【土木学会論文集　第345号／II-1（ノート）　1984年5月】

JONSWAP スペクトルの積分特性量に対する高精度近似式について

APPROXIMATE EXPRESSIONS FOR INTEGRAL PROPERTIES OF THE JONSWAP SPECTRUM

山　口　正　隆*
By Masataka YAMAGUCHI

The JONSWAP spectrum proposed by Hasselmann et al. has been conveniently used as a standard frequency spectrum of wind waves during wave growth. However, it is difficult to obtain the analytical integration for total wave energy and various kinds of mean wave period defined by the spectral moments with respect to frequency. In this paper, their approximate expressions are proposed as a function of peak shape parameter γ under the assumption that the other parameters σ_a and σ_b are constant. All of the expressions have very high accuracy, and maximum error is less than 0.3% respectively. It is also shown that the total wave energy-fetch relation estimated from the observed data by Hasselmann et al. is inconsistent with the one derived from the other spectral parameter-fetch relations and the expression mentioned above in both the aspects of analytical form and numerical value.

1. 緒　　言

発達過程にある風波の周波数スペクトルに対する標準的表示式として，Hasselmann ら[1]によって提案されたJONSWAP スペクトルがしばしば用いられている．JONSWAP スペクトルは5つのパラメーターを含んでいるので，平坦なものから急峻なものまで各種の単峯性スペクトルの形状を表現することができるが，Pierson-Moskowitz 型スペクトルに対応する場合を除き，周波数に関する積分である全エネルギーの表示式などを解析的に得るのが困難であり，実用上不便なことが多い．そこで，本研究では JONSWAP スペクトルを用いた場合の全エネルギーや各種平均周期に対する高精度近似式を導くとともに，全エネルギーの近似式に基づき，従来提案されているスペクトルパラメーター表示式と全エネルギー表示式間の整合性を検討しようとするものである．

2. 近似式の誘導

(1) JONSWAP スペクトルおよびその積率

さて，Hasselmann ら[1]によって提案された JONSWAP スペクトルは次式で表わされる．

$$E(f)=\alpha g^2(2\pi)^{-4}f^{-5}\exp\left\{-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}\right\}\cdot\gamma^{\exp[-(f-f_p)^2/2\sigma^2_{ab}f^2_p]} \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに，$E(f)$：周波数スペクトル，f：周波数，α：高周波側の平衡定数，g：重力加速度，f_p：スペクトルのピーク周波数，γ および σ_{ab}（$\sigma_{ab}=\sigma_a$；$f<f_p$，$\sigma_{ab}=\sigma_b$；$f\geqq f_p$）：peak shape parameters, である．そして Hasselmann らの結果では，α および無次元ピーク周波数 ν（$=f_p U_{10}/g$，U_{10}：10 m 高度での平均風速）は無次元吹送距離とともに変化するが，γ および σ_{ab} は散乱の度合が大きいため，平均的に一定値を取るとされている．式（1）において $\gamma=1$ とすれば，周知の Pierson-Moskowitz スペクトルが得られる．

$$E_{PM}(f)=\alpha_{PM}\,g^2(2\pi)^{-4}f^{-5}\exp\left\{-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_{PM}}\right)^{-4}\right\}\cdots(2)$$

ここに，$\alpha_{PM}=0.0081$ であり，またピーク周波数は無次元形で $\nu_{PM}=0.13$ として与えられる．

次に，次式で定義されるスペクトルの積率に対する無次元量を導入する．

$$\tilde{m}_n=\frac{\alpha}{(2\pi\nu)^4}\int_0^\infty f_*^{n-5}\exp\left\{-\frac{5}{4}f_*^{-4}\right\}\cdot\gamma^{\exp[-(1-f_*)^2/2\sigma^2_{ab}]}df_* \quad \cdots\cdots(3)$$

* 正会員　工博　愛媛大学教授　工学部海洋工学科
（〒790　松山市文京町3）

ここに，$f_*=f/f_p$，である．式（3）から $n=0$ の場合に対応して

$$\tilde{m}_0^*=\int_0^\infty f_*^{-5}\exp\left\{-\frac{5}{4}f_*^{-4}\right\}\cdot\gamma^{\exp\{-(1-f_*)^2/2\sigma^2\alpha b\}}df_* \quad\cdots\cdots(4)$$

とすれば，式（1）の全周波数に対する積分表示の無次元形が次式のように得られる．

$$\tilde{m}_0=\frac{g^2 m_0}{U_{10}^4}=\frac{\alpha}{(2\pi\nu)^4}\tilde{m}_0^* \quad\cdots\cdots(5)$$

ここに，m_0 は式（1）の周波数に関する積分値である全エネルギーを表わす．また，スペクトルの積率で定義される各種平均周波数および平均周期は次式で求められる．

$$\left(\frac{\overline{f}_n}{f_p}\right)^n=\left(\frac{T_p}{\overline{T}_n}\right)^n=\frac{\tilde{m}_n}{\tilde{m}_0}=\tilde{m}_n^*\,;\,n\neq 0 \quad\cdots\cdots(6)$$

ここに，T_p：ピーク周波数 f_p に対応する周期，$\overline{f}_n$：平均周波数および $\overline{T}_n$：平均周期，であり，ここでは，$n=\pm1$ および ±2 の場合を考察する．特に，$n=2$ の場合は Rice の理論によるスペクトルの2次積率で定義される平均周期である．

（2） $\tilde{m}_n^*$ の積分結果

ところで，式（3）の解析的積分は一般に困難であるが，Pierson-Moskowitz スペクトルに相当する $\gamma=1$ の場合には積分可能であり，ガンマ関数 $\Gamma(x)$ により次式のように与えられる．

$$\left(\tilde{m}_n\right)_{PM}=\frac{\alpha_{PM}}{(2\pi\nu_{PM})^4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma\{(4-n)/4\}}{(5/4)^{(4-n)/4}}\,;\,n=0,\ \pm1,\ \pm2, \quad\cdots\cdots(7)$$

そして式（7）を用いた $n=0$，±1 および ±2 に対する式（6）の計算結果は後述の表—1 に示されている．一方，$\gamma\neq1$ の場合には数値積分による必要がある．そこで，被積分関数が高周波側で急激な減少を示すことを考慮して，まず積分領域を $f_*=0\sim4$，$4\sim10$，$10\sim20$，$20\sim40$，$40\sim70$ および $70\sim\infty$ の6区間に分けたのち，各区間に対して適応型 Simpson 則を適用して数値積分を行い，それらの結果を加えることにより解を得た．ただし，最後の積分区間では，γ のべき乗項はもちろん指数関数項も1になることを考慮して，

$$\int_{70}^\infty f_*^{n-5}\,df_*=\frac{1}{4-n}(70)^{n-4} \quad\cdots\cdots(8)$$

により計算を行っている．実際の計算では，σ_a および σ_b をそれぞれ $\sigma_a=0.07$ および $\sigma_b=0.09$ と一定にし，γ を1～10の範囲で変化させた．

（3） $\tilde{m}_n^*$ に対する近似式の導出

$\tilde{m}_n^*$ は σ_a および σ_b を一定とすると，γ の関数として表わされる．そこで，これらの数値積分結果を，

$$\tilde{m}_n^*=a\gamma^{-b}+\{(\tilde{m}_n^*)_{PM}-a\} \quad\cdots\cdots(9)$$

表—1 近似式における係数

$n\,(\tilde{m}_n^*)$	a	b	$(\tilde{m}_n^*)_{PM}$
0	0.06533	−0.8015	0.2
1	1.639	0.05117	1.296
2	5.255	0.05379	1.982
−1	−0.7733	0.05144	0.8572
−2	−1.031	0.05607	0.7927

で近似表現するものとして，未定係数 a および b を最小自乗法により推定する．ここに，$(\tilde{m}_n^*)_{PM}$ は Pierson-Moskowitz スペクトルを用いた場合の $\tilde{m}_n^*$ であり，式（9）は $\gamma=1$ で $\tilde{m}_n^*=(\tilde{m}_n^*)_{PM}$ を満足するものとしている．そして a および b を求めるための方程式は最終的に b に関する超越方程式になるので，繰り返し計算法を用いることにより比較的簡単に解を算出することができる．表—1 は推定された各係数および Pierson-Moskowitz スペクトルを用いた場合の $(\tilde{m}_n^*)_{PM}$ を一括して示したものである．

次に，式（9）で与えた近似式の精度を検討しよう．従来，$\tilde{m}_0^*$ に対する近似式は Ewing[2]（1976），合田[3]（1977），Mitsuyasu et al.[4]（1980）および Yamaguchi & Holthuijsen（1982）によりそれぞれ次式のように提案されている．

$$\tilde{m}_0^*=0.044\,\gamma+0.156 \quad\cdots\cdots(10)$$

$$\tilde{m}_0^*=0.230+0.0336\,\gamma-0.185\,(1.9+\gamma)^{-1} \quad\cdots\cdots(11)$$

$$\tilde{m}_0^*=0.2\,\gamma^{1/3}\,;\,1\leq\gamma<4 \quad\cdots\cdots(12)$$

$$\tilde{m}_0^*=0.065\,\gamma^{0.803}+0.135 \quad\cdots\cdots(13)$$

これらの式のうち，式（10），式（12）および式（13）は $\gamma=1$ に対する解析解 $\tilde{m}_0^*=0.2$ を厳密に満足する．表—2 は数値積分結果およびこれらの式による計算結果を $\gamma=1\sim10$ の範囲で示したものであり，表中の $\tilde{m}_{0\,cal}^*$ が数値積分結果を表わす．この表によると，まず表示式が簡単な Ewing および Mitsuyasu らによる近似式の誤差が最も大きく，しかも γ の値が増大すると，精度が

表—2 JONSWAP スペクトルの積分特性量に対する近似式の精度（1）

γ	$\tilde{m}_{0\,cal}^*$	Ewing	合　田	Mitsuyasu et al.	Yamaguchi et al.
1	0.2	0.2	0.1998	0.2	0.2
1.5	0.2256	0.222	0.2260	0.2289	0.2250
2	0.2491	0.244	0.2498	0.2520	0.2484
2.5	0.2713	0.266	0.2720	0.2714	0.2707
3	0.2926	0.288	0.2930	0.2885	0.2921
3.5	0.3131	0.310	0.3133	0.3037	0.3127
4	0.3331	0.332	0.3330	0.3175	0.3329
4.5	0.3526	0.354	0.3523	0.3302	0.3525
5	0.3717	0.376	0.3712	0.3420	0.3717
6	0.4089	0.420	0.4082	0.3634	0.4090
7	0.4450	0.464	0.4444	0.3826	0.4451
8	0.4803	0.508	0.4801	0.4000	0.4802
9	0.5149	0.552	0.5154	0.4160	0.5145
10	0.5489	0.596	0.5505	0.4309	0.5480

表—3　JONSWAP スペクトルの積分特性量に対する近似式の精度（2）

(a)

γ	$\tilde{m}^*_{0\,cal}$	$\tilde{m}^*_0$	error (%)
1.5	0.2256	0.2251	−0.23
2	0.2491	0.2485	−0.23
2.5	0.2713	0.2708	−0.17
3	0.2926	0.2923	−0.12
3.5	0.3131	0.3130	−0.04
4	0.3331	0.3331	0.01
4.5	0.3526	0.3528	0.05
5	0.3717	0.3720	0.08
6	0.4089	0.4093	0.11
7	0.4450	0.4455	0.10
8	0.4803	0.4806	0.05
9	0.5149	0.5148	−0.02
10	0.5489	0.5483	−0.11

(b)

γ	$\tilde{m}^*_{1\,cal}$	$\tilde{m}^*_1$	error (%)
1.5	1.264	1.262	−0.13
2	1.240	1.239	−0.09
2.5	1.222	1.221	−0.09
3	1.207	1.206	−0.05
3.5	1.194	1.194	0.02
4	1.183	1.184	0.06
4.5	1.173	1.175	0.14
5	1.165	1.166	0.12
6	1.151	1.152	0.12
7	1.140	1.141	0.06
8	1.130	1.131	0.05
9	1.122	1.122	−0.03
10	1.115	1.114	−0.11

(c)

γ	$\tilde{m}^*_{2\,cal}$	$\tilde{m}^*_2$	error (%)
1.5	1.874	1.869	−0.29
2	1.795	1.790	−0.30
2.5	1.732	1.729	−0.16
3	1.681	1.681	−0.03
3.5	1.638	1.640	0.09
4	1.602	1.604	0.15
4.5	1.570	1.574	0.23
5	1.542	1.546	0.27
6	1.495	1.499	0.28
7	1.457	1.460	0.19
8	1.425	1.426	0.06
9	1.398	1.396	−0.13
10	1.375	1.370	−0.38

(d)

γ	$\tilde{m}^*_{-1\,cal}$	$\tilde{m}^*_{-1}$	error (%)
1.5	0.8723	0.8732	0.10
2	0.8835	0.8843	0.09
2.5	0.8924	0.8928	0.05
3	0.8996	0.8997	0.01
3.5	0.9056	0.9055	−0.02
4	0.9108	0.9104	−0.04
4.5	0.9153	0.9148	−0.06
5	0.9192	0.9186	−0.06
6	0.9258	0.9253	−0.06
7	0.9312	0.9309	−0.04
8	0.9357	0.9357	−0.01
9	0.9396	0.9398	0.03
10	0.9428	0.9436	0.08

(e)

γ	$\tilde{m}^*_{-2\,cal}$	$\tilde{m}^*_{-2}$	error (%)
1.5	0.8146	0.8159	0.16
2	0.8308	0.8320	0.14
2.5	0.8436	0.8443	0.09
3	0.8540	0.8543	0.03
3.5	0.8627	0.8626	−0.01
4	0.8702	0.8698	−0.05
4.5	0.8767	0.8761	−0.07
5	0.8824	0.8817	−0.08
6	0.8919	0.8913	−0.07
7	0.8997	0.8993	−0.05
8	0.9062	0.9062	−0.00
9	0.9117	0.9122	0.06
10	0.9164	0.9176	0.13

低下するが，後者の傾向は近似式の適用範囲をはずれるので当然といえる．しかし，γ の値を観測結果の解析で通常得られる範囲に限れば，前者の誤差は $\gamma=1\sim5$ に対して最大 2 %，後者のそれは $\gamma=1\sim3$ に対して最大 1.4 % 程度であるので，表示式の単純さを考慮すると，これら両者は十分適用性をもつものといえよう．一方，合田および著者らによる近似式の推定誤差は $\gamma=1\sim10$ の範囲に対して最大 0.3 % 以下であり，いずれも非常に高い精度をもつことがわかる．しかし，著者らによる式（13）の誘導においては，その係数を 0.065 および 0.135 とあらかじめ適当に与えたものである．そのため，その誘導方法は必ずしも系統的であるといいがたく，したがってより高次の積率を用いた $\tilde{m}^*_n$ に対する近似式をつくることが容易でないので，ここでは式（9）による結果を用いることにする．

表—3 は表—1 で与えた係数を採用した場合の各種無次元平均周波数に対する近似式の精度を検討したものである．これらの結果によると，今回提案する近似式の最大誤差は $\gamma=1\sim10$ の範囲でそれぞれ 0.23 %（$\tilde{m}^*_0$），0.14 %（$\tilde{m}^*_1$），0.38 %（$\tilde{m}^*_2$），0.10 %（$\tilde{m}^*_{-1}$）および 0.16 %（$\tilde{m}^*_{-2}$）であり，いずれの場合に対しても高精度をもつといえよう．なお，Mitsuyasu らと同様に，$\tilde{m}^*_n=a\gamma^b$ を仮定する場合にはそれぞれ，$\tilde{m}^*_1=1.296\,\gamma^{-0.06568}$，$\tilde{m}^*_2=1.982\,\gamma^{-0.1565}$，$\tilde{m}^*_{-1}=0.8572\,\gamma^{-0.04260}$，$\tilde{m}^*_{-2}=0.7927\,\gamma^{-0.06523}$ でかなり精度よく近似され，その最大誤差は 0.2 %，0.9 %，0.2 % および 0.4 % である．

3.　全エネルギー表示式に対する整合性の検討

JONSWAP スペクトルに含まれるスペクトルパラメーター ν, α および γ などは無次元吹送距離とともに変化することが観測結果の解析から光易や Hasselmann らによって明らかにされているし，一方 2. において JONSWAP スペクトルの全エネルギーに対する高精度近似式が得られたので，観測結果から導かれた全エネルギー表示式の整合性を検討することができる．さて，Hasselmann ら[1]によれば，スペクトルパラメーターおよび全エネルギーは次式で表わされる．

$$\left.\begin{array}{l}\nu=3.5\,\tilde{F}^{-0.33},\quad \alpha=0.076\,\tilde{F}^{-0.22}\\ \gamma=3.3,\quad \sigma_a=0.07,\quad \sigma_b=0.09\end{array}\right\}\cdots\cdots(14)$$

$$\tilde{m}_0=1.6\times10^{-7}\,\tilde{F}\cdots\cdots(15)$$

ここに，$\tilde{F}=gF/U_{10}^2$ および F：吹送距離，である．また Hasselmann ら[5]は式（14）から $\tilde{m}_0$ と $\tilde{F}$ の間の線型関係が得られないことを考慮して ν および α を次式のように修正している．

$$\nu=2.84\,\tilde{F}^{-0.3},\quad \alpha=0.0662\,\tilde{F}^{-0.2}\cdots\cdots(16)$$

さて，式（14）あるいは式（16）を用い，$n=0$ の場合の式（9）において，$a=0.06533$，$b=-0.8015$，γ

$=3.3$ および $(\tilde{m}_0^*)_{PM}=0.2$ とすれば，無次元全エネルギーはそれぞれ次式のように表わされる．

$$\tilde{m}_0=0.990\times10^{-7}\,\tilde{F}^{1.1} \quad\cdots\cdots(17)$$

$$\tilde{m}_0=1.99\times10^{-7}\,\tilde{F} \quad\cdots\cdots(18)$$

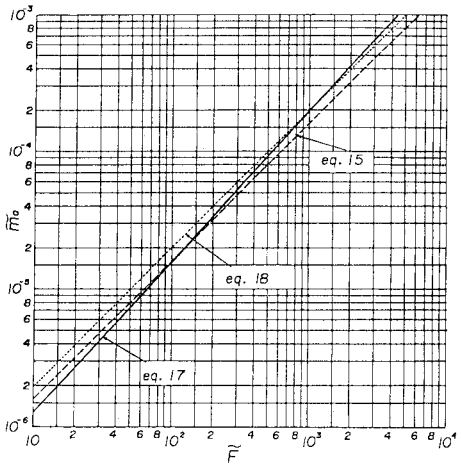
式(15)とこれらの式を比較すると，式(17)の場合には，Hasselmann らが自ら指摘しているように，両者の $\tilde{F}$ への依存関係が異なっているし，さらに式（18）の場合には，$\tilde{m}_0$ が式（15）と同様 $\tilde{F}$ に比例するものの，係数の大きさが約 25 % 程度異なっている．逆にいえば，式（15）の係数を得るためには $\gamma=1.93$ を採用する必要がある．つまり，JONSWAP スペクトルを基準とするかぎり，式（18）あるいは式（17）と式（15）は整合性を有しないことがわかる．

一方，Mitsuyasu et al.（1980）は式(14)および式(15)に対応する次式を提案している．

$$\left.\begin{array}{l}\nu=2.92\,\tilde{F}^{-1/3},\quad \alpha=0.0817\,\tilde{F}^{-2/7}\\ \gamma=7.0\,\tilde{F}^{-1/7},\quad \sigma_a=0.07,\quad \sigma_b=0.09\end{array}\right\}\cdots\cdots(19)$$

$$\tilde{m}_0=2.75\times10^{-7}\,\tilde{F} \quad\cdots\cdots(20)$$

そして，これらの関係式の誘導過程において，式（12）が用いられているので，Mitsuyasu らによるスペクトルパラメーターおよび無次元全エネルギー間の関係式では整合性の問題は生じない．図—1 は前述の各式に基づいて計算した無次元全エネルギーと無次元吹送距離との関係を $10\leqq\tilde{F}\leqq10^4$ の範囲で示したものであり，Hasselmann らによるスペクトルパラメーター関係式を用いて得られた式（17）と式（15）は $\tilde{F}\simeq1.5\times10^2$ 付近で交差する．そして交点から離れるにつれて，相互の差は増大しており，両者は数値のうえでも整合性をもつとはいいがたいことがわかる．



図—1 JONSWAP スペクトルによる全エネルギー表示式に対する整合性の検討

4. 結　　語

本研究では，まず解析的積分が困難である JONSWAP スペクトルの全エネルギーおよび JONSWAP スペクトルの積率で定義される各種平均周波数（周期）を peak shape parameters の 1 つである γ の関数として表示する高精度近似式が提案された．そしていずれの近似式も最大誤差 0.3 % 以下という高精度を有していることが示された．ついで，得られた全エネルギーの近似式に基づいて，観測結果の解析から Hasselmann らにより導かれたスペクトルパラメーターと全エネルギーに対する表示式間の整合性を検討した結果，数式および数値のいずれの面でも整合性を欠くことが明らかにされた．

最後に，本研究は著者が 1981 年から 1982 年にかけて文部省在外研究員としてデルフト工科大学（オランダ王国）に滞在したとき，Prof. Battjes の指導のもとに Dr. L. H. Holthuijsen とともに協同で実施した「パラメトリックモデルに基づく波浪予知モデル」の研究過程で生みだされ，著者の帰国後さらに改良発展をはかられたものであることを付記し，文部省およびデルフト工科大学に謝意を表するものである．

参 考 文 献

1) Hasselmann et al. : Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP), Erg. Deutschen Hydr. Zeit., Reihe A, Nr. 12, pp. 1～95, 1973.

2) ISCC : Rept. Committee I. 1 on Environmental Conditions, 6th ISCC, Boston, pp. I. 1-53～I. 1-56, 1976.

3) 合田良実：港湾構造物の耐波設計—波浪工学への序説，鹿島出版会，p. 20, 1977.

4) Mitsuyasu et al. : Observation of the power spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy, Jour. Physical Oceanography, Vol. 10, pp. 286～296, 1980.

5) Hasselmann et al. : A parametric wave prediction model, Jour. Physical Oceanography, Vol. 6, pp. 200～228, 1976.

(1983. 8. 10・受付)