

任意三次元応力径路下の砂のせん断挙動とその解析

ANALYSIS OF SHEAR BEHAVIOR OF SAND UNDER VARIOUS
THREE-DIMENSIONAL STRESS PATHS

中井 照 夫*・三原 泰 司**

By Teruo NAKAI and Yasuji MIHARA

The purpose of this paper is to explain the shear behavior of sand under various three-dimensional stress paths. In the stress-strain model under shear proposed here, the direction of strain increments is analyzed by considering the sliding mechanism on a spherical surface in the principal value space of the mechanical quantity t_{ij} which has been introduced to describe uniquely soil behavior in three-dimensional stresses. The magnitude of strain increments is calculated with reference to the idea by Prévost where the properties of isotropic and kinematic hardenings in plasticity are combined. The validities of this model are then confirmed by the true triaxial tests on Toyoura sand not only under radial straight stress paths on the octahedral plane but also under rotational stress paths that the direction of shear stress on the octahedral plane is changed continuously.

1. ま え が き

境界値問題の数値解析法の進歩と電子計算機の普及により、土要素の構成式が与えられれば、比較的容易に実際の地盤の静的あるいは動的解析ができるようになってきている。そして、静的あるいは動的な土の応力・ひずみ関係式を求めるべく多くの研究がなされているが、それらの多くは三軸圧縮条件あるいは三軸伸張条件に限られて理論が展開されまたその検証がなされているようである。しかし、実際の地盤の土要素の応力径路は三軸圧縮・伸張条件に限られることはなく、特に地震時の地盤の挙動等を定量的に解析するためには3次元応力下のランダムな応力径路下の土の変形挙動を統一的に説明し得る精巧な構成式が必要となってくる。そこで、三次元応力下の土のせん断挙動を説明するためにいくつかの実験的あるいは理論的研究がなされているが、ここでも対象とする土の特性は正八面体面上でせん断応力の方向が変化しない直線応力径路下におけるものが中心となっている。そのようななかで、三次元応力下においてせん断応

力の方向が変化する場合の解析を試みた応力・ひずみモデルとしては、太田・関口による換算応力比 η^* を用いる弾塑性モデル¹⁾や松岡による複合滑動面の概念²⁾を参考にした山田・石原のモデル³⁾、松岡ほかのモデル⁴⁾がある。また、一般的な三次元応力下ではないがランダムな繰返し応力を受ける土の力学挙動を等方ひずみ硬化則および移動ひずみ硬化則を混合させた弾塑性理論で説明しようとするモデルが Prévost⁵⁾ や Mróz⁶⁾ ほかにより提案されている。

さて、松岡および著者の1人はすでに空間滑動面とそれに基づくひずみ増分量の概念 (SMP* の概念) を用いて三次元応力下の土の応力・ひずみモデル^{7), 8)}を開発し、さらに著者らはこの概念を発展させ、三次元応力下の土の挙動を統一的に説明し得る力学量 t_{ij} を提案し、弾塑性モデルに適用している^{9), 10)}。しかし、これらのモデルにおいてもせん断応力方向の変化が土の変形特性に及ぼす影響については直接的には考慮されていない。本研究は、三主応力制御試験機を用いて正八面体面上で直線となる径路やせん断応力方向が連続的に変化する回転径路下の砂のせん断試験を行うとともに、それらの力学挙動を同一観点から説明することを目的とする。まず、徳江のストレス・ダイレイタンシーモデル¹¹⁾と既往の SMP* の概念⁷⁾を参考に球面上のすべりを t_{ij} の主値空

* 正会員 工博 名古屋工業大学助教授 工学部土木工学科
(〒466 名古屋市昭和区御器所町)

** 正会員 工修 清水建設(株)土木技術部 (元・名古屋工業大学大学院生)

間で考えることにより、ランダムな応力径路下の砂のひずみ増分方向を決めるモデルを提案する。そして、ひずみ増分の大きさを Prévost の理論⁵⁾を参考に算定することによって、三次元応力下の一般的なせん断時の応力・ひずみ関係式を誘導するとともに、その妥当性を三主応力制御試験結果により検討する。

なお、本論文では応力はすべて有効応力を意味する。また、 σ_1 , σ_2 , σ_3 や ε_1 , ε_2 , ε_3 は三主応力と三主ひずみを表すが、特に断らない限り大小関係は問わない。

2. 実験の概要

(1) 実験装置および実験方法

実験は図一に示されたセル型三主応力制御試験機で行っている。同図からわかるように、鉛直方向 (a 方向) の応力は剛板を介してピストンで、水平一方向 (l 方向) の応力は側方の剛板を介してセル内に懸架されたエアシリンダーで、もう一つの水平方向 (r 方向) はセル内の液圧で荷重される。つまり 2 方向剛板荷重 1 方向液圧荷重の三主応力制御試験機である。さて、通常このタイプの試験機ではセル内の水平方向応力荷重装置の荷重面が供試体を含んでいるゴムスリーブの外側にあるため、セル圧 (液圧) より小さい応力をこの水平方向応力荷重装置でかけることはできない。しかし本装置では、図一に示すように鉛直方向 (a 方向) だけでなく、側方 (l 方向) の剛板もゴムスリーブによって包みこまれているため、セル内の液圧 (σ_r) より小さい σ_a や σ_l も荷重できるのが特徴の一つである。したがって、原理上セル圧に関係なく 3 主応力の大きさを任意に変えることが可能である。その他本装置の詳細や試験精度についてはすでに発表¹²⁾済みなので、ここでは省略する。

試料は飽和した豊浦砂 (平均粒径 0.2 mm, 均等係数 1.3, 比重 2.65, 最大間隙比 0.95, 最小間隙比 0.58) である。供試体 (試料体積: $10 \times 10 \times 7 = 700 \text{ cm}^3$) の作成にあたっては試料を 4 層につめ、各層ごとに径 6 mm の棒で突き固めることにより構造を乱し、できるだけ初

期構造の異方性が入らないようにした。なお、このとき供試体の初期間隙比 e_0 は約 0.68 になるようにしている。実験はすべて排水条件のもとで、応力制御法で行っている。応力は段階応力で与え、ある応力状態の各軸ひずみ速度が 0.001 %/min. 以下になった後に次の段階応力を加えている。

(2) 実験の応力径路

実験の応力径路について述べる。土質力学の分野では一般に平均主応力一定条件下での土の挙動をせん断と呼んでいるので、ここでも実験はすべて平均主応力一定条件下 ($\sigma_m = 196 \text{ kN/m}^2$) で行われている。図一は正八面体面上の応力径路を示している。ここに、 σ_1 , σ_2 , σ_3 は 3 主応力を表わし、 θ は図中に示されているように正八面体面上で σ_1 方向からなす角を表わしている。つまり、 $\theta = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ は三軸圧縮条件を、 $\theta = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$ は三軸伸張条件を、その他は相異なる 3 主応力が作用している条件になる。行った実験の種類は次の 4 つである。

(i) θ 一定径路 (Radial Path)

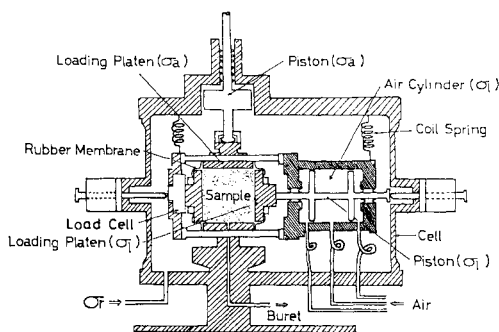
正八面体面上で等方応力状態から θ 一定の直線径路でせん断する径路。 $\theta = 0^\circ$ (三軸圧縮条件), $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ (三軸伸張条件) の 5 つの径路で実験を行っている。

(ii) τ_{SMP}/σ_{SMP} 一定径路 (Rounded Triangular Path)

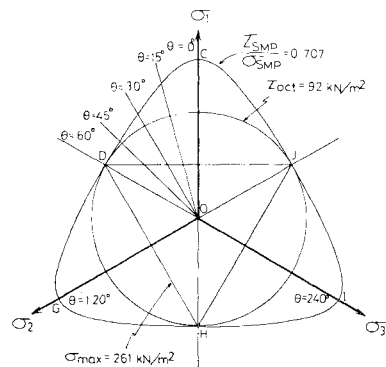
$\theta = 60^\circ$ ($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$) で最大・最小主応力比 $\sigma_1/\sigma_3 = 4$ まで θ 一定径路でせん断後、空間滑動面 (SMP) に基づく規準 ($\tau_{SMP}/\sigma_{SMP} = 0.707$) にそって正八面体面上を回転する径路。三軸圧縮条件 (図一の C, G, I 点) と三軸伸張条件 (D, H, J 点) では最大・最小主応力比 = 4 となる。

(iii) τ_{oct} 一定径路 (Circular Path)

$\theta = 60^\circ$ で $\sigma_1/\sigma_3 = 4$ まで θ 一定径路でせん断後、Mises の規準 ($\tau_{oct} = 92 \text{ kN/m}^2$) にそって正八面体面上を回転する径路。



図一 三主応力制御試験機の概要図



図二 正八面体面上の応力径路

(iv) 最大主応力一定径路 (Triangular Path)

$\theta=60^\circ$ で $\sigma_1/\sigma_3=4$ まで θ 一定径路でせん断後, 最大主応力 σ_{max} が一定 ($\sigma_{max}=261 \text{ kN/m}^2$) になるように正八面体面上を動かす径路. 図-2 からわかるように正八面体面上で逆三角形の径路になる.

3. ランダムな応力径路下の砂のせん断モデル

(1) 力学量 t_{ij} の定義^{9), 10)}

土のような粒状体はたとえその初期構造が等方的であっても応力比の変化に伴い異方的な挙動(誘導異方性)を示す材料である. これは土が基本的には連続体ではなく, 摩擦則に従う粒状材料であることによる. そして, 現在までに, このような土の力学挙動を空間滑動面 (SMP) とそれに基づくひずみ増分量の概念 (以下 SMP* の概念と略称する)⁷⁾ によって統一的に解釈してきている. さて, 空間滑動面 (SMP)¹³⁾ は三主応力 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) の作用方向を I, II, III 軸としたとき, 図-3 の面 ABC で与えられ, この SMP が三軸を切る点は各主応力のルートの割合に比例する. ゆえに, SMP の法線の方向余弦 (a_1, a_2, a_3) は次式で与えられる.

$$a_i = \sqrt{J_3 / (\sigma_i \cdot J_2)} \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots (1)$$

ここに, J_1, J_2, J_3 は応力の一次, 二次, 三次の不変量であって, 次式で表わされる.

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ J_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

そして, 三次元空間内の土粒子の滑動はこの SMP 上のせん断・垂直応力比 (τ_{SMP}/σ_{SMP}) に支配され, そのときの土粒子の平均的な滑動成分は主ひずみ増分ベクトルによって表わされると考えている. つまり, SMP* の概念では, 式 (3), (4) で示される変換式で与えられる SMP 上の垂直およびせん断応力 (τ_{SMP}, σ_{SMP}) と, 式 (5), (6) で示される変換式で与えられる SMP に

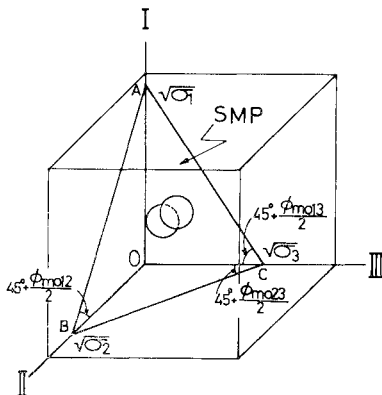


図-3 三次元空間内の土要素と空間滑動面

基づくひずみ増分量 ($d\varepsilon_{SMP}^*, d\gamma_{SMP}^*$) の間に応力条件によらないユニークな関係式が成立することを基本条件として三次元応力下の土の構成式を誘導している^{7), 8)}.

$$\sigma_{SMP} = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$\tau_{SMP} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 a_1^2 a_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 a_2^2 a_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 a_3^2 a_1^2} \dots\dots\dots (4)$$

$$d\varepsilon_{SMP}^* = d\varepsilon_1 a_1 + d\varepsilon_2 a_2 + d\varepsilon_3 a_3 \dots\dots\dots (5)$$

$$d\gamma_{SMP}^* = \sqrt{(d\varepsilon_1 a_2 - d\varepsilon_2 a_1)^2 + (d\varepsilon_2 a_3 - d\varepsilon_3 a_2)^2 + (d\varepsilon_3 a_1 - d\varepsilon_1 a_3)^2} \dots\dots\dots (6)$$

さて, いま (t_1, t_2, t_3) = ($\sigma_1 a_1, \sigma_2 a_2, \sigma_3 a_3$) なる量を用いて式 (3), (4) を書き換えれば,

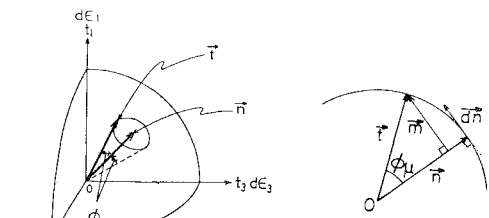
$$\sigma_{SMP} = t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 \dots\dots\dots (7)$$

$$\tau_{SMP} = \sqrt{(t_1 a_2 - t_2 a_1)^2 + (t_2 a_3 - t_3 a_2)^2 + (t_3 a_1 - t_1 a_3)^2} \dots\dots\dots (8)$$

となり, (σ_{SMP}, τ_{SMP}) は, ($d\varepsilon_{SMP}^*, d\gamma_{SMP}^*$) が $d\varepsilon_i$ ($i=1, 2, 3$) のベクトル変換量であると同様, t_i ($i=1, 2, 3$) のベクトル変換量とみることができる. したがって, 上述の SMP* の概念は $\vec{t}_i = (t_1, t_2, t_3)$ および $d\vec{\varepsilon}_i = (d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3)$ の SMP に垂直な成分と平行な成分間で, 応力条件によらないユニークな関係式を規定する概念と解釈できる. そして, このような SMP* の概念の新たな考察から, 粒状性材料の力学挙動を規定する新たな力学量として ($\sigma_1 a_1, \sigma_2 a_2, \sigma_3 a_3$) を主値とするテンソル量 t_{ij} を提案している. なお, 応力 σ_{ij} の代わりにこの力学量 t_{ij} を用いて解析すれば三次元応力下の土の力学挙動が妥当に説明できることは, 弾塑性構成式への適用例によりすでに検証している^{9), 10)}.

(2) ひずみ増分方向を決めるモデル

上述したように t_{ij} なる力学量を用いれば三次元応力下の土の挙動を統一的に解釈できるということより, ここでは図-4 に示すように t_{ij} の主値 (t_1, t_2, t_3) 空間の正の領域に 1/8 球 (半径 $r=1$) を想定する¹¹⁾. そして,



(a) \vec{n} と \vec{t} の位置関係 (b) $d\vec{n}$ の説明図
図-4 ひずみ増分方向を決めるモデルの概要図

注1) 本論文では主軸の回転については考えないので, 以下 t_{ij} の主値 (t_1, t_2, t_3) を用いて解析を行う.

三次元応力下の平均的な土粒子の滑動がこの球面上で代表されると考え、ランダムな応力径路下の土のひずみ増分方向を決めるモデルを提案する。主三応力 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) が作用している土要素内で滑動する粒子接点の平均的な方向を表わす単位ベクトルを $\vec{n}=(n_1, n_2, n_3)$ とし、このときの力学状態を表わす単位ベクトルを $\vec{i}=(u_1, u_2, u_3)$ とする。ここに単位ベクトル \vec{i} は式 (9) に示されるように力学量 l_{ij} の主値ベクトル、

$$\vec{i}_i=(l_1, l_2, l_3) = (\sigma_1 a_1, \sigma_2 a_2, \sigma_3 a_3) \dots\dots\dots(9)$$

を式 (10) に示すように単位ベクトル化したものである⁽¹²⁾。

$$u_i = \frac{l_i}{(l_j \cdot l_j)^{1/2}} = \sqrt{\frac{\sigma_i}{J_i}} \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots(10)$$

ここに、 σ_i ：主応力、 J_i ：応力の一次の不変量。いま、砂のせん断挙動が広い意味での摩擦則（応力比）に支配されるとするならば、要素内の土粒子が十分モービライズされているという条件は、平均的な土粒子の滑動接点の方向を表わす単位ベクトル \vec{n} とベクトル \vec{i} が ϕ_μ の交角 (ϕ_μ ：粒子間摩擦角を反映した角度で一定値をとる) をなすことと考えられ、次式で与えられる。

$$f = \cos \phi_\mu - \vec{i} \cdot \vec{n} = \cos \phi_\mu - u_i \cdot n_i = 0 \dots\dots\dots(11)$$

これは、図-4(a) に示されるように半径1の球面上でベクトル \vec{n} を中心とする半径 $l (= \phi_\mu)$ の円周上にベクトル \vec{i} が存在することを表わしている。そして、応力が変化し \vec{i} が $f=0$ なる円の外側に変化するとき ($df > 0$)、 \vec{n} で表わされる粒子接点ですべりを生じ、 \vec{i} が円の内側に変化するとき ($df \leq 0$)、粒子間のモービライゼーションは不完全となり、粒子接点ですべりを生じないとする。さて、 \vec{i} が $f=0$ の円の外側に変化し、 \vec{n} で与えられる接点ですべりが生じるとき、式 (11) から次の適合条件式を満足する必要がある。

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i + \frac{\partial f}{\partial n_i} dn_i = 0 \dots\dots\dots(12)$$

また、このとき \vec{n} で与えられる粒子接点における滑動はそのときの力学状態を表わすベクトル \vec{i} の方向に生じるものと仮定すれば、滑動方向を表わすベクトル $\vec{dn}=(dn_1, dn_2, dn_3)$ は図-4(b) を参考にして次式で表わされる。

$$\vec{dn} = \Psi \vec{n} = \Psi (\vec{i} - \cos \phi_\mu \cdot \vec{n}) \dots\dots\dots(13 \cdot a)$$

あるいは、

$$dn_i = \Psi (u_i - \cos \phi_\mu \cdot n_i) \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots(13 \cdot b)$$

ここに、係数 Ψ は式 (12)、(13) から次式で与えられる。

$$\Psi = \frac{-\frac{\partial f}{\partial u_i} du_i}{\frac{\partial f}{\partial n_j} (n_j - \cos \phi_\mu \cdot n_j)} = \frac{-n_i \cdot du_i}{u_j (u_j - \cos \phi_\mu \cdot n_j)} \dots\dots\dots(14)$$

ゆえに、式 (13)、(14) より \vec{dn} は次式で与えられる。

$$dn_i = \frac{-n_j \cdot du_j \cdot (u_i - \cos \phi_\mu \cdot n_i)}{\sin^2 \phi_\mu} \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots(15)$$

したがって、主ひずみ増分ベクトルの方向は平均的な土粒子の滑動方向に一致すると考えられるので、主ひずみ増分方向を表わす単位ベクトル \vec{c} は次式で表わされる。

$$c_i = \frac{dn_i}{(dn_j \cdot dn_j)^{1/2}} \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots(16)$$

ここで、提案モデルの初期接点の位置 (\vec{n}) の決定法について述べる。たとえば等方圧密後のせん断を考えた場合、はじめ接点の方向はランダムなので平均的な方向をもたないが、せん断を開始すると最もモービライズしやすい接点はせん断方向 ($\vec{d}\vec{i}$ の方向) と逆方向にある滑動接点と考えられる。したがって、初期の平均的な粒子接点はこの方向の接点で代表させている。

なお、このモデルに必要なパラメーターは式 (15) からわかるように ϕ_μ 1 つだけである。

(3) ひずみ増分の大きさを決めるモデル

ここでは、Prévost⁵⁾ による移動硬化型の降伏関数群を考える弾塑性モデルを参考に、ランダムな応力径路下の土のひずみの大きさを決める。図-5(b) のプロットは通常の円筒供試体による平均主応力一定条件下の三軸圧縮および伸張試験結果を SMP 上の応力比 $X \equiv \tau_{SMP} / \sigma_{SMP} \sim \sum dE \equiv \sum (de_i \cdot de_i)^{1/2}$ 関係で整理したものである ($dE = (de_i \cdot de_i)^{1/2}$ は主ひずみ増分ベクトルの大きさを表わす)。まず、三軸圧縮あるいは伸張試験のような θ 一定径路のせん断試験の主ひずみ増分ベクトルの大きさ dE が SMP 上のせん断・垂直応力比 $X \equiv \tau_{SMP} / \sigma_{SMP}$ でユニークに整理されることと、Prévost の

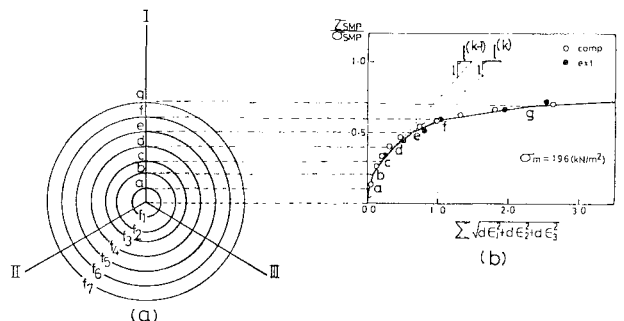


図-5 降伏関数群と θ 一定径路試験の $\tau_{SMP} / \sigma_{SMP} \sim \sum dE$ 関係

注2) 断りが無い限りテンソルの総和規約と同様 $l_j \cdot l_j$ は $\sum (l_j \cdot l_j)$ を意味する。

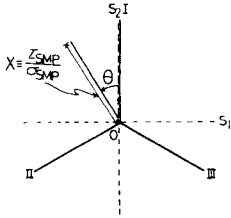


図-6 仮想応力面の説明図

複数の降伏関数を用いた移動ひずみ硬化則に着目して、図-5(a)に示されるような円形の降伏関数群を仮想応力面上に考える。この応力面は図-6に示されているように、中心Oからの距離が応力比Xを表わし、I軸からの角度がθを表わしている。そして、図-6の(s₁, s₂)なる直交座標系でf_k=0(k=1, 2, …)なる降伏関数を表わすと次式となる。

$$f_k = [(s_1 - \alpha_1^{(k)})^2 + (s_2 - \alpha_2^{(k)})^2]^{1/2} - r^{(k)} = 0 \quad (k=1, 2, \dots) \quad (17)$$

$$\left(\begin{array}{l} (\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}) : f_k=0 \text{ の中心の座標} \\ r^{(k)} : f_k=0 \text{ の半径} \end{array} \right)$$

ここに、降伏関数f₁, f₂…の半径はr₁<r₂<…となり、これらの降伏関数は互いに交差しないものとする。そして、移動ひずみ硬化則と同様応力状態の変化に伴いこれらの降伏関数が動くときにはひずみ増分が生じ、動かないときにはひずみ増分が生じないものとする。いま、図-7に示されるように、仮想応力面上でM点にある応力状態がds変化したとき、f_mがf_{m+1}と交差せずその中心がda^(m)≡(da₁^(m)・da₂^(m))^{1/2}動いたとすると次の関係式が成立する。

$$da_i^{(m)} = \mu_i \cdot d\mu \quad (i=1, 2) \quad (18)$$

$$\left(\mu_i = \frac{r^{(m+1)}}{r^{(m)}} (s_i - \alpha_i^{(m)}) - (s_i - \alpha_i^{(m+1)}) \right)$$

ここに、dμは式(18)とdf_m=0なる条件より

$$d\mu = \frac{-\frac{\partial f}{\partial s_i} ds_i}{\frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \mu_j} = \frac{(s_i - \alpha_i^{(m)}) ds_i}{(s_j - \alpha_j^{(m)}) \mu_j} \quad (19)$$

で与えられる¹³⁾。また、このとき降伏関数f_{m+1}, f_{m+2},

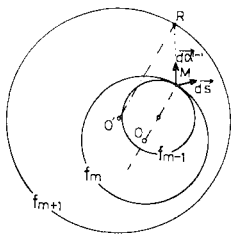


図-7 移動硬化則の説明図 (Prévost⁵⁾による)

注3) 式(18), (19)の誘導過程の詳細はPrévost⁵⁾のモデルと同様なのでここでは省略する。

…は変化せず、降伏関数f₁, f₂…、f_mが応力点Mで接しながら移動するとすると、次の関係式を満足する。

$$\frac{s_i - \alpha_i^{(m)}}{r^{(m)}} = \frac{s_i - \alpha_i^{(m-1)}}{r^{(m-1)}} = \dots = \frac{s_i - \alpha_i^{(1)}}{r^{(1)}} \quad (i=1, 2) \quad (20)$$

さて、ここでは応力増分dsが与えられたときの主ひずみ増分ベクトルの大きさdEが、これら降伏関数f₁, f₂…、f_mの移動量(da⁽¹⁾, da⁽²⁾…、da^(m))で表わされると考え、dEを次式で与える。

$$dE = \sum_{k=1}^m (g^{(k)} \cdot da^{(k)}) \quad (21)$$

ここに、g^(k)は1つの降伏関数が仮想応力面上で単位長さ移動したときのdEの変化を表わしており、おのこの降伏関数で固有の値をとるものとする。したがって、降伏関数の移動量da^(k)は式(18)から求められるので、各降伏関数のg^(k)(k=1, 2, …)を決めることにより式(21)でひずみ増分の大きさが算定される。

次にg^(k)(k=1, 2, …)の決定方法について述べる。先程の図-5(b)の三軸試験結果(X~ΣdE関係)を任意のp個の折れ線(勾配l¹, l², …, l^p)で近似する。そして、この折れ線の各折れ曲り点の応力比Xの大きさに対応する半径r^(k)(k=1, 2, …, p)をもつ降伏関数f₁, f₂…、f_mを図-5(a)のように想定する。このようにすると、θ一定径路では応力比Xが決まれば降伏関数の移動量が同じとなるので、図-5(b)のX~ΣdE関係がθによらず一義的に決定されることがわかる。いま、r^(m)<X<r^(m+1)なる場合を考えると降伏関数の移動量は、

$$\left. \begin{array}{l} da^{(1)} = da^{(2)} = \dots = da^{(m)} = dX \\ da^{(m+1)} = \dots = da^{(p)} = 0 \end{array} \right\} \quad (22)$$

となるので、dEは次式で与えられる。

$$dE = \sum_{k=1}^m (g^{(k)} \cdot da^{(k)}) = \left(\sum_{k=1}^m g^{(k)} \right) \cdot dX \quad (23)$$

式(23)において、(Σ_{k=1}^mg^(k))は図-5(b)のr^(m)<X<r^(m+1)でのX~ΣdE関係の勾配l^(m)を表わしているので、g^(m)は折れ線の勾配を使って次式で与えられる。

$$g^{(m)} = l^{(m)} - l^{(m-1)} \quad (24)$$

(ただし、l^(0)}=0)

(4) せん断時の応力・ひずみモデル

式(15), (16)から決められるひずみ増分方向や式(21)で算定されるひずみ増分の大きさは、基本的には塑性ひずみ増分に関するものと考えられるので、塑性主ひずみ増分de_i^pは次式で与えられる。

$$de_i^p = \left[\sum_j (g^{(j)} \cdot da^{(j)}) \right] \cdot c_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (25)$$

一方弾性主ひずみ増分de_i^eは圧密試験のe~logσ_m曲線の除荷時の勾配C_s(膨張指数)を用い、既報の弾性時の応力・ひずみ式¹⁴⁾を参考にして次式で与える。

$$d\epsilon_i^e = S \left\{ \frac{d\sigma_i}{\sigma_i} - \nu_e \left(\frac{d\sigma_j}{\sigma_j} + \frac{d\sigma_k}{\sigma_k} \right) \right\}$$

$$(i \neq j \neq k; i, j, k = 1, 2, 3) \dots \dots \dots (26)$$

$$\left(\text{ここに, } S = \frac{1}{3(1-2\nu_e)} \cdot \frac{0.434 C_s}{1+e_0} \right)$$

したがって、ランダムな応力径路下の土の全主ひずみ増分 $d\epsilon_i$ は次式で表わされる。

$$d\epsilon_i = d\epsilon_i^p + d\epsilon_i^e \quad (i=1, 2, 3) \dots \dots \dots (27)$$

ただし、式 (11) で与えられる f が移動しないときには $d\epsilon_i^e = 0$ となる。

4. 実験データと提案モデルによる解析値の比較

(1) 提案モデルの土質パラメーター

式 (15), (16) のひずみ増分の方角を決めるモデルのパラメーター ϕ_μ は後述する図-8の θ 一定径路試験の $\tau_{SMP}/\sigma_{SMP} \sim d\epsilon_{SMP}^*/d\gamma_{SMP}^*$ 関係を参考にして $\phi_\mu = 10^\circ$ とした。ひずみ増分の大きさを決めるモデルのパラメーターも θ 一定径路試験の $\tau_{SMP}/\sigma_{SMP} \sim \sum dE$ 関係を図-5 (b) に示す折れ線に近似することにより表-1 のように決定した。弾性時の応力・ひずみ式のパラメーターは膨張指数 C_s を用いて $C_s/(1+e_0) = 0.00578$ とし ν_e は $\nu_e = 0.23$ とした。このように、本モデルのパラメーターは塑性ひずみ増分については θ 一定径路試験 (三軸圧縮試験でよい) だけから決定され、弾性ひずみ増分については圧密試験から決定されている (ν_e については既往の論文¹⁴⁾の値を用いた)。

表-1 ひずみ増分の大きさを決めるモデルのパラメーター

f_k	$r^{(k)}$	$l^{(k)}$ (%)
f_1	0.1	0.52
f_2	0.2	1.03
f_3	0.3	1.63
f_4	0.4	2.39
f_5	0.5	4.54
f_6	0.6	11.8
f_7	0.7	24.5
f_8	0.75	35.0
f_9	0.8	70.0

(2) ひずみ増分方向の実測値と解析値の比較

式 (15), (16) から得られるランダムな応力径路下の土のひずみ増分方向の計算値と実測値の比較を行う。

図-8は θ 一定径路の試験結果を SMP* の概念⁷⁾に従って応力比 $\tau_{SMP}/\sigma_{SMP} \sim$ ひずみ増分比 $d\epsilon_{SMP}^*/d\gamma_{SMP}^*$ 関係で整理したものである。プロットが実測値を、実線が提案モデルによる解析値を表わしているが、 θ 一定径路

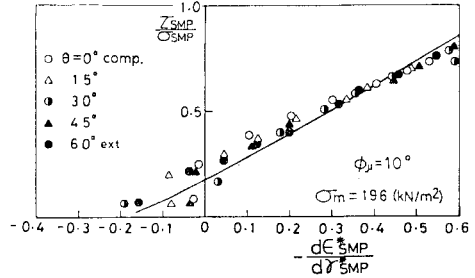
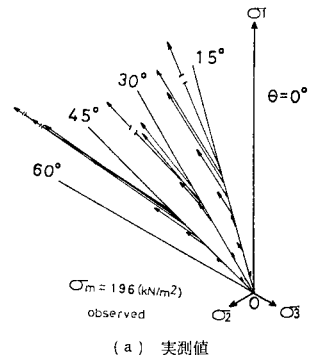
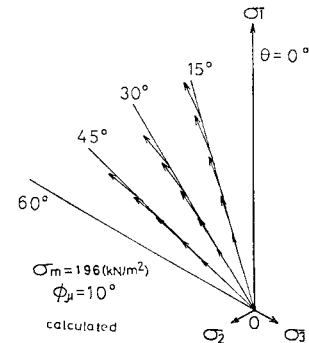


図-8 θ 一定径路試験の $\tau_{SMP}/\sigma_{SMP} \sim d\epsilon_{SMP}^*/d\gamma_{SMP}^*$ 関係



(a) 実測値



(b) 解析値

図-9 θ 一定径路試験の正八面体面上のせん断ひずみ増分方向

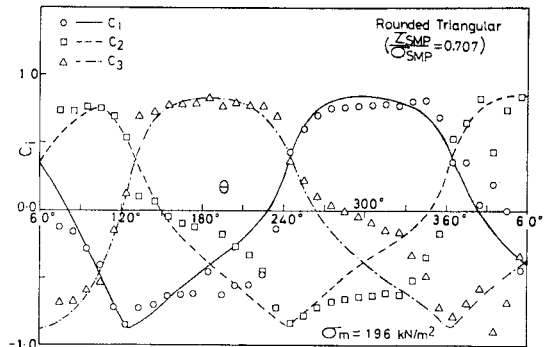


図-10 τ_{SMP}/σ_{SMP} 一定径路試験の主ひずみ増分ベクトルの方向余弦

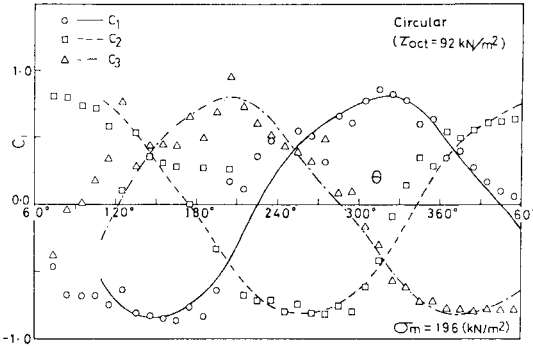


図-11 τ_{oct} 一定径路試験の主ひずみ増分ベクトルの方向余弦

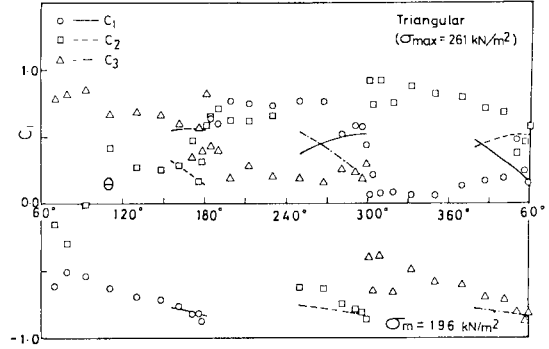


図-12 最大主応力一定径路試験の主ひずみ増分ベクトルの方向余弦

では θ の大きさにかかわらず実測値も解析値もほぼユニークに整理されることがわかる。また、図-9は θ 一定径路試験 ($\theta=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$) の正八面体面上のひずみ増分方向をベクトルで表わしたものである。(a) 図が実測値を、(b) 図が解析値を表わしている。なお、(a) 図の実測値ではベクトルの大きさは正八面体面上のひずみ増分 ($d\gamma_{oct}$) と正八面体面上のせん断・垂直応力比増分 $d(\tau_{oct}/\sigma_{oct})$ との比で表わしている。 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ なる θ 一定径路では応力比が大きくなるに従いひずみ増分方向が一方にずれる実測値の傾向を提案モデルは従来の SMP* 理論同様よく説明している。

なっているのは、解析値がないところでは図-4に示される球面上ですべりが起こらず ($df \leq 0$) 滑動によるひずみが生じないことによる。

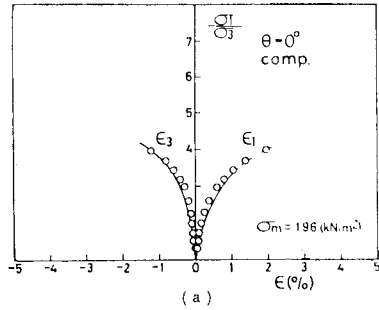


図-10, 11, 12は τ_{SMP}/σ_{SMP} 一定径路 (Rounded Triangular Path), τ_{oct} 一定径路 (Circular Path), 最大主応力一定径路 (Triangular Path) 試験におけるひずみ増分方向を表わしている。横軸に応力状態を表わす角度 θ をとり、縦軸に主ひずみ増分方向を表わす単位ベクトルでの成分 (c_1, c_2, c_3) をとっている。ここに $c_i (i=1, 2, 3)$ は式 (16), あるいは次式で与えられ、主ひずみ増分ベクトルの方向余弦を意味する。

$$c_i = \frac{d\epsilon_i}{(d\epsilon_j \cdot d\epsilon_j)^{1/2}} \quad (i=1, 2, 3)$$

.....(28)

これらの図において、実測値(プロット)にばらつきがあるものの、解析値(曲線)と実測値はよい対応を示しているのがわかる。なお、図-12の Triangular Path 等で解析値が不連続と

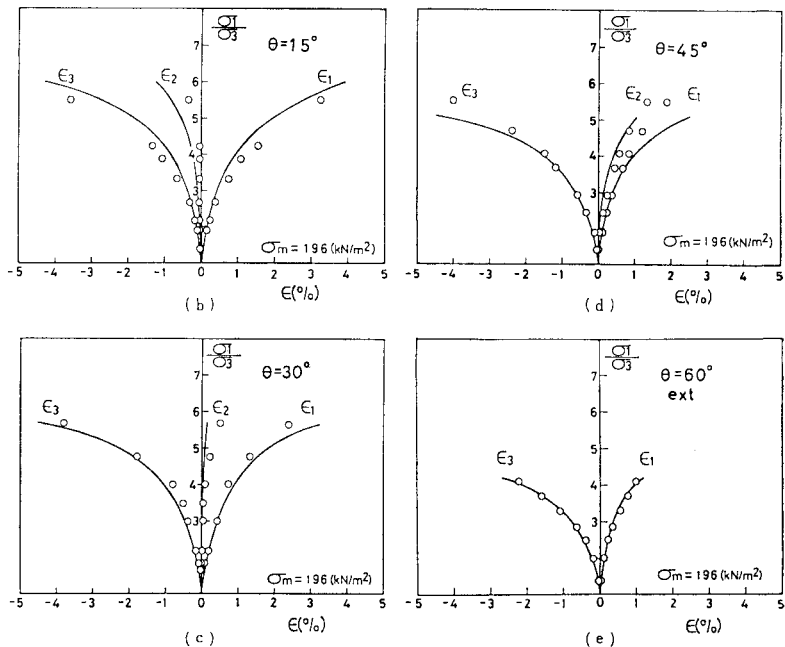


図-13 θ 一定径路試験の最大・最小主応力比 σ_1/σ_3 ~ 主ひずみ ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$) 関係 ($\theta=0^\circ$ (三軸圧縮条件), $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ (三軸伸張条件))

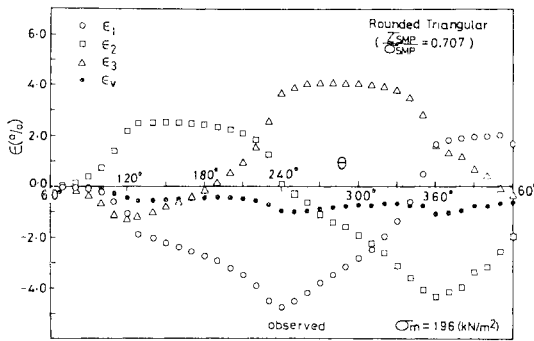
以上、図-4 に示されるモデルが種々の応力径路下のひずみ増分方向を妥当に説明できることを示したが、これはこのモデルから得られる関係式が応力比-ひずみ増分比関係式（ストレス・ダイレイタンス式）のより一般化されたものになっていることを意味している。

(3) 応力・ひずみ関係の実測値と解析値の比較

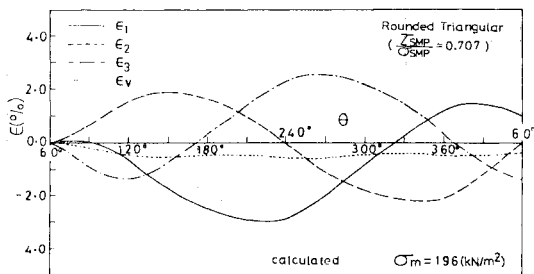
ここでは式 (25)~(27) から得られるランダムな応力径路下の応力・ひずみ関係の計算値と実測値の比較を行う。

図-13 は θ 一定径路の実測値(プロット)と解析値(実線)を最大・最小主応力比 $\sigma_1/\sigma_3 \sim$ 主ひずみ ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$) 関係で表わしている。同図にみられるように、解析値は実測値をよく説明している。特に、 $\theta=15^\circ$ で ϵ_2 が膨張側となり $\theta=30^\circ$ で圧縮側となる実測値の傾向をよく表わしている。

図-14, 15, 16 は $\theta=60^\circ$ から回転させる応力径路下(図-2 参照)における各主ひずみ ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$) と体積ひずみの変化を、横軸に応力状態を表わす角度 θ をとり示したものである。(a) 図は実測値を、(b) 図は解析値を表わしている。解析値は図-14 では実測値より小さめに、図-15, 16 では大きめにひずみを評価しているが、全体的にはひずみの実測値の傾向をよく説明している。なお、これらの実測値は松岡による複合滑動面 (CMP) の概念に基づいても同様に解析される⁴⁾。



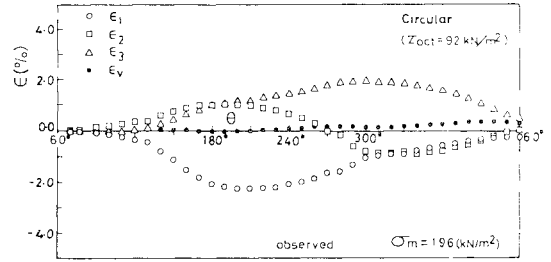
(a) 実測値



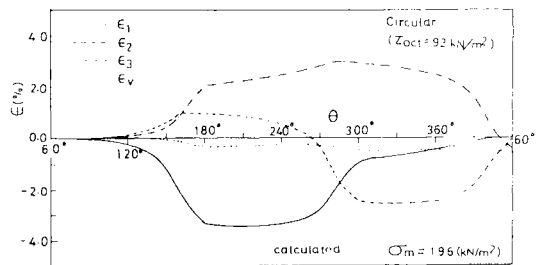
(b) 解析値

図-14 τ_{CMP}/σ_{SHP} 一定径路試験における主ひずみ ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$), 体積ひずみ (ϵ_v) の変化

図-17, 18, 19 では、これらの実測値や解析値から得られる正八面体面上のせん断ひずみ増分 ($d\gamma_{oct}$) の方向と大きさをベクトルで示している。ベクトルの大きさは $d\gamma_{oct}$ と角度 θ の変化 $d\theta$ の比 $d\gamma_{oct}/d\theta$ で表わしている。ここでも (a) 図は実測値を、(b) 図は解析値を表

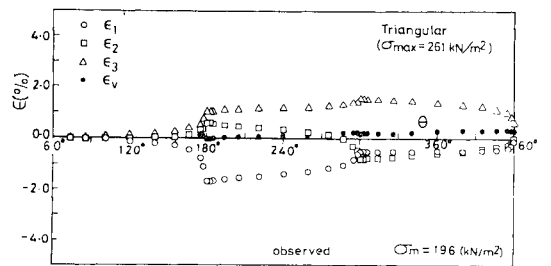


(a) 実測値

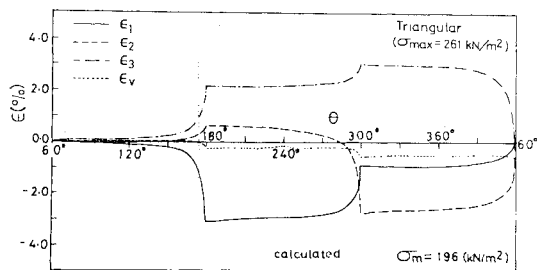


(b) 解析値

図-15 τ_{oct} 一定径路試験における主ひずみ ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$), 体積ひずみ (ϵ_v) の変化

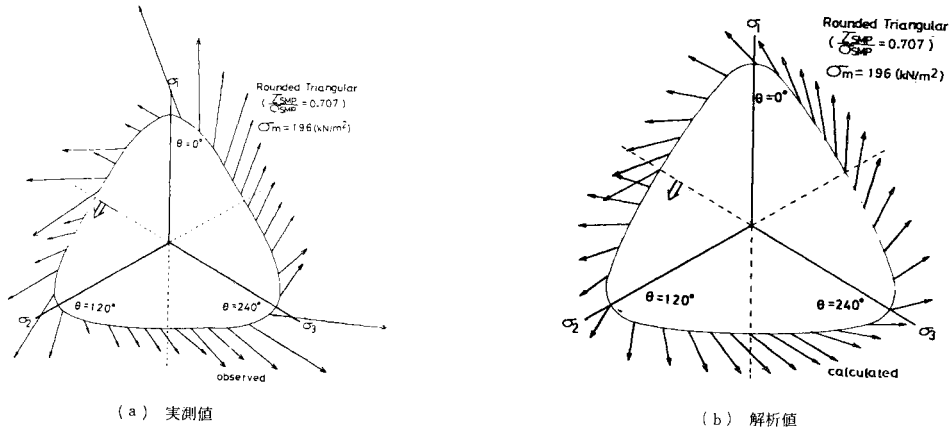


(a) 実測値

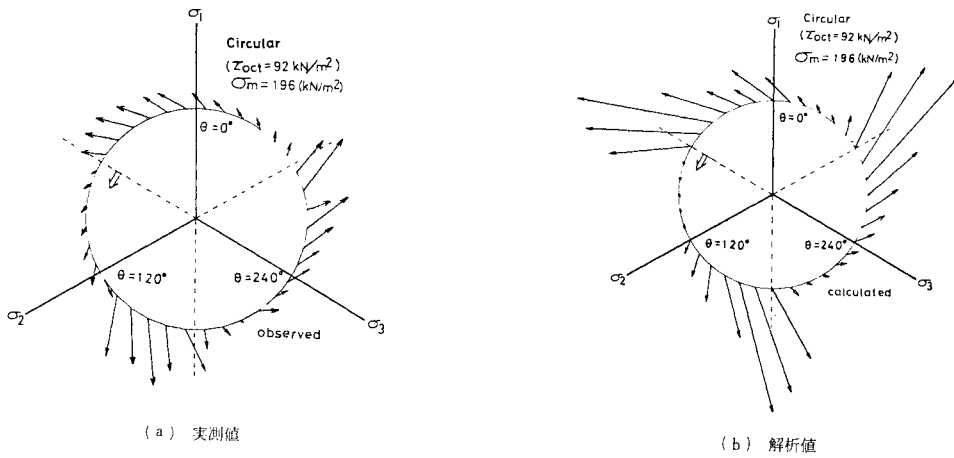


(b) 解析値

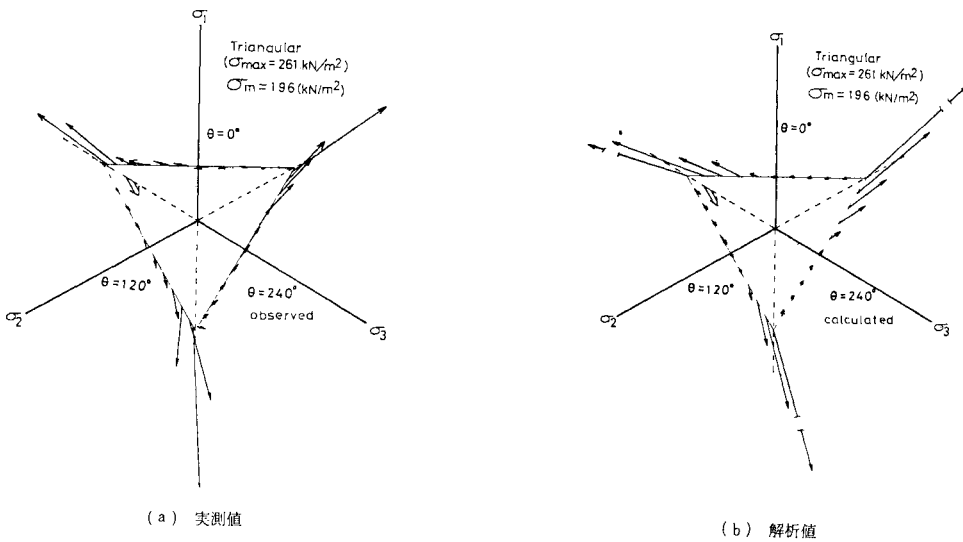
図-16 最大主応力一定径路試験における主ひずみ ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$), 体積ひずみ (ϵ_v) の変化



図一17 τ_{SMP}/σ_{SMP} 一定径路試験における正八面体面上のせん断ひずみ増分方向と大きさ



図一18 τ_{oct} 一定径路試験における正八面体面上のせん断ひずみ増分方向と大きさ



図一19 最大主応力一定径路試験における正八面体面上のせん断ひずみ増分方向と大きさ

わしているが、両者の間により対応関係があることが理解できる。図—17の τ_{SMP}/σ_{SMP} 一定径路をみると、 τ_{SMP}/σ_{SMP} が一定であるにもかかわらずかなりの塑性ひずみが生じることがわかる。つまりこのような回転する応力径路下では、破壊規準としては有効な $\tau_{SMP}/\sigma_{SMP} = \text{const.}$ という条件¹³⁾も降伏関数としてはふさわしくないようである。また図—18の τ_{Oct} 一定径路では、三軸伸張条件 ($\sigma_1/\sigma_3=4$, $\tau_{SMP}/\sigma_{SMP}=0.707$) から三軸圧縮条件 ($\sigma_1/\sigma_3=2.5$, $\tau_{SMP}/\sigma_{SMP}=0.447$) に変化するときのひずみ増分はあまり大きくないが、三軸圧縮条件から三軸伸張条件に動くときにはひずみ増分が大きくなっている。言い換えれば、主応力比 σ_1/σ_3 あるいは応力比 τ_{SMP}/σ_{SMP} が増えるところではひずみ増分は大きくなるが、減るところではひずみ増分は小さくなっている。つまり図—18からも土のような粒状体の力学挙動は Mises 的ではなく、Mohr-Coulomb 的な法則で支配されることが理解されよう。図—19は最大主応力一定径路の結果を示しているが、(a) 図の実測値のひずみ増分が小さいところは図—12の説明で述べた滑動によるひずみが生じないところと対応する。これは、図—4に示す球面上の滑動モデルがほぼ妥当であることを示している。

5. あとがき

本論文の主な内容は以下のように要約できる。

(1) 力学量 t_u の主値空間の正の領域に 1/8 球 (半径 1) を想定し、3次元応力下の平均的な土粒子の滑動がこの球面上で代表されると考え、任意の3次元応力径路下におけるせん断時の砂のひずみ増分方向を決めるモデルを提案した。そして、このモデルが種々の応力径路下の砂のひずみ増分方向を統一的に説明できることを、正八面体面上の直線応力径路やせん断応力の方向が連続的に変化する回転応力径路下の砂のせん断試験結果により検証した。

(2) Prévost の弾塑性モデルを参考に、種々の応力径路下の土のひずみ増分の大きさを算定するモデルを提案した。そして上述のひずみ増分方向を決めるモデルと組み合わせることにより、一般的なせん断時の砂の応力・ひずみ関係式を誘導した。また、この応力・ひずみ関係式の妥当性をせん断試験結果により検証するとともに、種々の応力径路下の砂のせん断特性について考察した。なお、この応力・ひずみモデルのパラメーターは通常の三軸圧縮試験から決定される。

以上、本論文のせん断モデルはひずみ増分方向を決めるモデルと大きさを決めるモデルが不統一になっているが、種々の応力径路下の土の変形挙動をほぼ妥当に説明するようである。今後はモデルを洗練させ、より一般

的な応力・ひずみ関係にしていきたい。

最後に、日頃ご援助いただいている名古屋工業大学土木工学科 山内利彦教授、ならびに有益なご助言・ご討論をいただいた同 松岡 元助教授に感謝致します。また、3主応力制御試験やデータ整理に協力いただいた元名古屋工業大学大学院生 藤原幸一君 (現・兵庫県庁)、元学部生 狩谷伸一君 (現・愛知県庁) にも感謝致します。

参考文献

- Ohta, H. and Sekiguchi, H. : Constitutive equations considering anisotropy and stress reorientation in clay, Proc. of 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Vol. 1, pp.475~484, 1979.
- Matsuoka, H. : Stress-strain relationship of sands based on the mobilized plane, Soils and Foundations, Vol. 14, No.2, pp.47~61, 1974.
- Yamada, Y. and Ishihara, K. : Modeling of drained deformation of sand under three-dimensional stress conditions, Proc. of IUTAM-Symposium on Deformation and Failure of Granular Materials, pp.331~341, 1982.
- 松岡 元・小山浩史・山崎浩之 : 3次元応力下の砂の繰返しせん断挙動の解析, 第18回土質工学研究発表会講演集, 2分冊の1, pp.349~352, 1983.
- Prévost, J. H. : Anisotropic undrained stress-strain behavior of clays, Proc. of ASCE, Vol.105, No. GT 8, pp.1075~1090, 1978.
- Mróz, Z., Norris, V. A. and Zienkiewicz, O. C. : Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils, Géotechnique, Vol. 29, No. 1, pp.1~34, 1979.
- 中井照夫・松岡 元 : 3主応力下の土のせん断挙動に関する統一的解釈, 土木学会論文報告集, No. 303, pp.65~77, 1980.
- 中井照夫・松岡 元 : 任意応力径路下の土の変形挙動に関する統一的解釈, 土木学会論文報告集, No. 306, pp.23~34, 1981.
- 中井照夫・松岡 元・三原泰司 : 土質材料の新たな力学量と弾塑性理論への適用, 第17回土質工学研究発表会講演集, 2分冊の2, pp.409~412, 1982.
- Nakai, T. and Mihara, Y. : A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models, Soils and Foundation, Vol. 24, No. 2, 1984.
- Tokue, H. : A stress-dilatancy model of granular material under general stress condition, Soils and Foundations, Vol. 19, No.1, pp.63~80, 1979.
- 松岡 元・中井照夫 : 剛板載荷型およびセル型三主応力制御試験機について, 土と基礎, Vol. 31, No. 7, pp.9~15, 1983.
- Matsuoka, H. and Nakai, T. : Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, Proc. of JSCE, No. 232, pp.59~70, 1974.
- 中井照夫・日野英則 : 弾性状態にある砂の応力・ひずみ関係, 名古屋工業大学学報, Vol. 32, pp.287~296, 1980. (1983. 8. 31・受付)