b}_s$, $\tilde{b}_{s0}$ も同様 $\tilde{C}(\tilde{x})=C(x)/C(s_f)$ $\tilde{m}$, $\tilde{y}$：表—3参照

通常の物理解析と異なり，時間・施設規模・金額が基本次元となる．よって表—2 の 3 量を基本量として無次元化を行う．表—2 に主要な無次元量も併記する．

仮定⑫より，

$$n=1/\tilde{x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

演算上は無次元単位拡張規模 $\tilde{x}(0<\tilde{x}\leqq 1)$ を連続量として取り扱う．しかし，n は整数値のみを取るので，実際は一括拡張，2, 3, …，n 段階拡張に対応して，$\tilde{x}=1, 1/2, 1/3, \cdots$，$1/n$ などのとびとびの値においてのみ意味をもつ．

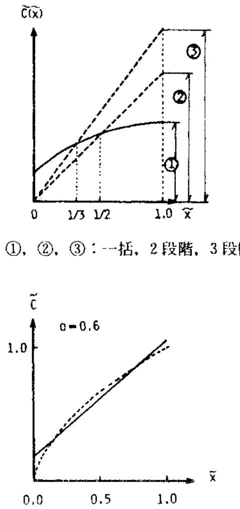
(3) 費用関数

a) 定弾性率モデル・固定経費モデル

表—3 費用関数のモデル[12)]

名　　称	定弾性率型 Constant Elasticity	固定経費型 Fixed Requirement
特性パラメーター	a：規模の経済性指数	$\tilde{y}$：手戻り率
費用関数	$C_E(x)=\begin{cases} kx^a (x\geqq 0) \\ 0\ (x<0) \end{cases}$ …(3) $k>0,\ 0\leqq a\leqq 1$	$C_R(x)=\begin{cases} mx+y\ (x>0) \\ 0\ (x\leqq 0) \end{cases}$ …(4) $m\geqq 0,\ y\geqq 0$
費用関数の無次元表示	$\tilde{C}_E(\tilde{x})=\tilde{x}^a$ $(\tilde{x}\geqq 0)$ …(5)	$\tilde{C}_R(\tilde{x})=\tilde{m}\tilde{x}+\tilde{y}$ $(\tilde{x}>0)$ …(6)
C_E を C_R で最小 2 乗近似するときの係数間の関係	$ms_f=6a/\{(a+1)(a+2)\}\cdot C_E(s_f)$ …… (7) $y=2(1-a)/\{(a+1)(a+2)\}\cdot C_E(s_f)$ …… (8) $a=(1-\tilde{y})/(1+2\tilde{y})$ …… (9) $\tilde{y}=(1-a)/(1+2a)$ ……(10) ここに， $\tilde{m}=m/(m+y/s_f)$ ……(11) $\tilde{y}=y/(ms_f+y)$ ……(12)	

（費用関数を区別する必要のないときは，添字 R, E は略す．）



（a） ①，②，③：一括，2 段階，3 段階拡張

（b） 点線：定弾性率型（$\tilde{C}=\tilde{x}^a$）
実線：固定経費型（式（7）～(12) により点線を近似したもの）

図—3 費用関数

仮定⑦より，費用関数として定弾性率型，あるいは固定経費型のいずれかを仮定する（表—3，図—3 参照）．表中，y は段取り費用や手戻り費用など，拡張ごとに余分に必要となる固定経費である．当然規模の経済性指数 a が小さいほど，手戻り率 $\tilde{y}$ が大きいほど規模の経済性が強く働く．

定弾性率モデルと固定経費モデルを関係づける．$0\leqq s\leqq s_f$ の範囲で，前者を後者で最小 2 乗近似すると，表—3 中の式（7）～(12) の関係が得られる（補遺 3 参照）．この場合，定弾性率モデルでは，手戻り率も規模の経済性に換算されて含められていると考えてよい．逆に固定経費モデルでは，拡張施設規模と費用の間の弾性率も，手戻り率に換算されて含められていると考えてよい．この意味で以後，換算規模の経済性指数，換算手戻り率という用語を用いる場合がある．

b) 総 費 用

第 i 段階（$i=1, 2, \cdots, n$）における費用は，施設拡張費 C_i と，維持管理修善費 c_{mi} の和である．前者は施設拡張予算（年間投資額 c）を第 i 段階拡張期間にわたって積分したものである．よって総費用 C_T は，

$$C_T=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(c+c_{mi})\cdot \mathrm{D}(t)\mathrm{d}t+\int_{t_n}^{t_M}c_{mn}\cdot \mathrm{D}(t)\mathrm{d}t + C_0 \cdots\cdots (13)$$

$$C_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}c\cdot \mathrm{D}(t)\mathrm{d}t \cdots\cdots (14)$$

ただし，$t_M\geqq t_n$ とする．

ここに，t_i は第 i 段階拡張の完了時点，C_0 は初期費用，$\mathrm{D}(t)$ は現価係数．

C_0 は初期に用地買収や，大型の関連施設の一括建設などに必要な費用である（補遺 4 参照）．

c_{mi} は一般にはすでに完成した施設の規模 s_{i-1} の関数である．仮定⑧より，式（13）から c_{mi} を除いても一般性は失われない（補遺 5 参照）．

このとき式（13）は次のように簡略化される．

$$C_T=\int_0^{t_n}c\cdot \mathrm{D}(t)\mathrm{d}t+C_0 \cdots\cdots (15)$$

仮定⑦，⑫より各段階の拡張工期 $\Delta t_i(=t_i-t_{i-1})$ は一定．よって以後は i を略す．仮定⑥より $\mathrm{D}(t)=1$．以上より，

$$C_T=c\cdot t_n+C_0=c\cdot n\Delta t+C_0=n\cdot C(x)+C_0 \cdots\cdots (16)$$

無次元化すると，

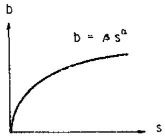
$$\tilde{C}_T=C_T/(c\,t_M)=\tilde{C}_f\cdot \tilde{C}(\tilde{x})/\tilde{x}+\tilde{C}_0 \cdots\cdots (17)$$

(4) 便益関数

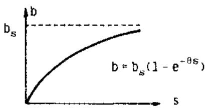
a) 施設規模と年平均便益の関係

年平均便益 b は，施設規模 s と，時点 t の関数である．すなわち，$b=b(t,s)$．

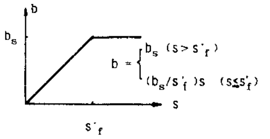
$b\sim s$ 関係については図—4 のような関係がある．す



（a）定弾性率型



（b）指数関数型



（c）折れ線関数型

図―4　便益関数

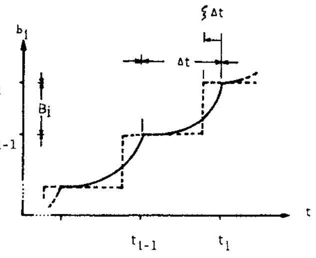
なわち施設規模の増加に対して，便益は単調に増加するが，その勾配（限界便益とよぶことにする）は単調に逓減する．通常定弾性率モデル（図―4 (a)）が用いられることが多い．ここではまず仮定⑨（図―4 (c)）を採用する．

図の s_f' を超えて規模を拡張しても便益は増大しない．よって仮定⑬を用いる．以後 $s_f > s_f'$ のときは，s_f' を新たに s_f と書くことにする．このとき拡張完了までの期間を通じて，年平均便益は施設規模に比例する．すなわち，

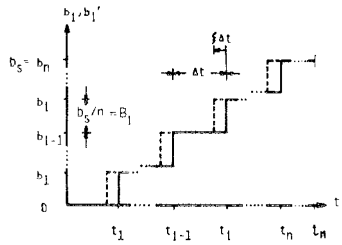
$$b(t,s)=b_s(t)/s_f \cdot s \quad \cdots\cdots(18)$$

b）総　便　益

総便益 B_T は，施設拡張中の便益 B_W と，拡張完了後の便益 B_R の和である．



（a）実線：実際の変化，破線：階段状関数による近似



（b）破線：（a）と同じ，実線：時差（$\xi\Delta t$）を考慮しない場合

図―5　施設拡張に伴う年平均便益の時間的変化

$$B_T=B_W+B_R \quad \cdots\cdots(19)$$

$$B_W=\sum_{i=1}^{n} B_i \quad \cdots\cdots(20)$$

ここに，B_i は第 i 段階拡張中の総便益．

仮定⑪を導入する．すなわち一般に第 i 段階の拡張による便益は，第 i 段階拡張に先んじて，あるいは遅れて生じる（図―5 (a) 実線）．これを図中の点線の階段関数で近似する．時差は $\xi\Delta t$ である．ξ が正のとき，便益が早く生じる．また，$-1/2\leqq\xi\leqq1/2$．このとき，

$$B_i=\int_{t_{i-1}-\xi\Delta t}^{t_i-\xi\Delta t} b(t,s_{i-1})\cdot \mathrm{D}(t)\mathrm{d}t \quad \cdots\cdots(21)$$

$$B_R=\int_{t_n-\xi\Delta t}^{t_M} b(t,s_f)\cdot \mathrm{D}(t)\mathrm{d}t \quad \cdots\cdots(22)$$

仮定⑥，⑩を導入して式を整理・無次元化すると（補遺6参照），

$$\tilde{B}_T=-(1/2)\cdot\tilde{b}_s\cdot(1-2\xi)\cdot\tilde{C}_f\cdot\tilde{C}(\tilde{x})/\tilde{x} \cdot\{\tilde{x}+1/(1-2\xi)\}+\tilde{b}_s \quad \cdots\cdots(23)$$

（5）評価関数と最適単位拡張規模

評価関数は純便益である．式（17），（23）より，無次元純便益 $\tilde{B}_N$ は，

$$\tilde{B}_N=-(1/2)\cdot\tilde{b}_s\cdot(1-2\xi)\cdot\tilde{C}_f \cdot\tilde{C}(\tilde{x})/\tilde{x}(\tilde{x}+G)+(\tilde{b}_s-\tilde{C}_0) \quad \cdots\cdots(24)$$

ここに，

$$G=1/(1-2\xi)\cdot(1+2/\tilde{b}_s) \quad \cdots\cdots(25)$$

式（24）の右辺第2項は定数，よって第1項を $\tilde{x}$ で微分して0とおくことにより無次元最適単位拡張規模 $\tilde{x}_*$ が求まる（補遺7参照）．

$$\tilde{x}_*=\begin{cases}\tilde{x}_0 & (0\leqq\tilde{x}_0<1\text{ のとき}) \\ 1 & (\tilde{x}_0\geqq1\text{ のとき})\end{cases} \quad \cdots\cdots(26)$$

ここに，

$$\tilde{x}_0=\begin{cases}G\cdot(1-a)/a & \text{（定弾性率モデル）}\cdots\cdots(27) \\ \sqrt{G}\cdot\sqrt{\tilde{y}/(1-\tilde{y})} & \text{（固定経費モデル）}\cdots\cdots(28)\end{cases}$$

式（27），（28）より一括拡張が有利になる条件は，

$$\begin{cases}a\leqq G/(1+G) & \text{（定弾性率モデル）}\cdots\cdots(29) \\ \tilde{y}\geqq1/(1+G) & \text{（固定経費モデル）}\cdots\cdots(30)\end{cases}$$

式（26）は過剰需要問題における最も基本的な解である．3成立条件のうち規模の経済性は a または $\tilde{y}$ として表現されている．過剰需要と予算制約は，拡張完了時に期待される年平均便益 $\tilde{b}_s$ と年予算 c の比 $\tilde{b}_s$ として表現されている．これは過剰容量問題に対する Manne の解[4]，建設時期決定問題における Marglin の解[19]などに相当するものである．

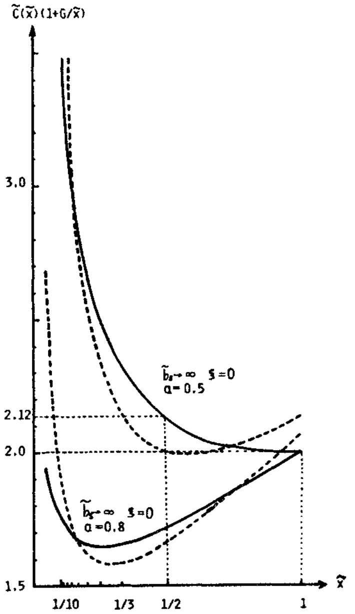
まず次のもっとも単純な場合を検討する．

$$1/\tilde{b}_s\to0,\ \xi=0,\ \text{したがって } G=1 \quad \cdots\cdots(31)$$

ここに $1/\tilde{b}_s\to0$ は，年予算が，拡張完了時に期待される年平均便益に比べて極度に少ない場合を意味する．また通常 $\xi\geqq0$ であるから，式（25）～（28）より，式（31）

は G を最小に，すなわち $\tilde{x}_0$ を最小に，すなわち最大限に多段階拡張を有利にする条件である．

評価関数の概形を図―6 に示す．費用関数として定弾性率モデルを用いた場合を実線で，固定経費モデルを用いた場合を破線で示している．式(27)～(30)に G=1 を，代入すれば下記の結論①，③が，図―6 より②―⑤が得られる．



図―6 純便益の式 (24) で，$\tilde{x}$ を含む項の概形

① 換算規模の経済性指数が 1/2 以下，換算手戻り率が 1/2 以上では一括拡張が有利 ($\tilde{x}_0 \geqq 1$).

② 段階拡張が有利になる場合 ($\tilde{x}_0<1$)，1～3 段階拡張に対して評価関数値はあまり変わらない．

③ 通常手戻り率を最小限にとどめても $\alpha<0.8, \tilde{y}>0.1$ 程度であろう．よって 4～5 段階以上の多段階拡張は経済的にみて常に不利である．

④ 費用関数として，定弾性率モデルを用いても，固定経費モデルを用いても，評価関数の概形に大きな差異はない．ただし最適単位拡張規模（あるいは段階数）については，固定経費モデルの方がやや多段階を指向する．実際の費用関数は両モデルの中間的な性質をもつと考えられる．よって，どちらの費用関数を仮定して解析しても，評価関数の概形に関するかぎり，一般的な解析結果が得られると考えてよい．

⑤ 単位拡張規模が最適値のまわりで，多少変化しても，評価関数の値はあまり変化しない．よって式(26)で与えられる最適解を目安として，本論文で考慮している要因（直接経済評価可能な要因）以外の要因に基づいて単位拡張規模を定めればよい．

次に $\tilde{b}_s$，ξ の効果について検討する．ただし，$\xi \geqq 0$ の範囲で考える．式 (25)～(28) より，

⑥ ξ が小さいとき，G も小さくなる．よって多段階拡張が有利になる．すなわち，各段階の拡張完了時点に対して．便益が遅れて生じるほど多段階拡張が有利．ξ が 1/2 に近づくと，常に一括拡張が有利．$\xi=1/2$ は，拡張途中でも工事の出来高に比例して便益が増大する場合を意味する．

⑦ $\tilde{b}_s$ が大きいほど G は小さい．ただし $\xi=0$ の場合，G の最小値は 1．この場合多段階拡張が有利．すなわち拡張完了時に期待される年平均便益に対して，年予算が小さいほど多段階拡張が有利．

4. 割引率等を考慮する場合

前章の前提条件⑥，⑨，⑩を以下のように緩和する．

⑥′ 割引率を考慮し，純便益を現在価値評価する．

⑨′ 指数関数型の便益関数（図―4 (b)）を用いる．

⑩′ 年平均便益の飽和水準 b_s も，時間とともに指数関数的に増大する．

このとき，

$$\mathrm{D}(t)=\begin{cases} e^{-rt} & (0\leqq t\leqq t_M) \\ 0 & (t>t_M) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

$$b(t,s)=b_s(1-e^{-\theta s})=b_s(1-e^{-\tilde{\theta}\tilde{s}}) \cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

$$b_s(t)=b_{s0}\,e^{r_s t} \quad (0\leqq r_s<r) \cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

ここに，θ，r_s，b_{s0} は定数．θ は施設規模に対する限界便益の逓減を，r_s は時間に対する便益の増大を示す定数．

式 (32)～(34) を式 (15)，(19)～(22) に代入し，無次元化する．$t_M \geqq t_n-\xi\Delta t$ の範囲で次式が得られる（**補遺 8** 参照)．

$$\tilde{C}_T=1-e^{-\tilde{A}/\tilde{r}}+\tilde{C}_0 \cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

$$\tilde{B}_W=\frac{\tilde{b}_{s0}}{\tilde{r}'}\cdot e^{\xi\tilde{x}\tilde{A}}\left[(1-e^{-\tilde{A}})-\frac{\{1-e^{-(\tilde{\theta}+\tilde{A})}\}(1-e^{-\tilde{x}\tilde{A}})}{1-e^{-\tilde{x}(\tilde{\theta}+\tilde{A})}}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

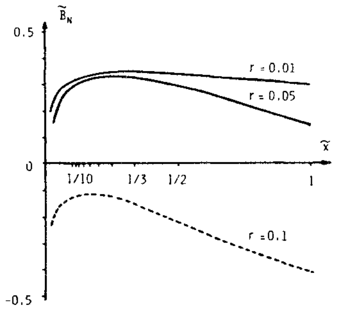
$$\tilde{B}_R=\frac{\tilde{b}_{s0}}{\tilde{r}'}(1-e^{-\tilde{\theta}})\{e^{\tilde{A}(\xi\tilde{x}-1)}-e^{-\tilde{r}'t_M}\} \cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

$$\tilde{B}_N=(\tilde{B}_W+\tilde{B}_R)-\tilde{C}_T \cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

ここに，$\tilde{A}=\tilde{r}'\tilde{C}_f\tilde{C}(\tilde{x})/\tilde{x}$.

折線関数近似の便益関数を用い，かつ割引率を導入する場合についても同様の式を導くことができる．

式 (38) については解析的に最適解を求めることはできない．数値計算により単位拡張規模 $\tilde{x}$ と純便益 $\tilde{B}_N$ の関係を調べる．割引率の効果を調べた例を図―7 に示す．これより次のことがわかる．



（$r=0.1$ の場合は $\tilde{B}_N<0$ となるので拡張しない）

条件：$\tilde{\theta}=2$, $r_s=0$, $\tilde{C}_0=0$, $t_N=50$, $a=0.8$, $\tilde{C}_f=15\ r$, $\tilde{b}_{s0}=2$

図—7 割引率の効果

① 割引率が変わると，純便益の値は大きく変わる．

② しかし最適段階数にはほとんど影響しない．図—7の例ではやや多段階拡張を有利にしているが，必ずしもそうではない例もある．

5. 結　　論

過剰需要問題，すなわち予算制約下の1施設の段階的規模拡張問題について理論的検討を行った．次の成果を得た．

① 1施設の段階的規模拡張問題には数種の基本型があること，過剰需要問題は基本型の1つであることを示した．

② 割引率等を無視して単純化したモデルについて，最適単位拡張規模の式，(26) を解析的に導いた．

③ 割引率等の影響を調べるために，現在価値換算純便益の式を導き，その特性を数値解析的に検討した．

以上により次の諸点が明らかになった．

① 規模の経済性が小さいほど多段階拡張が有利，大きいほど一括拡張が有利．

② 換算規模の経済性指数 a が 1/2 以下，換算手戻り率 $\tilde{y}$ が 1/2 以上なら常に一括拡張が有利．

③ 施設拡張完了時の年平均便益対年予算の比が大きいほど段階拡張が有利．

④ 各段階の拡張完了時からみて早めに便益が生じるときは一括拡張が有利．

⑤ 割引率が大のとき，多段階拡張がやや有利．

⑥ 費用関数としては，定弾性率モデル，固定経費モデルのうち，いずれかを仮定して解析すれば一般的な解析とみなし得る．

⑦ 段階拡張が有利になる場合，1～3段階拡張に対して純便益の値はあまり変わらない．4～5段階以上の多段階拡張は経済性の点からみて不利．

⑧ 単位拡張規模（拡張段階数）が，最適値のまわりで多少変化しても純便益の値はあまり変わらない．

以上より，式 (26) で与えられる最適解を目安として，経済性以外の要因を考慮して拡張段階数を決めればよい．他の要因，たとえば不確実性の影響は，より多段階拡張を有利にする方向に働く場合が多いと考えられる．よって経済性からみて，不利にならない範囲で，より多段階で施設拡張を行えばよい．

需要があるにもかかわらず予算制約が厳しく，かつ各段階の拡張完了と同時に施設規模に対応する便益が生じる場合（$\xi=0$）には，次が1つの目安となろう．

① 換算規模の経済性指数が 1/2 以下，または換算手戻り率が 1/2 以上では一括拡張．

② それ以外の場合，段階拡張について技術的な問題がなければ 2～3 段階拡張．

本研究は段階的治水計画に関する研究の一環として行われた．全体的な研究の枠組については文献21)参照．

謝　辞：本研究は福森一雄氏（現・大阪府）の協力のもとに進められた．記して謝意を表する．

補　遺　1

通常，費用と施設規模，施設規模と容量の間にそれぞれ規模の経済性，不経済性などが働く．規模を容量で評価する場合は，これらが総合された形で規模の経済性，不経済性が働く．

補　遺　2

③の結果は常識に反する．著者らは以下がその理由であろうと考えている．Manne の解析[4]では，将来の不確実性を考慮して，計画の初期段階で単位拡張規模を定める．将来，より正確な情報が得られた時点で適応制御的に対応するわけではないので，段階拡張の利点を生かすことができない．

長尾・森杉ら[14]の解析では，第1期拡張後に，新たな情報に基づいて再度意志決定を行うという意味で適応制御的である．

補　遺　3

式 (3)，(4) より次式の σ^2 を求める．

$$\sigma^2=\int_0^{sf}\{C_E(x)-C_R(x)\}^2\,dx \cdots\cdots(39)$$

σ^2 を m, y で微分して0とおき，式を整理すれば (7)～(12) が得られる．

補　遺　4

C_0 に予算制約があれば着工が遅れる．仮定⑥，⑩のもとでは，着工遅れ分だけ時間原点を移動させれば以下の解析はそのまま成立する．

補 遺 5

仮定⑧より次の 2 ケースのいずれかを仮定する．

① c_{mi} が一定のとき

次式の C_0' は一定値となる．

$$C_0'=\int_0^{tM} c_{mi}\cdot \mathrm{D}(t)\mathrm{d}t \cdots\cdots(40)$$

C_0' を C_0 に加えたものを新たに C_0 とする．

② c_{mi} が b_i に比例するとき

(b_i-c_{mi}) は b_i に比例する．この比例定数を b_i に乗じたものを新たに b_i とする．

以上により表式上は c_{mi} を無視することができる．

補 遺 6

第 i 段階の年平均便益は $(i-1)\cdot b_s/n$．よって図—5 で，時差 $\xi\Delta t$ を考慮しないときの第 i 段階の便益を B_i' とすると，

$$B_i'=(i-1)\cdot b_s/n\cdot\Delta t \cdots\cdots(41)$$

時差による便益の増加分は全拡張期間の合計で $b_s\cdot\xi\Delta t$．よって，

$$B_\mathrm{W}=\sum_{i=1}^{n} B_i'+b_s\cdot\xi\Delta t$$

$$=1/2\cdot b_s\,\Delta t\,\{(n-1)+2\xi\} \cdots\cdots(42)$$

$$B_\mathrm{R}=b_s(t_\mathrm{M}-t_n) \cdots\cdots(43)$$

$$B_\mathrm{T}=B_\mathrm{W}+B_\mathrm{R}$$

$$=-(1/2)\cdot b_s\,\Delta t\,n\{(1-2\xi)/n+1\}+b_s\,t_\mathrm{M} \cdots\cdots(44)$$

$\Delta t=C(x)/c$, $n=1/\tilde{x}$ などを用い，全体を ct_M で割って無次元化すれば式 (23) が得られる．

補 遺 7

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{B}_\mathrm{N}}{\mathrm{d}\tilde{x}}\approx-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}}\{\tilde{C}(\tilde{x})(1+G/\tilde{x})\}$$

$$=-(1+G/\tilde{x})\cdot\frac{\mathrm{d}\tilde{C}(\tilde{x})}{\mathrm{d}\tilde{x}}+G\cdot\tilde{C}(\tilde{x})/\tilde{x}^2=0 \cdots\cdots(45)$$

式 (45) に式 (5) あるいは (6) を代入すれば，式 (27)，(28) が得られる．

補 遺 8

$$\tilde{C}_\mathrm{T}=C_\mathrm{T}/(c/r)$$

$$=\left(\int_0^{t_n} c\cdot\mathrm{D}(t)\,\mathrm{d}t+C_0\right)\Big/(c/r)$$

$$=\left(c\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}t+C_0\right)\Big/(c/r)$$

$$=1-\mathrm{e}^{-rt_n}+\tilde{C}_0 \cdots\cdots(46)$$

一方，

$$rt_n=r\cdot n\Delta t=r\cdot n\cdot C(x)/c$$

$$=n\{C(s_f)/(c/r)\}\{C(x)/C(s_f)\}$$

$$=\frac{1}{\tilde{x}}\tilde{C}_f\,\tilde{C}(\tilde{x})$$

$$=\tilde{A}/\tilde{r}' \cdots\cdots(47)$$

よって，

$$\tilde{C}_\mathrm{T}=1-\mathrm{e}^{-\tilde{A}/\tilde{r}'}+\tilde{C}_0 \cdots\cdots(48)$$

$$B_i=\int_{t_{i-1}-\xi\Delta t}^{t_i-\xi\Delta t} b(t,s_{i-1})\cdot\mathrm{D}(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_{i-1}-\xi\Delta t}^{t_i-\xi\Delta t} b_{s0}\,\mathrm{e}^{r_s t}(1-\mathrm{e}^{-\theta s_{i-1}})\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{b_{s0}}{r'}\mathrm{e}^{r'\xi\Delta t}(1-\mathrm{e}^{-\theta s_{i-1}})(\mathrm{e}^{-r't_{i-1}}-\mathrm{e}^{-r't_i}) \cdots\cdots(49)$$

ここに，$r'=r-r_s$, $s_{i-1}=s_f/n\cdot(i-1)$

$$B_\mathrm{W}=\sum_{i=1}^{n} B_i$$

$$=\frac{b_{s0}}{r'}\mathrm{e}^{r'\xi\Delta t}\left[(1-\mathrm{e}^{-nr'\Delta t})-\frac{\{1-\mathrm{e}^{-n(\tilde{\theta}\tilde{x}+r'\Delta t)}\}(1-\mathrm{e}^{-r'\Delta t})}{1-\mathrm{e}^{-(\tilde{\theta}\tilde{x}+r'\Delta t)}}\right] \cdots\cdots(50)$$

ここに，$\tilde{\theta}=\theta s_f$．

式 (50) を無次元化すれば式 (36) が得られる．

$$B_\mathrm{R}=\int_{t_n-\xi\Delta t}^{\infty} b(t,s_f)\cdot D(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{b_{s0}}{r'}(1-\mathrm{e}^{-\tilde{\theta}})(\mathrm{e}^{-r't_n}\,\mathrm{e}^{-r'\xi\Delta t}-\mathrm{e}^{-r't\mathrm{M}}) \cdots\cdots(51)$$

式 (51) を無次元化すれば式 (37) が得られる．

参 考 文 献

1) 江藤剛治・室田 明・水野雅光：段階的治水計画について，第 25 回水理講演会論文集，pp. 279～284，1981 年 2 月．

2) 土木学会：建設プロジェクトの分析と評価，p. 19，1980 年．

3) Chenery, H. B. : Overcapacity and the acceleration principle, Econometrica, Vol. 20, No. 1, pp. 1～28, Jan., 1952.

4) Manne, A. S. : Capacity expansion and probabilistic growth, Econometrica, Vol. 29, No. 4, pp. 632～649, Oct., 1961.

5) 吉田 滋：高速道路の段階建設計画の規準（Ⅰ），（Ⅱ），高速道路と自動車，Vol. XII，No. 3，pp. 30～36，No. 4，pp. 25～29，1969 年．

6) Weitzman, M. L. : Optimum growth with scale economies in the creation of overhead capital, Review of Economic Studies, XXX VII (4), pp. 555～570, 1970.

7) Sorensen, K. E. and Jackson, R. D. : Economic planning for staged development, J. Hy. Div., Proc. ASCE, HY 5, pp. 1231～1244, Sept., 1968.

8) Scarato, R. F. : Time-capacity expansion of urban water systems, WRR, Vol. 5, No. 5, pp. 929～936, Oct., 1969.

9) Riordan, C. : General multistage marginal cost dynamic programming model for the optimization of a class of investmment-pricing decisions, WRR, Vol. 7, No. 2, pp. 245～253, April 1971.

10) Riordan, C. : Multistage marginal cost model of investment-pricing decisions, application to urban water supply treatment facilities, WRR, Vol. 7, No. 3, pp. 463～478, June 1971.

11) Mulvihill, M. E. and Dracup, J. A. : Optimal timing and sizing of a conjunctive urban water supply and wastewater system with nonlinear programming, WRR, Vol. 10, No. 2, pp. 170～175, April 1974.

12) Westphal, L. E. : Planning investments with economies of scale, Contributions to Economic Analysis 69, North-Holland Pub., 1971.

13) Dore, M. H. I. : Dynamic Investment Planning, Croom Helm, 1977.

14) 長尾義三・森杉寿芳・吉田哲生：非弾力性需要のもとにおける段階建設について，土木学会論文報告集，第 250 号，pp. 73～83，1976 年 6 月.

15) 長尾義三・田口晶一：動学的施設配置計画問題に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，第 277 号，pp. 113～122，1978 年 9 月.

16) 吉川和広・岡田憲夫・大内忠臣：1 水系流域における水利用システムの段階的規模拡張方式に関する研究，土木学会論文報告集，第 274 号，pp. 105～117，1978 年 6 月.

17) 室田　明・江藤剛治：投資配分問題としての河川段階改修計画，第 27 回水理講演会論文集，pp. 475～484，1983 年 2 月.

18) 土木学会編：土木計画学シリーズ 1，土木計画学の成立と背景，技報堂，p. 172，1978 年 3 月.

19) Marglin, S. : Approaches to dynamic investment planning, North-Holland Pub., Amsterdam, 1963, 13) より引用.

20) 長尾義三・笠島勝治：不確実な需要下における計画目標期の設定，土木学会論文報告集，第 336 号，pp. 139～147，1983 年 8 月.

21) 江藤剛治・室田　明：段階的治水計画に関する研究，土木計画学研究・論文集，Vol. 1，pp. 227～234，1984 年 1 月