

ハイブリッド法による軸対称構造物に作用する流体力および周辺波動場の解析

ANALYSIS OF SCATTERED WAVES AND INDUCED FORCES ON AXISYMMETRIC BODIES BY MEANS OF HYBRID METHOD

清川 哲志*・大山 巧**

By Tetsushi KIYOKAWA and Takumi OHYAMA

A hybrid method for analyzing wave exciting forces, added-mass and damping coefficients in scattered wave field is proposed to reduce computational efforts as compared with the conventional method. The proposed method combines a boundary integral equation method and an expansion method utilizing eigenfunctions. The primary advantage of the method is that the wave height distribution can be obtained without considerable increasing of computational efforts. This is due to the fact that kernels of the integral equation are simpler than those of the conventional method, although more elements are required. Accuracy of numerical solutions obtained by the proposed method is investigated by comparing with the exact solutions. Numerical results are also presented for floating and submerged axisymmetric bodies.

1. まえがき

本論文は一定水深中の軸対称構造物による波の散乱、および構造物の動揺によって発生する流体力等を解析する新しい方法を提案するものである。

土木分野における軸対称構造物と波との相互作用に関する研究は、Black [1975]¹⁾, Fenton [1978]²⁾に始まる。彼らは軸対称グリーン関数を導き、それを用いて積分方程式法による解析を行っている。これらは固定構造物を対象としたものであったが、中村ら [1981]³⁾およびIsaacson [1982]⁴⁾は浮体の動揺の問題に拡張した。また、清川ら [1982]⁵⁾はこれらと別に境界展開法を開発し、軸対称問題における厳密解を導いた。しかし、この解は浮体あるいは没水体構造物には適用できないもので、これらの解析には従来よりの軸対称グリーン関数法あるいは有限要素法などを用いるしか方法はなかった。

このうち軸対称グリーン関数法は、その一般性、適用範囲の広さなどの点で優れた解析法である。しかし、グリーン関数は特異性を有する複雑な関数で、その取扱いは必ずしも容易ではない。また、特にこの解析法によっ

て構造物周辺の波高分布を求める場合、新たにグリーン関数を計算する必要があり、計算時間等の点で効率的とはいがたい（グリーン関数法の場合計算時間の大半はグリーン関数の作成に費やされる）。

そこで本研究は、浮体、没水体構造物にも適用でき、しかも軸対称グリーン関数法に比べて取扱いが簡単かつ計算効率のよい解析法の開発を主眼として行った。外部境界値問題に対するこのような解析法として、2次元理論ではあるが井島ら [1976～1980]^{6)～8)}によりグリーンの公式を用いる解析法が提案されている。これは、鉛直2次元領域に仮想面を設け、その仮想面と自由表面、構造物表面、および海底面によって囲まれる閉領域にグリーン公式を適用して積分方程式を導くものである。この方法はグリーン関数法が構造物表面のみに関する積分方程式となるのに対し、閉領域を構成するすべての境界面に関する積分方程式となるため、離散化したとき未知数の数は増えるが、積分核がグリーン関数法に比べて著しく簡単となるため全体としては効率のよい解析法となる。本研究では、この解析法を3次元問題に拡張することを考えた。しかしながら3次元問題では無限遠方で満足すべき放射条件が課せられるため、有限な閉領域内で適用するグリーン公式に直接これを取り入れるのは原理的に不可能である。Ferdinandeら [1980]⁹⁾はこの問

* 正会員 清水建設(株)大崎研究室
(〒100 千代田区内幸町2-2-2)

** 正会員 清水建設(株)技術研究所 (〒135 江東区越中島3-4-17)

題を、仮想境界面を構造物の径の5~6倍の位置にとることによって近似的に回避している。しかし、この方法では未知数の数が増大し、計算機容量、計算時間の点で不利となる。また、いざれにしてもFerdinandeらの解析法は上下揺(heaving)のみにしか適用できないもので一般性に欠ける。著者らはこれを解決するために、仮想境界面上で、放射条件を満足する解析解とグリーン公式から得られる数値解とを接続する解析法、すなわちハイブリッド法を開発した。これによると仮想境界面を任意の位置に設定できるので未知数の増大などの問題が解決される。このような解析法には、瀬戸^{[1] [2]} [1977~1980]により提案された有限要素法と解析解を接続する方法があるが、有限要素法は流体内部の領域まで要素分割を行わねばならず、この点本論文で提案する解析法の方が境界面のみを要素分割すればよい、境界要素法となっているので、計算機容量、計算時間の点で有利となることが期待できる。

本論文ではまずこの定式化について述べる。そして、要素分割数と計算精度の関係などの基礎的な検討を行った後、代表的な計算例として水面上の円筒および逆円錐台浮体の流体力特性、没水円筒および没水円錐台周辺の波高分布を示す。

2. 基礎方程式と境界条件

一定水深 h の水域中に鉛直軸対称構造物があり、これに波高 H_0 、角振動数 ω の微小振幅波が入射しているものとする。構造物は固定または浮遊式とし、浮遊式の場合、波によって動搖運動をしているものとする。

座標系 (x, y, z) および (r, θ, z) をFig.1に示すように定義する。また、入射波は構造物に対しどの方向から入射しても同じなので、一般性を失うことなく、 x 軸に平行に負の方向から入射すると仮定する。

問題を非圧縮完全流体の定常波動問題とし、流体運動を速度ポテンシャルによって記述する。さらに流体および構造物の運動はともに微小であると仮定し、線形理論による解析を行う。したがって、時刻 t における場全体の速度ポテンシャル ϕ は、入射波、散乱波、動搖運動のモードに対応した3種の発生波、それぞれの速度ポテ

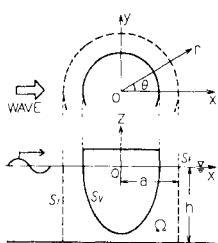


Fig.1 Coordinate system.

ンシャルの和として次式のように表わすことができる。

$$\phi = (\phi_0 + \phi_i) e^{-i\omega t} + \sum_{l=1}^3 \frac{d}{dt} (D_l e^{-i\omega t}) \phi_l \dots \quad (1)$$

ここに、 i は虚数単位($\equiv \sqrt{-1}$)で、 ϕ_0, ϕ_i はそれぞれ入射波および散乱波のポテンシャル関数である。また、 D_l は l 方向運動の運動振幅 ξ_l と入射波に対する位相差 ϵ_l から成る複素変位振幅($D_l = \xi_l e^{i\epsilon_l}$)で、 ϕ_l ($l=1 \sim 3$)は構造物が単位速度で l 方向に運動したとき生じる発生波のポテンシャルである。ただし、 $l=1, 2$ をそれぞれ x, z 軸に対する平行運動、 $l=3$ を中心を通って y 軸に平行な軸まわりの回転運動とする。したがって、固定構造物の場合はこの項は考えなくてよいが、この場合は浮体としての解析に含まれるので、以下ではすべて浮体を対象とした取扱いをする。

周知のように、式(1)の各項のうち入射波に対応する ϕ_i は既知で、次式のように表わされる。

$$\phi_i = -i \frac{g H_0}{2\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{ikx} \dots \quad (2)$$

ここに、 g :重力加速度、 k :波数($k \tanh kh = \nu$ の実根、ただし $\nu \equiv \omega^2/g$)である。

したがって、問題は所与の基礎方程式と境界条件を満足する ϕ_l ($l=1 \sim 4$)を求めることである。これらが求められると、波強制力、付加質量力、および造波減衰力などに関する流体力係数が求まり、さらに係留条件、復元力特性などを入れた運動方程式を解くことにより、複素変位振幅 D_l ($l=1 \sim 3$)が求められる。これらを式(2)の入射波ポテンシャルとともに式(1)に代入することによって流体運動の場が決定される。

ϕ_l ($l=1 \sim 4$)は線形性により、それぞれ次の基礎方程式と境界条件を満足する関数として求められる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla^2 \phi_l = 0 & (\text{in } Q) \dots (3) \\ \partial \phi_l / \partial z - \nu \phi_l = 0 & (\text{on } S_f) \dots (4) \\ \partial \phi_l / \partial z = 0 & (\text{on } S_b) \dots (5) \\ \partial \phi_l / \partial n = v_{nl} & (\text{on } S_v) \dots (6) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} (\partial \phi_l / \partial r - ik \phi_l) = 0 & (\text{on } S_\infty) \dots (7) \end{array} \right.$$

ここに、式(3)は流体内部 Q における流体の連続条件を表わし、式(4)は自由表面 S_f における運動学的・力学的条件、式(5)、(6)はそれぞれ海底面 S_b 、構造物表面 S_v における不透過条件を表わす。また、式(7)は無限遠方(半径 r が無限大の円筒面 S_∞)における放射条件を表わす。ただし、式(6)の n による微分は構造物表面上での外向き法線方向微分を表わす。また、 v_{nl} ($l=1 \sim 4$)は l 方向単位速度($l=1, 2$)、単位角速度($l=3$)に対応した構造物表面の速度の法線方向成分、および入射角による構造物表面上の水粒子速度の法線方向成分($l=4$)で、以下のように表わされる。

ただし、 n_x 、 n_z 、および n_r は構造物表面上に立てた単位法線ベクトルのそれぞれ x, z, r 成分である。また、 z_0 は回転の中心となる点の z 座標である。

3. ハイブリッド法による解析理論

(1) 定式化の方法

さて、次に前章で述べた境界値問題を解く方法として著者らが開発したハイブリッド法を説明する。ここでいうハイブリッド法とは、構造物の近傍に構造物を囲む円筒状の仮想境界面を設け、この仮想面上で、数値解と放射条件を満足する解析解を接続するものである。この解析法により、有限領域における解析で無限遠方で課せられる放射条件を満足する解を得ることが可能となる。この概要は以下のようである。

まず放射条件を満足する外部領域での一般解をフーリエ展開および固有関数展開によって求める。この解は固有関数の直交性の利用により、仮想境界面におけるポテンシャル係数（ポテンシャルをフーリエ展開したときの係数で r と φ の関数）を用いて表わされる。

次に仮想面と自由表面、海底面および構造物表面で囲まれる閉領域にグリーン公式を適用する。そして、各境界面で境界条件を考慮する。このとき仮想面では上に述べた解析解を接続する。また、この際に内部領域におけるポテンシャルもフーリエ展開しておく。このようにすると、内部領域の各境界面上に配した未知ポテンシャル係数に関するフレドホルム型第2種の積分方程式が各フーリエモードごとに得られる。さらにこれを離散化して連立方程式とし、数値的に解くことにより内部領域各境界面上での未知ポテンシャル係数が求められる。そして、構造物表面上のポテンシャル係数からは構造物表面上の波圧分布、構造物に作用する流体力などが得られ、自由表面上のポテンシャル係数を用いれば構造物周辺の波高分布が得られる。また、仮想境界面上の係数から外部領域の解が決定され、任意の地点でのポテンシャル値が簡単に求められる。すなわち、外部領域の波高分布も簡単に求められるわけで、仮想境界面を構造物に近づけることにより未知数の数を減らし、波高分布は広い領域にわたって求めることも可能である。

(2) 外部領域の解

入射波は $\theta = \pi$ より入射し、構造物が軸対称形であることから、散乱波のポテンシャル ϕ_1 も θ に関して対称、また動搖によって発生する放射波のポテンシャル ϕ_2 ($j=1-3$) も θ に関して対称となることは明らかである。

したがって ϕ_l ($l=1 \sim 4$) を θ に関してフーリエ余弦展開して次式のように置く.

$$\phi_l(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_l^{(m)}(r, z) \cos m\theta \quad (l=1 \sim 4) \cdots (12)$$

ここに、 $\phi_t^{(r)}$ は m 次のフーリエ項に対応したポテンシャル係数で、 r と z の関数である。

式(3)～(5)に式(12)を代入して ϕ_t^m に関する偏微分方程式と境界条件を導き、これらと式(7)の放射条件を満足する解を固有関数の重ね合わせによる無限級数の形で求めると、次式のようになる。

ここに, $A_{ln}^{(m)}(n, m=0, 1, \dots)$: 複素係数, K_m : 第2種 m 次変形ベッセル関数, $H_m^{(1)}$: 第1種 m 次ハンケル関数, $k_n(n=1, 2, \dots)$: 固有値 ($k_n \tan k_n h = -\nu$ の実正根, $k_1 < k_2 < \dots$) である.

式(13)において $r=a$ (仮想境界面) とし、両辺に $\cosh k(h+z)/\cosh kh$ を乗じて海底面から平均水面まで積分すると、固有関数の直交性によって A_n^m ($n=1, 2, \dots$) に関する項がすべて 0 となり次式を得る.

同様にして $\cos k_n(h+z)/\cos k_n h$ を乗じて積分すると次式を得る.

$$A_{tn}^{(m)} = \frac{2k_n^2 \int_{-h}^0 \varphi_l^{(m)}(a, \xi) \frac{\cos k_n(h+\xi)}{\cos k_n h} d\xi}{|h(k_n^2 + \nu^2) - \nu| K_m(k_n a)} \\ (l=1 \sim 4, m=0, 1, \dots, n=1, 2, \dots) \quad \dots \dots \dots (15)$$

式(14), (15)を式(13)に代入し, さらにこれを式(12)に代入すると, 外部領域に関する解が仮想面におけるボテンシャル係数 φ_e^{**} を用いて次のように表わされる.

$$\phi_l(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q_n Z_n(z) F_n^{(m)}(r) \cdot \int_h^0 \phi_i^{(m)}(a, \xi) Z_n(\xi) d\xi \right\} \cos m\theta$$

(l=1~\sim~4).....(16)

たゞ $q_n, Z_n(z), F_n^{(m)}(x)$ などは次式で定義される

$$\left. \begin{aligned} F_0^{(m)}(r) &= \frac{H_m^{(1)}(kr)}{H_m^{(1)}(ka)} \\ F_n^{(m)}(r) &= \frac{K_m(k_n r)}{K_m(k_n a)} \quad (n=1,2,\dots) \end{aligned} \right\}$$

(3) グリーン公式の適用

3次元空間内の閉曲面 S によって囲まれる閉領域を考える。このとき領域内の任意の点 P における調和関数 u は次のように境界面上の値と法線方向の微分値を用いて表わされる。

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\sigma \quad (18)$$

ここに、 R ：点 P と境界面 S 上の点との距離、 $d\sigma$ ： S 上の微小面積である。ただし、 P を S 上の点とすると右辺の係数 $1/4\pi$ は $1/2\pi$ となる。

これは周知のようにグリーンの公式とよばれる。いま閉領域を Fig. 1 に示したような構造物表面 S_v 、海底面 S_b および仮想境界面 S_i で囲まれる領域とする。そしてこれに、 P を境界面上の点とし、 $u = \phi_i$ としてグリーンの公式を適用する。これにさらに式 (4)～(6) で示される境界条件を代入する。そして、外部領域の速度ポテンシャルをフーリエ余弦展開したのに応じて、内部領域でも同様に展開する。このとき、仮想面 S_i においては放射条件を満足する解 (16) から求められるポテンシャルの法線方向微分値を用いる。以上の計算を行うと、次のような $\phi_i^{(m)}$ に関する積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \phi_i^{(m)}(r, z) \cos m\theta &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\iint_{S_i} \frac{1}{R} \bar{v}_{ni}^{(m)} \cos m\theta d\sigma \right. \\ &\quad - \iint_{S_i} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \phi_i^{(m)}(r, z) \cos m\theta d\sigma + \iint_{S_i} \frac{\nu}{R} \phi_i^{(m)}(r, z) \\ &\quad \cdot \cos m\theta d\sigma - \iint_{S_i} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) \phi_i^{(m)}(r, z) \cos m\theta d\sigma \\ &\quad + \iint_{S_i} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) \phi_i^{(m)}(r, z) \cos m\theta d\sigma \\ &\quad \left. + \iint_{S_i} \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ c_n^{(m)} q_n Z_n(z) \int_{-h}^0 \phi_i^{(m)}(a, \xi) Z_n(\xi) d\xi \right\} \right. \\ &\quad \cdot \cos m\theta d\sigma - \iint_{S_i} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) \phi_i^{(m)}(a, z) \cos m\theta d\sigma \Big] \\ &\quad (l=1 \sim 4) \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、 $\bar{v}_{ni}^{(m)}$ は v_{ni} をフーリエ展開したときのフーリエ係数で、以下のように表わされる。

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{v}_{n1}^{(m)} &= \begin{cases} n_r \quad (m=1) \\ 0 \quad (m \neq 1) \end{cases}, \quad \bar{v}_{n2}^{(m)} = \begin{cases} n_z \quad (m=0) \\ 0 \quad (m \neq 0) \end{cases} \\ \bar{v}_{n3}^{(m)} &= \begin{cases} (z - z_0) n_r - r n_z \quad (m=1) \\ 0 \quad (m \neq 1) \end{cases} \\ \bar{v}_{n4}^{(m)} &= i^{m+1} \frac{g k H_0 \epsilon_m}{2\omega} \left\{ n_r \frac{\cosh kh(h+z)}{\cosh kh} J'_m(kr) \right. \\ &\quad \left. + n_z \frac{\sinh kh(h+z)}{\cosh kh} J_m(kr) \right\} \end{aligned} \right. \quad (20)$$

ただし、 ϵ_m ：ノイマン数 ($m=0$ のとき 1, $m \neq 0$ のとき 2), J_m ：第 1 種 m 次ベッセル関数である。 J'_m は J_m の導関数を表わす。

また、 $c_n^{(m)}$ ($n=0,1,\dots$) は次式で定義される定数である。

$$\left. \begin{aligned} c_0^{(m)} &= k \frac{H_m^{(1)}(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} \\ c_n^{(m)} &= k_n \frac{K'_m(k_n a)}{K_m(k_n a)} \quad (n=1,2,\dots) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ただし、 $H_m^{(1)}$, K'_m などはそれぞれ $H_m^{(1)}$, K_m の導関数を表わす。

(4) 離散化

$\phi_i^{(m)}$ および $\bar{v}_{ni}^{(m)}$ はその定義から明らかなように θ によらないから、各境界面を幅の狭いリングに分割し、このリング上で $\phi_i^{(m)}$ および $\bar{v}_{ni}^{(m)}$ の値を一定と近似する。また各リングに連番号を付け、構造物表面上に $1 \sim N_1$ 、自由表面上に $N_1+1 \sim N_2$ 、海底表面上に $N_2+1 \sim N_3$ 、仮想境界面上に $N_3+1 \sim N$ 番のリングを配する。

いま、点 P が I 番目のリング上にあるものとすれば、式 (19) は次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \phi_i^{(m)}(I) \cos m\theta_i &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{N_1} \bar{v}_{nj}^{(m)}(J) \iint_{S_{i,j}} \frac{1}{R} \right. \\ &\quad \cdot \cos m\theta_j d\sigma - \sum_{j=1}^{N_1} \phi_i^{(m)}(J) \iint_{S_{i,j}} \left\{ n_z(J) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) \right. \\ &\quad \left. + n_z(J) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) \right\} \cos m\theta_j d\sigma + \sum_{j=N_1+1}^{N_2} \nu \phi_i^{(m)}(J) \iint_{S_{i,j}} \frac{1}{R} \\ &\quad \cdot \cos m\theta_j d\sigma - \sum_{j=N_1+1}^{N_2} \phi_i^{(m)}(J) \iint_{S_{i,j}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) \cos m\theta_j d\sigma \\ &\quad + \sum_{j=N_2+1}^{N_3} \phi_i^{(m)}(J) \iint_{S_{i,j}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) \cos m\theta_j d\sigma \\ &\quad \left. + \sum_{j=N_3+1}^N \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(m)} q_n Z_n(z_j) \sum_{L=N_3+1}^N \phi_i^{(m)}(L) \bar{Z}_n(z_L) \Delta c_L \iint_{S_{i,j}} \frac{1}{R} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cos m\theta_j d\sigma \right\} - \sum_{j=N_3+1}^N \phi_i^{(m)}(J) \iint_{S_{i,j}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) \cos m\theta_j d\sigma \right] \end{aligned} \quad (22)$$

ここに、 $\phi_i^{(m)}(I)$, $\bar{v}_{ni}^{(m)}(J)$ などは対応するリングにおけるそれらの値を示す。 $S(J)$ は J 番目リングを表わす。 θ_i および θ_j はそれぞれ I 番目および J 番目リング上の点の θ 座標を表わす。また、 Δc_L は L 番目リングの幅を表わし、 $\bar{Z}_n(z_L)$ は $Z_n(z)$ を L 番目リング上で平均化したもので次式によって定義される。

$$\bar{Z}_n(z_L) = \frac{1}{\Delta c_L} \int_{z_L - \Delta c_L/2}^{z_L + \Delta c_L/2} Z_n(z) dz \quad (23)$$

さらに、上式における R および $\partial(1/R)/\partial r$, $\partial(1/R)/\partial z$ などは次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} R &= |a_{ij} - b_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)|^{1/2} \\ a_{ij} &= r_i^2 + r_j^2 + (z_i - z_j)^2 \\ b_{ij} &= 2r_i r_j \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{r_i \cos(\theta_i - \theta_j) - r_j}{R^3} \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{z_i - z_j}{R^3} \dots \dots \dots (26)$$

ただし、 r_i , r_j , z_i , z_j はそれぞれ I 番目, J 番目のリングの r および z 座標を表わす。また $n_r(J)$, $n_z(J)$ などは J 番目リング上の単位法線ベクトルの r および z 成分を表わす。

(5) 特異点の処理と各項の計算

式 (22) の右辺に現われる積分をそれぞれ次のように置く.

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_{(i,j)}} \frac{1}{R} \cos m\theta, d\sigma \\ I_2 &= \iint_{S_{(i,j)}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) \cos m\theta, d\sigma \\ I_3 &= \iint_{S_{(i,j)}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) \cos m\theta, d\sigma \end{aligned} \right\} \dots \quad (27)$$

この積分についてさらに具体的に計算を進めよう。この際に、リング I とリング J が一致しないとき ($I \neq J$) と、一致するとき ($I = J$) とに分けて考える。

まず $I \neq J$ の場合、このとき積分中の微小面積 $d\sigma = r_J d\theta_J d\Delta_C$ と書くことができるので、式(24)～(26)より、 $I_1 \sim I_4$ はそれぞれ次のようになる。

$$I_1 \approx r_i \Delta c_j \int_{\theta_i}^{\theta_i + 2\pi} \frac{\cos m\theta_j}{|a_{i,j} - b_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j)|^{1/2}} d\theta_j$$

$$I_2 \approx r_j \Delta c_i \int_{\theta_i}^{\theta_i + 2\pi} \frac{|r_i \cos(\theta_i - \theta_j) - r_j| \cos m\theta_i}{|a_{i,j} - b_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j)|^{3/2}} d\theta_i$$

$$I_3 \approx r_j \Delta c_i \int_{\theta_i}^{\theta_i + 2\pi} \frac{(z_i - z_j) \cos m\theta_j}{|a_{i,j} - b_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j)|^{3/2}} d\theta_j$$

.....(28)

これらの式中の $\theta_j - \theta_i$ を γ と置いて整理すると、 $I \neq J$ の場合の $I_1 \sim I_3$ の計算式として以下の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 2r_J \Delta c_J \cos m\theta_i \int_0^\pi \frac{\cos m\eta}{(a_{IJ} - b_{IJ} \cos \eta)^{1/2}} d\eta \\ I_2 &= 2r_J \Delta c_J \cos m\theta_i \int_0^\pi \frac{(r_J \cos \eta - r_i) \cos m\eta}{(a_{IJ} - b_{IJ} \cos \eta)^{3/2}} d\eta \\ I_3 &= 2r_J \Delta c_J \cos m\theta_i \int_0^\pi \frac{(z_J - z_i) \cos m\eta}{(a_{IJ} - b_{IJ} \cos \eta)^{3/2}} d\eta \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

¹³⁾ これらの右辺の積分は完全橢円積分と結びつく。

次に $I=J$ の場合を考える。このとき式(24)からわかるように $a_{IJ} = b_{IJ} (= 2r_i^2)$ となるので、式(28)の被積分関数は $\theta_J = \theta_i$ および $\theta_J = \theta_i + 2\pi$ のとき、すなわち積分の上限と下限において発散する。このため、積分は存在するが、 $I \neq J$ の場合のように直接計算することができない。この場合、Fig. 2 に示すように $\theta_J = \theta_i$ で示されるリング上の点を中心にリングを 2ε の幅で切り取り、リング上で積分を切り取った部分(ΔS とする)と、残った部分における積分の和と考える。このとき $I_1 \sim I_8$ は次のように表わされる。

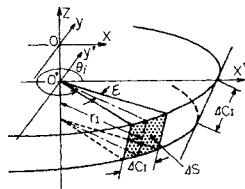


Fig. 2 Definition of ϵ for the calculation at singular point.

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= r_i \Delta c_i \int_{\theta_i + \epsilon}^{\theta_i + 2\pi - \epsilon} \frac{\cos m \theta_j}{|a_{ii} - b_{ii} \cos(\theta_i - \theta_j)|^{1/2}} d\theta_j \\ &+ \cos m \theta_i \int_{as} \frac{1}{R} d\sigma \\ I_2 &= r_i^2 \Delta c_i \int_{\theta_i + \epsilon}^{\theta_i + 2\pi - \epsilon} \frac{|\cos(\theta_i - \theta_j) - 1|}{|a_{ii} - b_{ii} \cos(\theta_i - \theta_j)|^{3/2}} d\theta_j \\ &+ \cos m \theta_i \int_{as} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) d\sigma \\ I_3 &= \cos m \theta_i \int_{as} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ただし、 ϵ が小さいため ΔS 内で $\cos m\theta_i$ の値は一定とし、 $\cos m\theta_i$ で代表している。

この第1, 2式の右辺第1項の積分を I_{11}, I_{21} と置く。これらは $\theta_2 - \theta_1 = \eta$ と置き、さらに積分区間を2つに分割するなどを行って整理すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} I_{11} &= 2 \cos m \theta_i \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{\cos m \eta}{(a_{ii} - b_{ii} \cos \eta)^{1/2}} d\eta \\ I_{21} &= 2 \cos m \theta_i \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{r_i (\cos \eta - 1) \cos m \eta}{(a_{ii} - b_{ii} \cos \eta)^{3/2}} d\eta \end{aligned} \right\} \dots \quad (31)$$

また、式(30)の第1式の右辺第2項の積分は近似的に ΔS を面積が等価となる平面円領域で置き換えると、 $d\sigma = R d\theta_1 dR$ であるから次式のように求められる。

ただし r_0 は円領域の半径で、 $r_0 = \sqrt{2r_i \epsilon \Delta c_i / \pi}$ である。
 さらに $\epsilon = \Delta c_i / 2r_i$ であるから、結局 $1/R$ の積分は次のように表わされる。

また、式(30)の第2、3式の右辺第2項の積分は、被積分関数が ΔS 上で常に0となるため0である。

最終的に $I=J$ の場合の $I_1 \sim I_3$ の計算式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 2\Delta c_i \cos m\theta_i \left\{ \sqrt{\pi} + r_i \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{\cos m\eta \, d\eta}{(a_n - b_n \cos \eta)^{1/2}} \right\} \\ I_2 &= 2r_i^2 \Delta c_i \cos m\theta_i \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{(\cos \eta - 1) \cos m\eta}{(a_n - b_n \cos \eta)^{3/2}} d\eta \\ I_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (34)$$

(6) 離散化方程式

式(29)あるいは式(34)を離散化した積分方程式(22)の積分の部分に代入すると、 $\cos m\theta_i$ はすべての項にかかっているため分離することができ、結局各フーリエモード m ごとに次の離散化方程式が得られる。

ただし、左辺の係数行列の要素 α_{ij}^m 、および定数ベクトル項の要素 γ_i^m は以下のように定義される。

$$a_{ij}^{(m)} = \begin{cases} r_j | n_r(J) E_2^{(m)}(I, J) + n_z(J) E_3^{(m)}(I, J) | \Delta c_s \\ \quad + \pi \delta_{IJ} \dots \dots \dots (J=1 \sim N_1) \\ r_j | E_3^{(m)}(I, J) - \nu E_1^{(m)}(I, J) | \Delta c_J \\ \quad + \sqrt{\pi} \delta_{IJ} (\sqrt{\nu} - \nu \Delta c_J) \dots (J=N_1+1 \sim N_2) \\ \quad - r_J E_3^{(m)}(I, J) \Delta c_J + \pi \delta_{IJ} \\ \quad \dots \dots \dots (J=N_2+1 \sim N_3) \\ a E_z^{(m)}(I, J) \Delta c_J - \tilde{E}^{(m)}(I, J) \Delta c_J \\ \quad + \pi \delta_{IJ} \dots \dots \dots (J=N_3+1 \sim N) \\ (I=1 \sim N) \dots \dots \dots (36) \end{cases}$$

$$\gamma_i^{(m)}(I) = \sum_{J=1}^{N_1} [r_J E_1^{(m)}(I, J) + \sqrt{\pi} \delta_{IJ} \bar{v}_{ni}^{(m)}(J) \Delta c_J] \dots \dots \dots (37)$$

ここに、 δ_{ij} はクロネッカーハイド（ $i=j$ のとき 1, $i \neq j$ のとき 0）である。また、 $E_1^{(m)}(I, J) \sim E_3^{(m)}(I, J)$ は式 (29) やび式 (34) などに現われる積分をまとめて表わしたものでそれぞれ次のようである。

$$\left. \begin{aligned} E_1^{(m)}(I, J) &= \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{\cos m\eta}{(a_{IJ} - b_{IJ} \cos \eta)^{1/2}} d\eta \\ E_2^{(m)}(I, J) &= \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{(r_I \cos \eta - r_J) \cos m\eta}{(a_{IJ} - b_{IJ} \cos \eta)^{3/2}} d\eta \\ E_3^{(m)}(I, J) &= \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{(z_I - z_J) \cos m\eta}{(a_{IJ} - b_{IJ} \cos \eta)^{3/2}} d\eta \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad (38)$$

ただし、 ϵ' は $I \neq J$ のときは 0, $I = J$ のときは $\Delta c_i / 2r_i$ をとるものとする。

また、 $\tilde{E}^{(m)}(I, J)$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{(m)}(I, J) = & \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(m)} q_n \overline{Z}_n(z_J) \sum_{k=N_3+1}^N Z_n(z_k) \\ & \cdot |A E^{(m)}(I, K) + \sqrt{\nu} \delta_{IK} | \Delta c_K \dots \dots \dots \quad (39) \end{aligned}$$

以上によって $\phi_i^m(I)$ ($I=1 \sim N$) に関する連立方程式 (35) を構成するすべての要素が明らかとなった。これを解くことによって、内部領域すべての境界面上に配したリング上でボテンシャル係数 ϕ_i^m が定まり、未知ボテンシャルはこれを係数とするフーリエ級数によって式 (12) のごとく定められる。

4. 流体力および周辺波高分布

構造物に作用する流体力は、入射・散乱波による波強制力と、構造物の運動により周囲の流体から受ける力とに分けて考えられ、後者はさらに付加質量力および造波減衰力として評価される。これらは次式で定義される。

$$E_i = i\rho\omega \iint_{S_i} (\phi_0 + \phi_4) v_{ni} \, d\sigma \quad \dots \dots \dots \quad (40)$$

$$M_{lm} + i \frac{N_{lm}}{\omega} = \rho \int \int_S \phi_l v_{nm} d\sigma \dots \dots \dots \quad (41)$$

ただし、 E_l 、 M_{lm} 、 N_{lm} ($l, m = 1 \sim 3$) は、それぞれ l 方向波強制力振幅、 l 方向運動による m 方向付加質量および造波減衰係数である。また ρ は流体密度である。

式(40)に式(12)を代入する。そして θ に関する積分は厳密に行い、子午線方向の積分を離散近似すれば次式を得る。

ここに, c は定数で $l=1, 3$ のとき i , $l=2$ のとき $2i$ である. また, φ の肩付き添字 m は $l=1, 3$ のとき 1 , $l=2$ のとき 0 である. $n_l(I)$ は次式で定義される.

$$\left. \begin{array}{l} n_1(I) = r, n_r(I), \quad n_2(I) = r, n_z(I) \\ n_3(I) = r, \{(z_1 - z_0)n_r(I) - r, n_z(I)\} \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (43)$$

付加質量および造波減衰係数も波強制力と同様な手順により求められ次式のようになる。

$$M_{lm} + i \frac{N_{lm}}{\omega} = \rho c' \sum_{l=1}^{N_l} n_m(l) \phi_l^{(n)}(I) \Delta c_l, \dots \quad (44)$$

ここに, c' は定数で $l=1, 3$ のとき π , $l=2$ のとき 2π である. また, φ の肩付添字 n は $l=1, 3$ のとき 1 , $l=2$ のとき 0 である.

以上からわかるとおり、波強制力、付加質量および造波減衰係数を求める際には、2次以上のフーリエ項を必要としないので計算は著しく簡単となる。

構造物周辺の波高 H は次式により求められる.

$$H(r,\theta) = \frac{2i\omega}{g} \sum_{m=0}^{\infty} [\varphi_0^{(m)}(r,0) + \varphi_4^{(m)}(r,0) - i\omega \sum_{l=1}^3 D_l \varphi_l^{(m)}(r,0)] \cos m\theta \dots \quad (45)$$

仮想境界面内部領域では、自由表面上のポテンシャル係数が求められているのでこれを用いて上式からただちに求めることができる。一方、外部領域においても、仮想境界面上のポテンシャル係数を用いて式(14)、(15)から複素係数 A_{lm}^{in} ($l=1 \sim 4, m=0, 1, \dots$) を求め、これを式(13)に代入することによってポテンシャル係数が定められるから、式(45)により同様に波高分布を求めることができる。なお、複素変位振幅 D_l は、式(42)、(44)から求められる波強制力、付加質量および造波減衰係数を用いて運動方程式を解くことにより簡単に求められる。これについては前報⁴⁾を参照されたい。

5. 数値計算例と考察

(1) 要素分割数と計算精度

以上述べた解析法を実際に適用する際に、要素分割数をどの程度にすればよいか、また、フーリエ級数項を何

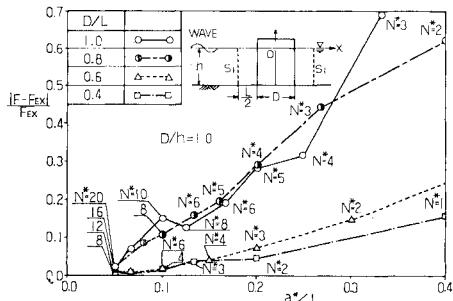


Fig. 3 Relationship between accuracy and element length.

項とればよいかなどが計算精度に関連して重要となる。したがって、流体力特性、波高分布などの計算を行う前に、これら基礎的な検討を行うこととする。

まず要素分割数と計算精度の関係であるが、前章で示したように流体力を求めるのに必要なフーリエ項は0次および1次のみであるので、流体力に基づけばフーリエ級数の収束を考慮することなくこの問題を検討することができる。もちろん計算精度は単に分割要素数のみによって決まるものではなく、構造物形状と大きさ、入射波条件、設置水深など種々の要因が関係する。しかし、前報¹⁴⁾で述べたように、主として分割要素幅 a^* と入射波長 L の比 a^*/L に支配され、 a^*/L の値を目安に分割数を決定すれば実用上は十分であると考えられる。したがって、ここではこの目安を得るために、要素分割数を変えて直立円柱に作用する水平波力を求め、これを厳密解¹⁵⁾と比較した。この結果を Fig. 3 に示す。横軸は a^*/L 、縦軸は厳密解 F_{ex} と計算値 F の相対誤差である。ただし、図中に示した N^* は円柱表面の要素数で、等分割を行っている。また、円柱表面以外の境界面も要素幅が a^* とほぼ等しくなるように等分割している。なお、仮想境界面は円柱表面から $L/2$ の位置に固定してある。

この図から、いずれも a^*/L を小さくしていくと、それに従って計算値は厳密解に近づくのがわかる。ただし、計算値の収束のしかたは構造物の径 D と L との比によって異なり、同じ a^*/L でも D/L が大きくなるほど精度が悪くなる傾向がみられる。これは D/L が大きくなるに従って波の場が複雑になるためと思われる。しかしながら、本計算例 ($D/L \leq 1.0$) では $a^*/L = 0.05$ とするといずれの場合もほとんど厳密解に一致することがわかる。

(2) 仮想境界面の位置の影響

次に仮想境界面の位置を移動して同様な計算を行い、仮想境界面の位置の影響を調べた。この結果を Fig. 4 に示す。これらは円柱表面から仮想境界面までの距離 Δ を L の 0.5, 1.0, 1.5 倍の 3 通りとし、 D/L は 1.0 と 0.4 の 2 通りとした場合の結果を示したものである。図

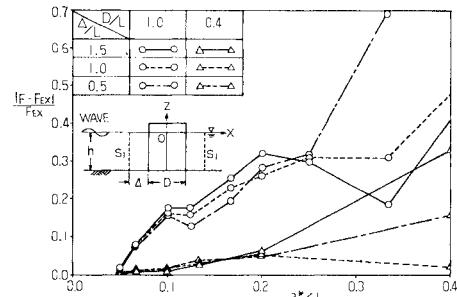


Fig. 4 Effect of interval between imaginary boundary and structure

の横軸および縦軸は Fig. 3 と同様である。

この図から、 $a^*/L > 0.1$ では仮想境界面の位置によって計算値はかなりばらつくが、 a^*/L が小さくなるとばらつきも小さくなり、計算値が厳密解に収束する $a^*/L = 0.05$ では仮想境界面の位置の影響はほとんどみられないことがわかる。以上のように本計算例 ($D/L \leq 1.0$) では、 a^*/L を 0.05 程度にとれば仮想境界面の位置を任意にとることができ、しかも計算精度も十分である。したがって、先に述べたように仮想境界面を構造物に近づけることによって未知数の数を減らすことができる。

(3) フーリエ級数の収束

流体力を計算するのに必要なフーリエ項は0次および1次のみであるが、構造物表面上の波圧分布や構造物周辺の波高分布を得るために2次以上の項も必要となり、フーリエ級数の収束が問題となる。本論文では、Fig. 5 に示すような軸対称貯油タンクに作用する波圧をもとにフーリエ展開項数 M と収束の関係を調べた。この結果、 $M=10$ で 4 桁目まで一致することが確認された。これを収束値とみなし、収束の様子をこの収束値と M 項までの展開による計算値の比で示したのが Fig. 6 である。これらはそれぞれ図中に示したように $D/L = 0.4$ および 1.0 に対するものである。ただし、タンク表面の分割数はそれぞれ 9 および 21 で、 $a^*/L = 0.048 \sim 0.057$ になる。また、仮想境界面はタンクから $0.5 L$ 離れた位置に設けた。これから $D/L = 0.4$ の場合 $M=5$ 、 $D/L = 1.0$ の場合 $M=7$ 程度とすれば実用上十分であることがわかる。この結果は円錐台を対象にフーリエ級数の収束を検討した清川ら¹⁶⁾の結果と同様である。なお、図中には波が入射する前面 ($\theta = 180^\circ$) および背面 ($\theta = 0^\circ$)

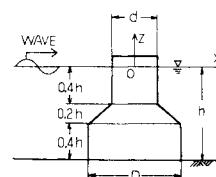


Fig. 5 Definition sketch for axisymmetric tank.

における計算値を示したが、タンク表面上の他の点においても同様に収束しているのが確認された。

(4) 円筒および逆円錐台浮体に作用する流体力特性

Fig. 7 に示すような円筒および逆円錐台浮体に作用する波強制力の応答特性を Fig. 8~10 に示す。図中、実線は逆円錐台、破線は円筒浮体の結果を表わし、喫水と径の比 d/D を 0.25, 0.5, 0.75 としたものである。また、横軸は D と入射波長 L の比で、縦軸は波強制力の各成分を、 $\bar{E}_1 = E_1/\rho g A_x H_0$, $\bar{E}_2 = E_2/\rho g A_x H_0$, $\bar{E}_3 = E_3/\rho g V H_0$ のように無次元化した値である。ただし、 A_x および A_z はそれぞれ構造物の x 方向、 z 方向の投影面積、 V は構造物の排水容積である。

Fig. 8 にみられるように、 \bar{E}_1 に関しては円筒浮体と逆円錐台浮体ではほぼ同じような特性である。ただし、逆

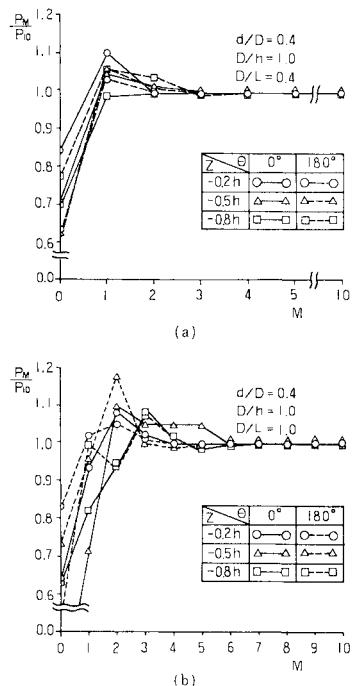


Fig. 6 Convergence of Fourier series concerned with wave pressure.

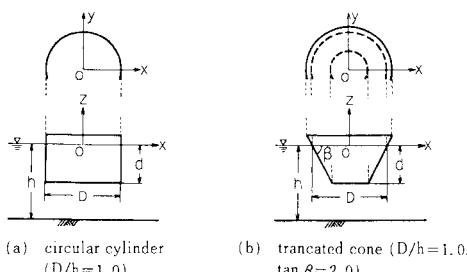


Fig. 7 Definition sketch for semi immersed circular cylinder and truncated cone.

円錐台の場合、円筒に比べ \bar{E}_1 のピーク値は小さく、全体的に偏平な特性を示す。また、Fig. 9 より \bar{E}_2 に関しても両者は類似の特性を示し、計算した範囲内で D/L の増加に伴って単調に減少していることがわかる。ただし、円筒の場合 d/D が大きいほど、換言すれば構造物の径に比べて吃水が深いほど、 D/L の増加に伴う \bar{E}_2 の減少が大きいのに対し、逆円錐台ではそのような傾向はみられない。これは $D/h=1.0$ に固定して計算を行っているので、 D/L が大きくなると h/L も大きくなり、波による水粒子運動が水面付近のみとなるため、鉛直波力が底面だけに作用する円筒では喫水の影響を強く受けるのに対し、逆円錐台では常に側面にも鉛直波力が作用するので喫水の影響をあまり受けないためと思われる。

次に \bar{E}_3 の特性であるが、これは \bar{E}_1 , \bar{E}_2 と異なり、Fig. 10 にみられるように d/D によって複雑に変化することがわかる。これはモーメントに関しては、水平方向、鉛直方向それぞれの波力の大きさ、およびそれらの位相差が複雑に影響するためである。なお、ここでは比較の

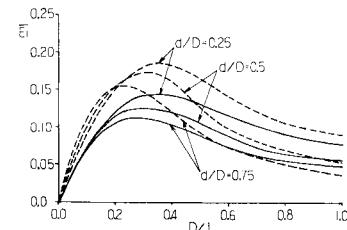


Fig. 8 Sway exciting force coefficient for semi immersed circular cylinder and truncated cone.

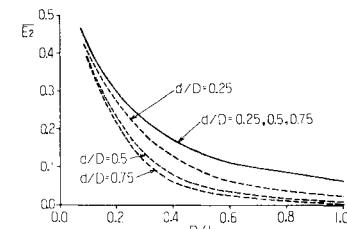


Fig. 9 Heave exciting force coefficient for semi immersed circular cylinder and truncated cone.

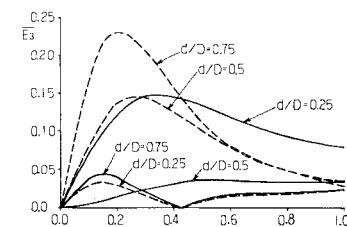


Fig. 10 Roll exciting force coefficient for semi immersed circular cylinder and truncated cone.

ために円筒浮体に関する計算例も取り上げたが、この結果は Sabuncu ら¹⁷⁾および Ferdinand ら¹⁸⁾の計算結果と一致するものである。

次に、逆円錐台浮体の付加質量および造波減衰特性を Fig. 11～13 に示す。ただし、これらの無次元化は $\bar{M}_{11} = M_{11}/\rho V$, $\bar{M}_{22} = M_{22}/\rho V$, $\bar{M}_{33} = M_{33}/\rho Vd(D/2)$, $\bar{N}_{11} = N_{11}/\rho \omega V$, $\bar{N}_{22} = N_{22}/\rho \omega V$, $\bar{N}_{33} = N_{33}/\rho \omega Vd(D/2)$ の

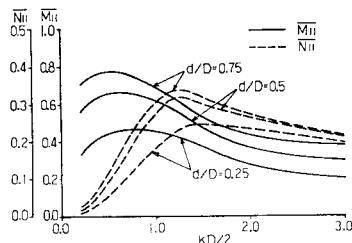


Fig. 11 Sway added mass and damping coefficient for semi immersed truncated cone.

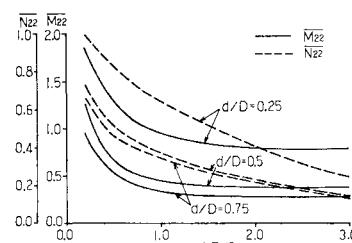


Fig. 12 Heave added mass and damping coefficient for semi immersed truncated cone.

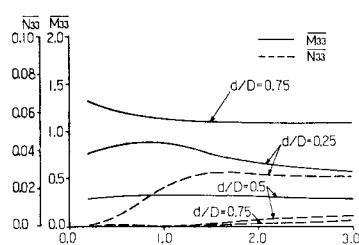


Fig. 13 Roll added moment and damping coefficient for semi immersed truncated cone.

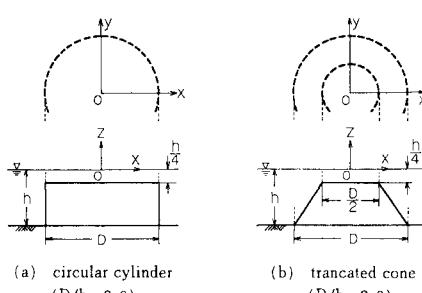
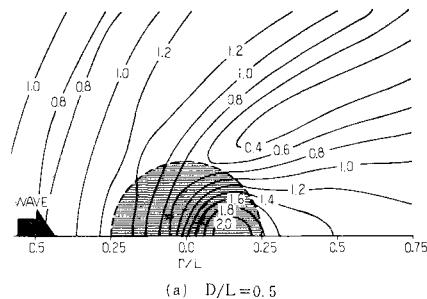


Fig. 14 Definition sketch for submerged circular cylinder and truncated cone.

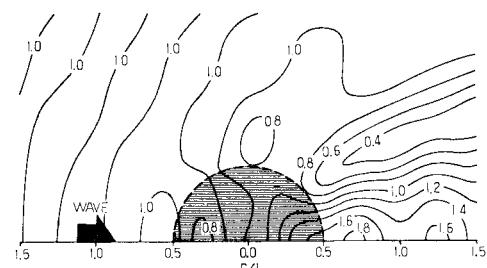
ように行った。これらの図より、付加質量に関しては各成分ともに、 D/L が大きくなるに従って一定値に収束することがわかる。なお、付加質量、造波減衰にはこのほかに連成成分があるが、紙面の都合上省略した。

(5) 没水体周辺の波高分布例

Fig. 14 に示すような没水円筒および没水円錐台周辺の波高分布を Fig. 15, 16 に示す。ただし、 $D/h = 2.0$

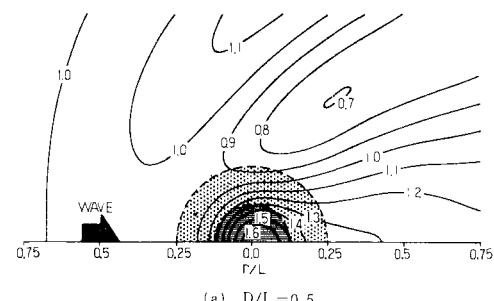


(a) $D/L = 0.5$

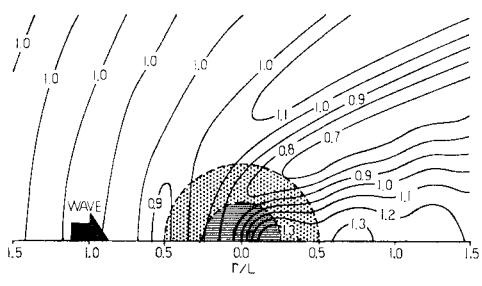


(b) $D/L = 1.0$

Fig. 15 Topography map of wave height distribution around submerged circular cylinder.



(a) $D/L = 0.5$



(b) $D/L = 1.0$

Fig. 16 Topography map of wave height distribution around submerged truncated cone.

とし、 D/L を 0.5, 1.0 の 2通りとして計算した。また、フーリエ展開項数 M は前述の検討結果に基づいて $D/L = 0.5, 1.0$ に対し、それぞれ 5 および 7 とした。

これらの図より、いずれも構造物の中心軸後方で高い波高を生じるが、 $D/L = 1.0$ の場合は、 $D/L = 0.5$ の場合と異なり、複数個の山が現わるのがわかる。また、最大波高は没水円筒と比べて、没水円錐台の方が若干小さくなっているが、これは構造物の代表径 D として海底面での直径を用いているため、同じ D/L に対して没水円錐台の方が上部の大きさが小さく、このため波の場に与える影響が少ないためと思われる。

6. あとがき

以上、著者らは軸対称構造物に作用する流体力および構造物周辺の波高分布に関する実用的な解析法を提案した。これは、有限領域を対象とした数値解析法に無限遠方での放射条件を解析的に満足する解を接続するもので、放射条件を満足する数値解が得られる。この解析法の特長をまとめると以下のようになる。

(1) 本解析法は、軸対称グリーン関数法に比べ解すべき未知数の数は増えるが、仮想境界面を構造物のごく近傍にまで近づけられるため実用上の問題は生じない。

(2) 本解析法は、軸対称グリーン関数法に比べ構造物周辺の波高分布が著しく簡単に求められる。したがって波高分布計算を行う場合には軸対称グリーン関数法に比べて効率のよい解析法ということができよう。

(3) 本解析法は、軸対称グリーン関数法に比べ積分核がきわめて単純となるので取扱いが簡単である。

(4) 本研究で検討した範囲、すなわち構造物の代表径と入射波長の比が 1.0 以下では、分割要素幅を入射波長の 20 分の 1 程度にすれば高精度の解析が可能である。またこの場合、仮想境界面の位置を任意に設定できる。

論文中にこの解析法による流体力および波高分布などの計算例を示した。構造物形状、入射波条件など限られた範囲の計算例ではあるが、本解析法の有効性が確かめられたと思われる。プログラム作成にあたって効率化は特に考えなかったので改善の余地は残されているが、ちなみに本論文中の数値計算に要した計算時間 (CPU タイム)の一例を紹介すると、要素分割数 30 の場合、1 フーリエモード平均で最大 2.5 秒、要素分割数 60 で 7 秒程度であった。なお、使用した計算機は清水建設(株)電算センター所有の IBM 3081 である。

参考文献

- 1) Black, J. L. : Wave forces on vertical axisymmetric

- bodies, J. F. M., Vol. 67, Part 2, pp. 369~376, 1975.
- 2) Fenton, J. D. : Wave forces on vertical bodies of revolution, J. F. M., Vol. 85, Part 2, pp. 241~255, 1978.
- 3) 中村孝幸・Robert, T. H. : 軸対称性を有する任意形状の浮体の応答計算法、愛媛大学紀要第Ⅲ部(工学)第9巻第4号, pp. 375~398, 1981.
- 4) Isaacson, M. : Fixed and floating axisymmetric structures in waves, Jour. of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Div. ASCE, Vol. 108, No. WW2, May, 1982.
- 5) 清川哲志・小林 浩・日野幹雄：軸対称構造物による波の散乱と波力、土木学会論文報告集第321号, pp. 103~112, 1982.
- 6) 井島武士・周 宗仁：グリーンの公式による 2 次元水面波の境界値問題の解析、土木学会論文報告集第252号, pp. 57~71, 1976.
- 7) 井島武士・吉田明徳・山本督夫：任意断面浮体の 2 次元係留運動と波の変形、土木学会論文報告集第272号, pp. 53~63, 1978.
- 8) 井島武士・松井 創・永田修一：任意断面形の空隙浮体の 2 次元運動と波の変形、土木学会論文報告集第296号, pp. 25~37, 1980.
- 9) Ferdinand, V. and Kritis, B. G. : An economical method of determining added mass and damping coefficients of axisymmetric floating bodies in oscillatory heaving motion, International Ship Building Progress, Vol. 27, No. 313, 1980.
- 10) 濑戸秀幸：有限要素法による定常波動問題の基礎的研究(第3報), 日本造船学会論文集, No. 141, 1977.
- 11) 濑戸秀幸：有限要素法による定常波動問題の基礎的研究(第4報), 日本造船学会論文集, No. 144, 1978.
- 12) 濑戸秀幸：New Hybrid Element Method による海洋構造物に働く波力解析、第2回流れの有限要素解析シンポジウム報告集, pp. 59~66, 1980.
- 13) 森口繁一・宇田川鉢久・・松 信：数学公式 I, 岩波全書 221, pp. 146~151, 1956.
- 14) 清川哲志・大山 巧・小林 浩：グリーン関数法による任意形状浮体の動揺解析、土木学会論文報告集第332号, pp. 55~65, 1983.
- 15) MacCamy, R. C. and Fuchs, R. A. : Wave forces on Piles; a diffraction theory, Tech. Memo., No. 69, Beach Erosion Board, pp. 1~17, 1954.
- 16) 前出5)
- 17) Sabuncu, T. and Calisal, S. : Hydrodynamic coefficient for vertical circular cylinders at finite depth, Ocean Eng., Vol. 8, pp. 25~63, 1981.
- 18) 前出9)

(1983.7.4・受付)