

地下水流动に関するシミュレーションの誤差構造とその確率的評価

ERROR STRUCTURE AND PROBABILISTIC EVALUATION OF SIMULATION ON GROUND WATER BEHAVIORS

高木不折*・原田守博**

By Fusetsu TAKAGI and Morihiro HARADA

The simulation technique has been used to investigate and estimate the confined ground water behaviors through the identification process. However, it seems that we have lack of attention to the objective evaluation of the simulated results themselves. The present paper is intended to propose the evaluation method of the ground water simulation by convincing the kinematical and probabilistic approaches. For this purpose, the variational formulation have been made on the ground water behaviors, which gives us a useful tool to express the relationship among errors of parameter estimation, boundary and initial conditions and the accuracy of the simulated result in the whole region concerned. This relationship is convinced with the probabilistic concept and leads the evaluation-index of the ground water simulation.

1. まえがき

ある地域の地下水流动のようすを解明するために、数值シミュレーションの手法が用いられる。通常は地層構造とその場に対する地下水流の基礎方程式が記述され、これを解くことによって地下水の水頭値を再現している。その場合、必要となる各種パラメーターは実際のいくつかの観測井での観測水頭値を用いた同定作業を通して決定してきた。このようなシミュレーションに際しては、境界条件、初期条件、揚水条件などを与えることが必要である。ところが、実際にはこれらの条件の詳細が十分にはわかっていない場合が多く、それが的確に与えられているかどうかは、実はシミュレーションの結果とその評価をするうえで大きな鍵ともなっているのである。

著者らは、これらの未知の要素を含んだうえで、現在行われ、結論が出されてきたシミュレーションが実際にどれほどの精度をもっているのかという問題を考察してきた。熟練した研究者の最終的な判断はそれ自身一つの評価を与えるものではあるが、そのような判断を経て

得られた結論を、いま一度客観的に評価することはできないかと考えた。本報は、こうした観点に立って、地下水のシミュレーションに含まれる誤差の構造を考察するとともに、最終的なシミュレーションをどのように評価するべきか、その一試案を示そうとしたものである。

2. 基礎方程式の変分表示

被圧地下水帯を考えるに際して、ここでは地下水帯について鉛直方向に積分した2次元の形式で考えよう。まず、地下水流れの基礎方程式を記すと次式のようになる。

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(T \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) + r \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

ここに、 x_1, x_2 ：水平面にとった位置座標、 t ：時間、 $h(x_i, t)$ ：水頭値、 r ：地下水帯単位面積当たりの水供給強度（揚水量、漏水量を含む）、 S ：貯留係数、 T ：透水量係数である。

さて、いま、水頭値 h が実際に起こる水頭分布 $h^*(x_i, t)$ とその周辺の微小仮想変位 $\delta h(x_i, t)$ から成るものと考え、

$$h(x_i, t) = h^*(x_i, t) + \delta h(x_i, t) \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

と記す。ただし、 $h(x_i, t)$ は $h(x_1, x_2, t)$ の略記である。さらに、

$$|h^*(x_i, t)| \gg |\delta h(x_i, t)| \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

* 正会員 工博 名古屋大学教授 土木工学教室
(〒464 名古屋市千種区不老町)

** 正会員 工修 名古屋大学助手 土木工学教室 (同上)

と仮定しよう。この δh を式(1)の両辺に乘じて整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S \frac{\partial(\delta h)^2}{\partial t} &= -S \delta h \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{1}{2} T \delta \left[\sum_i \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 \right] \\ &\quad + r \delta h + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ T \frac{\partial h}{\partial x_i} \delta h \right\} \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

となる。ここで、この両辺を S で除したうえで、対象としている地下水帯の領域 G 、時間について積分すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_G (\delta h)^2 dx_i &= -\delta \iint_G L_g dx_i dt \\ &\quad + \oint_C S \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{dx_1}{ds} \right] \delta h ds dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_G (\delta h)^2 dx_i \geq 0 \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 $\int_G dx_i$ は $\int_G dx_1 dx_2$ の略記であり、また、 L_g は local potential とよばれ¹⁾、

$$L_g = \frac{\partial h^*}{\partial t} h + \frac{1}{2} \frac{T}{S} \sum_i \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{rh}{S} \dots\dots\dots(6)$$

である。さらに、 C は地下水帯の周辺境界、 I は初期時における値、 s は C に沿って反時計方向に測った距離である。

式(5)右辺の変分演算は h についてのみ考えている。同じ水深という物理量に対して、上記のように、変分に関与する量 h と関与しない量 h^* を用いるのは、本来の意味では非保存系では成立しない変分原理を非保存系としての地下水水流に対して用いるために必要となるもので、いわゆる局所平衡の仮定に基づくものである。

また、式(5)において、 δh を h と現実に起こる水頭 h^* との間の誤差であるとみれば、式(5)の左辺は、ある時刻における対象とする領域全体での誤差の2乗の合計(の1/2)であるとみなすこともできる。

さて、通常の地下水水流の解析では、しかるべき境界条件・初期条件に対して系内部の水頭の時間的・場所的分布を解くことになる。式(5)では、右辺第1項は内部積分の変分項、第2項は境界積分項、第3項は初期条件項となっている。したがって、境界条件・初期条件が正しく与えられている場合には、第2項・第3項では $\delta h = 0$ となり、式(5)は次のように書きかえられる。

$$\frac{1}{2} \int_G (\delta h)^2 dx_i = -\delta \iint_G L_g dx_i dt \geq 0 \dots\dots\dots(7)$$

さらに、現実に起こる水頭分布では、対象領域の内部いたるところで $\delta h = 0$ であるべきだから、

$$\delta \iint_G L_g dx_i dt = 0 \dots\dots\dots(8)$$

が成立せねばならない。言い換えれば、与えられた条件のもとで地下水頭値の分布を求めるということは、実は式(8)が成立するような分布を求ることである。ただ、

前にも触れたとおり局所平衡の仮定のために、式(8)では h のみについて変分を考えた後、補助条件式

$$h(x_i, t) \equiv h^*(x_i, t) \dots\dots\dots(9)$$

を用いねばならない。実際、式(8)を満たす条件式、Euler-Lagrange の式を導き、これに式(9)を用いると、 h^* について式(1)と全く同じ式が得られるのである。

以上のようにして、ある地下水盆では、地下水は式(8)の変分原理に従って運動していることが示される^{2),3)}。この変分原理の物理的意義については、すでに発表しているので^{2),3)} その詳細は割愛するが、local potential L_g に実際に起こる水深 h^* を用いたものを L_g^* と記すと、 L_g^* は地下水帯単位面積、単位時間に起こる力学的エネルギー損失 ΔE_g 、とその周辺より流れによって運び込まれる力学的エネルギーとの次の関係にある。

$$L_g^* = -\frac{1}{2} \Delta E_g + (\text{energy flux}) \dots\dots\dots(10)$$

さらに、変分原理 式(8)は、流れの幾何学的状態を局所的に固定するという条件(局所平衡の仮定)のもとで、流れの力学的状態を仮想変位させた場合の、対象とする領域・時間について上記のエネルギー $\int L_g dx_i dt$ の停留性を問題としていることに相当する^{2),3)}。このように、式(8)の変分原理はエネルギーと密接な関係をもっていることが示される。

3. 諸条件の誤差と地下水シミュレーションの誤差

地下水の流動のシミュレーションをする場合には、いろいろな形式で誤差が入ってくる。いま、冒頭で述べたような、物理則に立ったシミュレーションについて、その誤差にはどのようなものがあるかを分類すると、Table 1 のようになろう。ここでは、第1段階としてモデル構造は正しく与えられているものと考え、構造パラメーターと各種条件の誤差がシミュレーション結果に及ぼす誤差の構造について考察しよう。

(1) 構造パラメーターの誤差に基づく誤差

シミュレーションにあたって、他の諸条件は正しく与えられているが、構造パラメーター S 、 T の評価が十分ではなく、それらの近似値 S_0 、 T_0 を用いて計算された場合を考えよう。構造パラメーターの値に誤差が含ま

Table 1 Factors affect on Simulation error.

モ デ ル 構 造	Darcy 則が成立するか(流れの構造にかかわるもの)。 地下水帯の地形・地質条件が正しく評価されているか(積分領域)。
構造パラメーター	透水係数 k 、透水量係数 T 、貯留係数 S が正しく評価されているか。
各 種 条 件	初期条件・境界条件・水供給条件(漏水・揚水を含む)などが正しく評価されているか。

形式で誤差を生み出すかを考えてきた。その誤差の時間的場所的分布を求めるためには、原理的には誤差に対する所定の条件について、

$$\delta \iint_G L'_g dx_i dt = 0 \quad \dots \dots \dots (25)$$

を解けばよいのであるが、そのためには L'_g に含まれる正しいパラメーターや、正しい初期・境界条件がわかっている必要がある。もともと、これらの量がわかっておれば何も近似解を求める必要はないわけで、実際には、シミュレーションの誤差の値自身を求めるることは不可能であって、その評価のためには、後述するように、別の道を進まねばならない。

いずれにしても、これまでの議論を振り返れば、これまでに挙げた条件や、揚水量・供給量 γ などに含まれる誤差が重なって起こっている場合にも、同様に L'_g などが定義され、系全体としてのシミュレーションの誤差は総合的には、

$$\frac{1}{2} \iint_G (\delta h)^2 dx_i = E \geq 0 \quad \dots \dots \dots (26)$$

という形式をとり、この誤差が実は系内のエネルギーと密接な関係をもっていることが示される。

4. 同定とシミュレーションの誤差

通常のシミュレーションでは、対象領域内のいくつかの観測井での水頭計算値が観測値を再現するようにモデルパラメーターが評価される。しかし実際には両者が完全に一致することは少なく、普通はその誤差の程度、流れの流動方向、変動状態など場所的時間的分布を考慮して最終的に判断されている。一方、この判断ができるだけ客観的に下そうとの試みもしてきた。その手法としては、たとえば、計算値と実測値の差の 2 乗の総計が最小となるようにパラメーターを定める工夫である^{4)~6)}。この方法での考え方は、あくまでも誤差論的な立場から、平均 2 乗誤差を最小にしようという立場に立ったものである。

ところで、ここで導入した式 (5), (26) は、実はそのような同定の手法が合理的なものであることを示している。さらに、水頭値の誤差の 2 乗の和という量を基礎とするということは、詳細は割愛したが、力学的には系のエネルギーという次元で同定作業を行っていることにはかならないのである。このように考えれば、前章での論議は、平均 2 乗誤差を最小とする評価基準に力学的な意義づけをしたものであると解釈されよう。

次に、同定作業によってどこまでシミュレーションの精度を向上させ得るか、その限界について考えておこう。いま、同定作業によって、Fig.1(a) のような領域 G にある 3 本の観測井 A, B, C の観測値を余すところなく再現し得たとしよう。そこで、Fig.1(b) のような領域

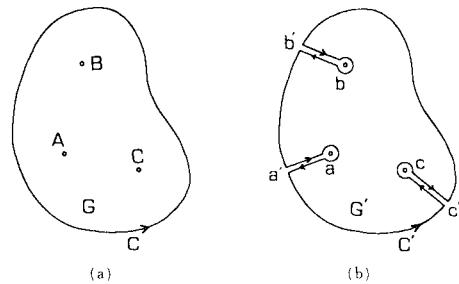


Fig. 1 Schematic representation of the Domain.

G' について考えるが、その際井戸 A, B, C 周辺を跨む領域は無限に小さくなっているものと考えておく。先に述べた式 (5) をこの G' について記せば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_{G'} (\delta h)^2 dx_i &= -\delta \iint_{G'} L'_g dx_i dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_{G \cup I} (\delta h)^2 dx_i + \oint_c + \oint_a + \oint_b + \oint_c \\ &\quad + \int_{aa} + \int_{aa} + \int_{bb} + \int_{bb} + \int_{cc} + \int_{cc} \geq 0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (27)$$

と書かれる。ただし、境界積分 \oint 、あるいは \int_{aa} などの被積分関数は式 (5) におけるそれと同じである。

さて、ある仮定した条件のもとで内部を解いたということは、上式右辺第 1 項をゼロとしたことである（ただし、実際には先に述べた L'_g の分が残ってはいる）。また、3 本の井戸で誤差がないということは、そのごく近傍では、 $\delta h = 0$ であって、

$$\oint_a = \oint_b = \oint_c = 0 \quad \dots \dots \dots (28)$$

である。さらに、

$$\int_{aa} = -\int_{aa}, \dots \quad \dots \dots \dots (29)$$

であるから、式 (27) は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_{G'} (\delta h)^2 dx_i &= -\delta \iint_{G'} L'_g dx_i dt \\ &\quad + \int_c \frac{T}{S} \left[\frac{\partial h^*}{\partial x_1} \frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial h^*}{\partial x_2} \frac{dx_1}{ds} \right] \delta h ds dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_{G \cup I} (\delta h)^2 dx_i = E \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (30)$$

と書かれる。

上式の左辺は領域 G' でのシミュレーションの誤差であり、右辺は初期・境界条件の誤差に $-\delta \iint_{G'} L'_g dx_i dt \geq 0$ を加えたものである。言い換えれば、領域内の何点かの井戸で、仮に誤差ゼロで同定したとしても、もし諸条件が誤差を含んでおれば、その誤差は井戸近傍以外の領域に分布されていることになる。すなわち、当然のことではあるが、式 (30) は「シミュレーションの精度は、初期・境界条件（ここでは記さなかったが r など）の精度以上にはならない」ことを示しているのである。

5. 対象領域内部の誤差出現の確率

いま一度式(26)をみると、 E は系全体としての誤差の2乗の合計(の1/2)となっている。観点を変えれば、「種々の誤差によるシミュレーションの誤差が領域 G にばらまかれている」ことを示している。以下では、この誤差 E がどのような形式で領域内部にばらまかれるか、その確率を考えよう。

(1) 領域内部における誤差

まず、 E は既知であるとし、対象としている領域 G を面積 g の等しい N 個の微小領域 g_i (以下では細胞領域とよぶことにする)から成るものと考え、個々の微小な領域では、水頭値はある代表値で与えられ、その内部では一様であると考えると、式(26)は、

$$\sum_i \frac{1}{2} \int_{g_i} (\delta h)^2 dx_i = E \geq 0 \quad (31)$$

と記される。

そこで、全体としての誤差 E を N 個の領域に配分する問題を考えよう。この場合、個々の細胞領域での誤差はある discrete な値 ε_i のみをとり得るものとする。まず、 N 個の細胞のうち、

$$\frac{1}{2} \int_g (\delta h)^2 dx_i = \frac{1}{2} (\delta h)^2 g = \varepsilon_i \quad (32)$$

となる細胞の数が n_j 個であるとすると、

$$\sum n_i = N, \sum \varepsilon_i n_i = E \quad (33)$$

の条件が成立せねばならない。このような条件下で、全体 N 個の細胞領域のうちで、 n_1 個は ε_1 、 n_2 個は ε_2 、…の誤差をとるものとすると、1つの細胞領域で ε_i という誤差が出現する確率 $p(\varepsilon_i : E)$ は、よく知られているように、

$$p(\varepsilon_i : E) = \frac{n_i}{N} = \frac{1}{f} e^{-\beta \varepsilon_i} \quad | \quad f = \sum e^{-\beta \varepsilon_i} \quad (34)$$

で与えられる⁷¹⁾。上式中、 β は式(33)の第2式が成立するように定められる。上記の式(34)は、 E が既知の場合に ε_i という誤差の確率を与えるという意味で条件付確率の形で $p(\varepsilon_i : E)$ と記してある⁷¹⁾。

(2) 誤差測定単位とパラメーター β

パラメーター β の値について調べておこう。式(34)の f を β で微分すると、

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = - \sum \varepsilon_i e^{-\beta \varepsilon_i} \quad (35)$$

となるから、誤差 ε の平均値 $\bar{\varepsilon}$ は

注1) 式(34)で与えられる誤差の確率は対象領域内部のすべての細胞領域で等しい。これは、たとえば境界の誤差が内部にどのように伝わるかという誤差の伝播とは異なった見方である。実際には境界のどこにどの程度の誤差があるかもわからないので、ここでは対象領域内部について同等の扱いをした。

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{E}{N} = \sum \varepsilon_i \cdot p(\varepsilon_i : E) = \frac{\sum \varepsilon_i e^{-\beta \varepsilon_i}}{f} \\ &= -\frac{\partial f}{\partial \beta} / f = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log_e f(\beta) \end{aligned} \quad (36)$$

と書かれる。

ところで、ここでは ε を測定する最小単位を考え、それを ε_0 と記すことにする。すなわち、誤差 ε_i は、

$$0, \varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \dots$$

の値しかとり得ないものと考えよう。このようなときは、

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \sum e^{-\beta \varepsilon_i} = 1 + e^{-\beta \varepsilon_0} + e^{-2\beta \varepsilon_0} + \dots \\ &= 1 / [1 - e^{-\beta \varepsilon_0}] \end{aligned} \quad (37)$$

すなわち、

$$\log_e f(\beta) = -\log_e [1 - e^{-\beta \varepsilon_0}] \quad (38)$$

であって、式(36)、(38)を用いると、

$$\beta = \frac{1}{\varepsilon_0} \log_e \left[1 + \frac{\varepsilon_0}{\bar{\varepsilon}} \right] \quad (39)$$

の関係式が得られる。この式は β を、 ε 測定の最小単位 ε_0 と誤差の平均 $\bar{\varepsilon} = E/N$ で表現したものである。

6. 地下水シミュレーションの確率論的評価指標

実際のシミュレーションでは同定作業が行われるが、同定作業を終えても、観測井の地点で何らかの誤差は避けられないのが普通である。以下では、同定作業など種々の判断過程を経て、最終的な形でシミュレーションが結論づけられた後に、なお残されている誤差を対象とする。

前章では、シミュレーションの結果の系全体としての誤差 E がわかっているとして議論したが、実際にはこの値がわからないのであって、シミュレーションの結果の評価というのは、実はこの E の値を評価することにほかならない。さらに、その評価のための手掛りとしては、われわれは、いくつかの観測井での観測値と計算値しかもっていないのである。すなわち、これらの値の差つまり各観測井での誤差を知ったうえで、上記の系全体としての E を求めようというのがわれわれの問題となる。

さて、 N 個の細胞領域から成る対象領域に、 J, K, L, \dots という観測井があって、それぞれの観測値は、その井戸が存在する細胞領域での水頭を代表すると仮定しよう。いま、構造パラメーターと諸条件にある誤差が含まれたまでシミュレーションを行ったところ、これらの井戸地点で、それぞれ、

$$\frac{1}{2} (\delta h)^2 \cdot g = \varepsilon_j, \varepsilon_k, \varepsilon_l, \dots \quad (40)$$

の誤差があったとする。簡単のため、まず、井戸が3本の場合について考え、このような事柄が同時に起こる事象を ε_{jkl} と記せば、全体としての誤差が E_m の場合に、この事象が起こる同時確率は、式(34)より、

$$p(\varepsilon_{jkl} : E_m) = e^{-\beta(\varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon_l)} / f^3 \dots \dots \dots \quad (41)$$

次に、系全体についての誤差 E が E_m である確率を $p(E_m)$ と記すと、「 $E = E_m$ であって、かつ 3 本の井戸 J, K, L でそれぞれ、 $\varepsilon_j, \varepsilon_k, \varepsilon_l$ の誤差が同時に起こる確率」は $p(\varepsilon_{jkl} : E_m)p(E_m)$ となる。したがって、 E として E_1, E_2, \dots, E_M という M 個の値が考えられるものとすると、「3 本の井戸での誤差が $\varepsilon_j, \varepsilon_k, \varepsilon_l$ であるとの条件のもとで、系全体の誤差が E_m である事後確率は Bayes の定理によって、

$$p(E_m : \varepsilon_{jkl}) = \frac{p(E_m) p(\varepsilon_{jkl} : E_m)}{\sum_i p(E_i) p(\varepsilon_{jkl} : E_i)} \dots \quad (42)$$

となる。

式 (42) には $p(E_i)$ が含まれているが、この量は未知であって、このままでは式 (42) を計算することはできない。しかし、このように事象 E の事前確率について全く無知の場合には、考え得るすべての事象に対して同等の確率を与えるのが合理的であり、公平であろう。すなわち、 E について可能な M 個の状態、 E_1, E_2, \dots, E_M の生起する確率を

とすると、 $p(E_m : \varepsilon_{jkl})$ が求められて、

$$p(E_m : \epsilon_{jkl}) = \frac{p(\epsilon_{jkl} : E_m)}{\sum_i p(\epsilon_{jkl} : E_i)} \dots \dots \dots (44)$$

となる。

上式中の $p(\varepsilon_{kl} : E_i)$ は式 (41) で与えられ、それに
対する $\beta = \beta_i$ は $E = E_i = N\bar{\varepsilon}_i$ に対応する $\bar{\varepsilon}_i$ と、観測値
の ε_0 で式 (39) によって算定される。さらに、式 (44)
では E_m に対する確率で表示されているが、これを誤差
 E_m の平均、すなわち $\bar{E}_m = E_m/N$ に対して記すならば、
式 (44) の E_i をすべて $\bar{\varepsilon}_i$ で置き換えればよいことはい
うまでもない。

なお上では、3本の井戸の場合について記したが、 J_1, J_2, \dots, J_k と k 本の井戸があり、それぞれで $\varepsilon_{J_1}, \varepsilon_{J_2}, \dots, \varepsilon_{J_k}$ の誤差があれば、

$$p(\bar{\varepsilon}_m : \varepsilon_{j_{12\cdots k}}) = \frac{p(\varepsilon_{j_{12\cdots k}}; \bar{\varepsilon}_m)}{\sum_i p(\varepsilon_{j_{12\cdots k}}; \bar{\varepsilon}_i)}$$

$$= \frac{(1 - e^{-\beta_m \varepsilon_0})^k \cdot \exp\left(-\beta_m \sum_s^k \varepsilon_{js}\right)}{\sum_i (1 - e^{-\beta_i \varepsilon_0})^k \cdot \exp\left(-\beta_i \sum_s^k \varepsilon_{js}\right)}$$

となる。ただし、

$$\beta_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \log_e \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_i} \right) \dots \dots \dots \quad (46)$$

である。

以上のようにして、われわれは、「対象領域内のいくつかの観測井での誤差 ε_j を知ったうえで、系全体としての誤差 E あるいは、その平均値 \bar{e} を確率的に評価する指標」に到達した。

7. シミュレーションの誤差の判定

(1) シミュレーションの誤差確率

Fig. 2 は前章の議論に従って、観測井の数が 3 本の場合について式 (45) の確率 $p(\bar{\epsilon} : \epsilon_{jki})$ を計算したものである。この確率は $\bar{\epsilon}$ が M 通りの値 $\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \dots, \bar{\epsilon}_M$ ($= i\epsilon_0, i=1, 2, \dots, M$) しか知らないとしているので、本来離散的な棒グラフとして示すべきものであるが、これを連ねて示してある。また、ここでは $\epsilon_0 = 0.5, 0.25$ としているが、その次元は $[L^4]$ である。式 (40) からもわかるように、 ϵ, ϵ_0 には細胞領域の面積 g が含まれているが、一方 β にも g が関係し、 $\beta\epsilon$ は無次元数である。さらに、ここでは、 $\epsilon_0 = 0.5$ のものについては $M = 100$ 、 $\epsilon_0 = 0.25$ のものについては $M = 200$ とし、そのうち $\bar{\epsilon}$ が 50 までの計算値が示されている^{注2)}。

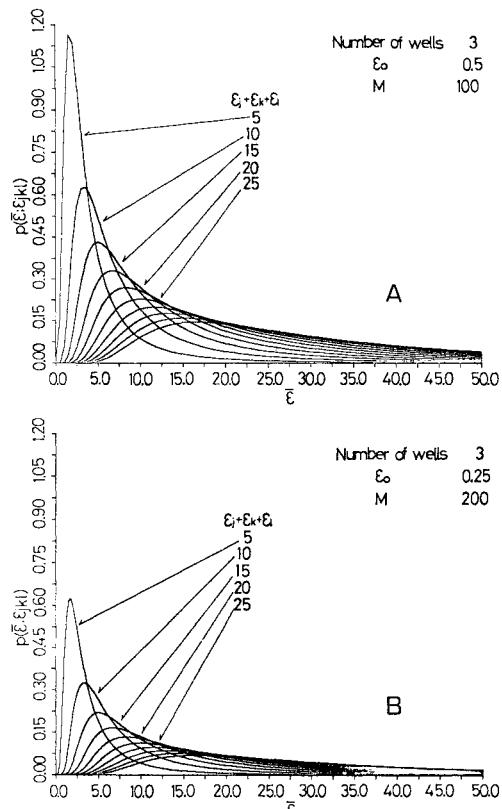


Fig. 2 Probability of Simulated error

注2) M の値はある程度以上大きく選んでおけば、実際上求められる確率の値は、その主要な部分では M の値にかんにかかわらず、ほとんど同じ値となる。

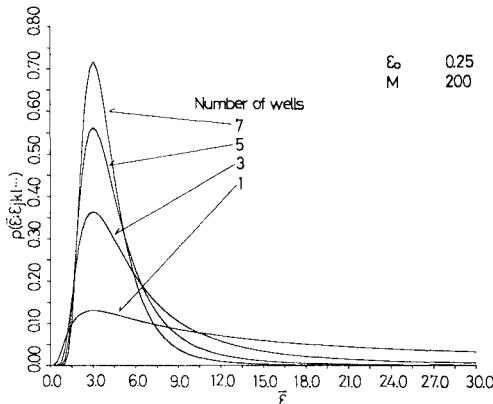


Fig. 3 Probability of Simulated error.

式(45)は $\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l$ が同じであれば、 ϵ_j , ϵ_k , ϵ_l の個々の値にはよらないので、Fig. 2 では $\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l$ の値をパラメーターとして記してある。また、式(45)の確率は統計学の教えるところにより、 ϵ_j , ϵ_k , ϵ_l の平均 $\bar{\epsilon} = (\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l)/3$ で最大値をとることは自明であって、実際 Fig. 2 のピークはこの平均値の点に現われている。

図からわかるように、 $\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l$ の値が小さいときには、分布はシャープなものとなり、シミュレーションの誤差が大体どの程度であるかを判断することができる。これに対して $\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l$ の値が大きくなると、分布はピークが低く、 $\bar{\epsilon}$ の広い範囲に広がって、シミュレーションの誤差が小さいのか、あるいは非常に大きいのかを判断し得なくなることがわかる。

Fig. 2 の A 図 ($\epsilon_0 = 0.5$) と B 図 ($\epsilon_0 = 0.25$) の両者を比較すると、 ϵ_0 の選択の仕方で、確率の値がかなり異なっているようにみられる。しかしこれは、A 図では ϵ が 0.5, 1, 1.5…の値しかとり得ないのでに対し、B 図では ϵ は 0.25, 0.5, 0.75…の値をとり得るために、外見上現われる差違である。たとえば、B 図での $\epsilon = 0.25$ と 0.5, 0.75 と 1, …に対する確率をそれぞれ合計したうえで A 図と比べると、両者の差違はきわめて小さい。

Fig. 3 はシミュレーションをチェックする観測井の本数によって、 $p(\bar{\epsilon} : \epsilon_{jk\ell}\dots)$ がどのように変わるかを示したものである。比較しやすいように、ここでは個々の観測井での誤差がすべて $\epsilon = 3$ の場合について計算しているので、確率のピークは $\bar{\epsilon} = 3$ の位置に現われている。この図から、観測井の数が 1, 3, 5, 7 本と増すに従って確率分布はシャープとなり、シミュレーションの結果の精度をより高い確率で判定し得ることがわかる。

(2) シミュレーションの結果の判定

このような手法によって、ある地域での地下水のシミュレーションを評価するにあたっては、なお重要な問

題が残されている。それは、このような分布から得られた結果によって、そのシミュレーションを「非常によい」と判断するか、「まあまあだ」とするか、あるいは「これではだめだ」と判断するかという問題である。実はこれが一番大切なことなのではあるが、その判断基準は基本的には他に求めるべき性質のものである。すなわち、そのシミュレーションの目的が何であるかということにようろ、言い換えれば、何らかのマスター・プラン的な、大局的な計画の立案のためのものなのか、それとも実際の具体的な工事による地下水流动の変化を詳しく調べるためのものなのか、さらには水頭状態のみを評価するためか、流动量を推定するためのものかなどの違いによってシミュレーションに期待される精度はおのずから異なるはずである。したがって、シミュレーションの結果はそのような期待に添っているかどうかを基準として判断されるべきであろう。

8. まとめ

以上、現在行われている地下水のシミュレーションの結果を評価する方法について考察してきたが、本研究で得られた結論をとりまとめると以下のとおりである。

(1) 地下水の運動方程式を変分表示することによって、構造パラメータや初期・境界条件などに含まれる誤差がシミュレーションの誤差にどのように現われるか、その構造を明らかにした。また、対象領域内部の水頭値の誤差の 2 乗を基礎として同定をする作業は、力学的にはエネルギーの次元で同定していることになることを明らかにした。

(2) 上記の構造を基礎として、いくつかの観測井での計算値と実測値の差を知ったうえで、系全体としてのシミュレーションの誤差を評価する 1 つの指標を、確率論的な立場から導いた。

本研究は、シミュレーションの誤差の評価法としては第 1 段階のものにすぎない。ここに示した評価指標は、シミュレーション結果をある時点で評価するものであつて、誤差の時間的な変動特性までは含まれていない。このような問題点については、今後なお検討を進める予定であり、こうした研究を重ねることによって、今後シミュレーションをする場合に、その目的に応じて、どのような観測網を設置するべきかといった問題にも接近し得るのではないかと考えている。

本研究を遂行するにあたって、昭和 58 年度文部省科学研究費（一般研究 C、代表：高木不折）の補助を受けたことを記し、謝意を表する。

参考文献

- 1) Takagi, F. : A Study on the Behaviour of Basin Water by Means of the Variational Technique, Proceedings of

- JSCE, No. 185, pp. 71~81, 1971.
- 2) 高木不折：流域水の挙動に関する変分原理の物理的意義，土木学会論文報告集，No. 227, pp. 27~32, 1974.
- 3) 高木不折・松林守一郎：流域水の挙動に関する変分原理の実用化とその問題点，土木学会論文報告集，No. 274, pp. 31~40, 1978.
- 4) Neuman, S.P. and Yakowitz, S. : A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, 1. Theory. Water Resour. Res., Vol. 15, No. 4, pp. 845~860, 1979.
- 5) Neuman, S.P., Fogg, G.E. and Jacobson, E.A. : A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, 2. Case study. Water Resour. Res., Vol. 16, No. 1, pp. 33~58, 1980.
- 6) Neuman, S.P. : A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, 3. Improved solution method and added perspective. Water Resour. Res., Vol. 16, No. 2, pp. 331~346, 1980.
- 7) たとえば、ランダウ、リフシツ（小林秋男ほか共訳）：統計物理学（上），岩波書店，1957.

(1984.1.9・受付)