

〔土木学会論文集 第345号／II-1 1984年5月〕

# 一雨降雨の1確率模型

## A PROBABILISTIC MODEL OF RAINFALL OF A SINGLE STORM

江 藤 剛 治\*・室 田 明\*\*

By Takeharu ETOH and Akira MUROTA

A probabilistic model of rainfall of a single storm is presented. Each rainfall event is represented in terms of three characteristic variables, i. e., the duration, the maximum intensity and the total amount. The joint probability density function of the variables and analytical expressions of the moments, including correlation coefficients among the variables, are derived. The validity of the presented model is verified through its application to observed rainfall events. For example, the model predicts that the correlation coefficients between (a) duration and maximum intensity, (b) duration and total amount, and (c) maximum intensity and total amount are 0-0.5, 0.6-0.75, and 0.5-0.8, respectively, which show good agreement with the values calculated from observed data.

## 1. はじめに

内水灾害、土砂災害の発生・非発生、発生したときの被害強度は、ピーク降雨強度のみならず、降雨継続時間、総雨量などの降雨指標とも強い相関があることが知られている。これらの降雨指標の相互関係を表示するための確率モデルを提示する。

一雨降雨を特徴づける降雨指標のみを取り扱う。降水事象の発生過程、一雨降雨内の短時間単位降雨量時系列のような、より大小スケールの降雨量時系列特性については取り扱わない。ただし、提示するモデルには、このモデルと、より大小スケールの降雨量時系列モデルを関連づけるための構造式 パラメーターが入っている。

次の応用例を示す。内水防御施設には、排水型の施設（河川、下水、ポンプなど）と貯留型の施設がある。排水施設と貯留施設の間の、治水機能分担を分析するための基礎的な理論および手順を示す。

## 2. 一雨降雨の確率モデル

### (1) モデルの概要

\* 正会員 工博 近畿大学教授 理工学部土木工学科  
(〒577 東大阪市小若江3-4-1)

\*\* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科  
(〒565 吹田市山田丘2-1)

降雨継続時間  $x$  とピーク雨量  $y$  には弱い相関性がみられる<sup>1)</sup>.  $x$  と  $y$  の平均的な関係として線形回帰を仮定することには無理がある. 降雨継続時間  $x$  の増加に対して、ピーク雨量  $y$  は平均的には増加するが、その増加率は遞減すると仮定する方が自然である. この  $x$  を与えたときの  $y$  の平均的な値を  $\hat{y}$  で表わし、 $\hat{y}$  と  $x$  の関数関係を次式で表わす.

式(1)の関数とは、 $x$ の増加に対して、増加率が遞減するような単調増加関数である。

$y$  を次式で表わす。

ここに、 $E(n) \equiv 1^{(n)}$ 、 $x$  と  $n$  は独立とする

$\zeta(x)$  は、本来一雨降水量内の短時間単位降雨量時系列特性から定まる  $x$  と  $y$  の平均的な関係を表わす構造式である。 $\eta$  は  $y$  のまわりでの  $y$  の分布を表わす。

総雨量  $\bar{z}$  を次式で近似する（図-1 参照）。

ここに、 $\xi(x) \equiv \xi'(x) \cdot r(x)$

## (2) 同時確率密度関数と積率の基礎式

まず降雨継続時間とピーク雨量の同時確率密度関数を

注1) 以後,  $E(\cdot)$ ,  $\text{Prob}(\cdot)$ ,  $F(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$  は,  $(\cdot)$  内の期待値操作, 確率, 確率分布関数, 確率密度関数を意味する.

導く。図-2を参照する。

$$F_s(x, y) = \text{Prob}\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\}$$

$$= \int_0^x \int_0^{y/\xi(x)} f_1(s) \cdot f_2(\eta) d\eta ds \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 $f_1(\cdot)$ ,  $f_2(\cdot)$  はそれぞれ、 $x$ ,  $\eta$  の確率密度関数,  $F_s(x, y)$  は  $x$  と  $y$  の同時確率分布関数<sup>(12)</sup>。

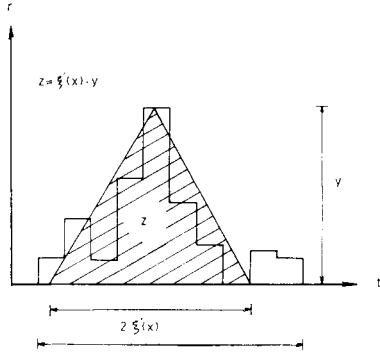


図-1 記号の説明

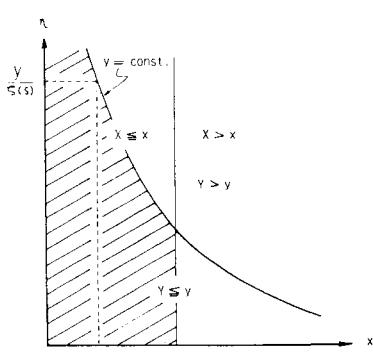


図-2  $x$ ,  $y$  の同時確率分布関数を求める場合の積分範囲

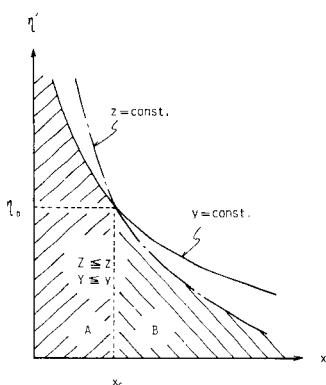


図-3  $y$ ,  $z$  の同時確率分布関数を求める場合の積分範囲

注2) 以後、 $f_i$ ,  $F$  の添字 1, 2, 3, 4 はそれぞれ  $x$ ,  $\eta$ ,  $y$ ,  $z$  の, 5, 6, 7 は  $(x, y)$ ,  $(x, z)$ ,  $(y, z)$  の確率密度関数、分布関数、および添字に対応する関数の母数を指定する。

$$\begin{aligned} f_s(x, y) &= \partial^2 F_s(x, y) / \partial x \partial y \\ &= 1 / \xi(x) \cdot f_1(x) \cdot f_2(y / \xi(x)) \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

同様にして降雨継続時間と総雨量については、

$$f_6(x, z) = 1 / \xi(x) \cdot f_1(x) \cdot f_2(z / \xi(x)) \dots\dots\dots(6)$$

ピーク雨量と総雨量の同時分布関数は複雑な式となる。やや特殊な場合を考える。式(2), (3)で、 $y$ ,  $z$  を一定として、 $x$  と  $\eta$  を変数とみなしたときの  $x$  と  $\eta$  の関数関係が、図-3で示すような関係になる場合を考える。 $x_0$ ,  $\eta_0$  は、 $y$ ,  $z$  を一定と考えて(2), (3)を連立して解いたときの  $x, \eta$  の値である。よって、 $y, z$  の関数である。このとき、

$$\begin{aligned} F_7(y, z) &= \text{Prob}\{(Y \leq y) \cap (Z \leq z)\} \\ &= \int_0^{x_0} \int_0^{y/\xi(x_0)} f_1(x) \cdot f_2(\eta) d\eta dx \\ &\quad + \int_{x_0}^{\infty} \int_0^{z/\xi(x)} f_1(x) \cdot f_2(\eta) d\eta dx \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

$$f_7(y, z) = \frac{\partial^2 F_7(y, z)}{\partial y \partial z} = (A_1 + A_2) - (B_1 + B_2) \dots\dots\dots(7')$$

ここに、

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial x_0}{\partial z} f_1(x_0) \right] \cdot \int_0^{y/\xi(x_0)} f_2(\eta) d\eta$$

$$A_2 = \frac{\partial x_0}{\partial z} f_1(x_0) \cdot \frac{1}{\xi(x_0)} f_2(y / \xi(x_0))$$

$$B_1 = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial x_0}{\partial y} f_1(x_0) \right] \cdot \int_0^{z/\xi(x_0)} f_2(\eta) d\eta$$

$$B_2 = \frac{\partial x_0}{\partial y} f_1(x_0) \cdot \frac{1}{\xi(x_0)} f_2(z / \xi(x_0)) \quad (\text{補遺 1 参照})$$

$x$ ,  $y$ ,  $z$  の同時確率分布関数は、定義  $\text{Prob}\{(X \leq x) \cap (Y \leq y) \cap (Z \leq z)\}$  より、次のようにして導くことができる。

①  $0 < x \leq x_0$  のとき：式(7)右辺第1項で  $x$  に関する積分範囲の上限を  $x$  とし、第2項省略。

②  $x > x_0$  のとき：第2項で積分範囲の上限を  $x$  とする。

原点まわりの  $x$  の  $r$  次,  $y$  の  $s$  次,  $z$  の  $t$  次モーメントを  $\nu(r, s, t)$  で表わす。

$$\begin{aligned} \nu(r, s, t) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^r \cdot y^s \cdot z^t f_1(x) \cdot f_2(\eta) dx d\eta \\ &= \int_0^{\infty} x^r \cdot \xi^s(x) \cdot \xi^t(x) f_1(x) dx \\ &\quad \cdot \int_0^{\infty} \eta^{s+t} f_2(\eta) d\eta \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

(3)  $x$  と  $\eta$  がガンマ分布に従う場合

a)  $x$  と  $z$  の同時分布・ $z$  の周辺分布

具体的な関数形を導くために、 $x$  と  $\eta$  はガンマ分布に従うものと仮定する。ガンマ分布の確率密度関数は、

$$f(s) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} e^{-\beta s} \dots\dots\dots(9)$$

ここに、 $\alpha$ ,  $\beta$  は形状母数、尺度母数 ( $\alpha > 0, \beta > 0$ )。



表-1 積率と相関係数の式 ( $\delta = (1 + \alpha_2)/\alpha_2$ ,  $\alpha_2 = \beta_2$ )

	$x$	$y$	$z$
平均 値	$\alpha_1/\beta_1$	$k_1 \cdot \frac{\Gamma(a+\alpha_1)}{\beta_1^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1)} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2}$	$\left(\frac{1}{2} k_3\right) \cdot \frac{\Gamma(1+a+\alpha_1)}{\beta_1^{1+\alpha_1} \Gamma(\alpha_1)} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2}$
原点まわりの 二次モーメント	$(1+\alpha_1) \alpha_1 / \beta_1^2$	$k_1^2 \cdot \frac{\Gamma(2a+\alpha_1)}{\beta_1^{2\alpha_1} \Gamma(\alpha_1)} \cdot \frac{(1+\alpha_2) \alpha_2}{\beta_2^2}$	$\left(\frac{1}{2} k_3\right)^2 \cdot \frac{\Gamma[2(1+a)+\alpha_1]}{\beta_1^{2(1+\alpha_1)} \Gamma(\alpha_1)} \cdot \frac{(1+\alpha_2) \alpha_2}{\beta_2^2}$
分 散	$\alpha_1/\beta_1^2$	$k_1^2 \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_1^{2\alpha_1} \beta_2^2 \Gamma^2(\alpha_1)}$ $\cdot [\Gamma(\alpha_1) \Gamma(2a+\alpha_1)(1+\alpha_2) - \Gamma^2(a+\alpha_1) \cdot \alpha_2]$	$\left(\frac{1}{2} k_3\right)^2 \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_1^{2(1+\alpha_1)} \beta_2^2 \Gamma^2(\alpha_1)}$ $\cdot [\Gamma(\alpha_1) \Gamma(2(1+a)+\alpha_1)(1+\alpha_2) - \Gamma^2(1+a+\alpha_1) \cdot \alpha_2]$

	$x \sim y$	$x \sim z$	$y \sim z$
共分散	$k_1 \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_1^{1+\alpha_1} \beta_2 \Gamma(\alpha_1)} \cdot a \Gamma(a+\alpha_1)$	$\frac{1}{2} k_3 \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_1^{1+\alpha_1} \beta_2 \Gamma(\alpha_1)} \cdot (a+1) \Gamma(a+\alpha_1+1)$	$k_1 \cdot \left(\frac{1}{2} k_3\right) \frac{\alpha_2}{\beta_1^{1+2\alpha_1} \beta_2^2 \Gamma^2(\alpha_1)} \cdot [\Gamma(\alpha_1) \Gamma(1+2a+\alpha_1)$ $\cdot (1+\alpha_2) - \Gamma(a+\alpha_1) \Gamma(1+a+\alpha_1) \alpha_2]$
相関係数	$\frac{a \Gamma(a+\alpha_1)}{\sqrt{\alpha_1} \sqrt{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(2a+\alpha_1)} \delta - \Gamma^2(a+\alpha_1)}$	$\frac{(a+1) \Gamma(a+\alpha_1+1)}{\sqrt{\alpha_1} \sqrt{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(2(1+a)+\alpha_1)} \delta - \Gamma^2(1+a+\alpha_1)}$	$\frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(1+2a+\alpha_1) \delta - \Gamma(a+\alpha_1) \Gamma(1+a+\alpha_1)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(2a+\alpha_1)} \delta - \Gamma^2(a+\alpha_1)}$ $\cdot \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(2(1+a)+\alpha_1)} \delta - \Gamma^2(1+a+\alpha_1)}$

$$\rho(x, z) = \frac{\text{Cov}(x, z)}{\sqrt{\text{Var}(x)} \sqrt{\text{Var}(z)}} \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

$y, z$  の積率,  $x$  と  $y$ ,  $y$  と  $z$  の相関係数の式も同様にして導くことができる。結果をまとめて表-1 に示す。

$E(\eta)=1$  より,  $\alpha_2=\beta_2$  であることを注意しておく。

#### (4) 実測値との比較

##### a) 実測降雨量資料の特性

端野は台風期の大坂の時間雨量の諸特性を調べた<sup>11)</sup>。降雨群の前後におのおの 4 時間以上の無降雨が続くとき、その間の 1 連の降雨を 1 群のハイエトグラフとし、降雨継続時間 12 時間以上のものについて整理した。1 群のハイエトグラフを規定する要素として、総降雨量、ピーク降雨強度、降雨継続時間の 3 要素を考え、この 3 要素について解析し、検討を加えた。また、1 群のハイエトグラフにおける、降雨時系列の自己相関特性を調べた。

表-2, 図-4, 図-5 はその結果を引用したものである。表-2 は 3 要素の平均値、相互の相関係数を示している。図-4 は降雨継続時間と総降雨量の間の散布図である。図-5 はピーク降雨強度と総降雨量の間の散布図である（以上、文献 1）より引用）。

表-2 実測一雨降雨の平均値と相関係数（端野による<sup>11)</sup>

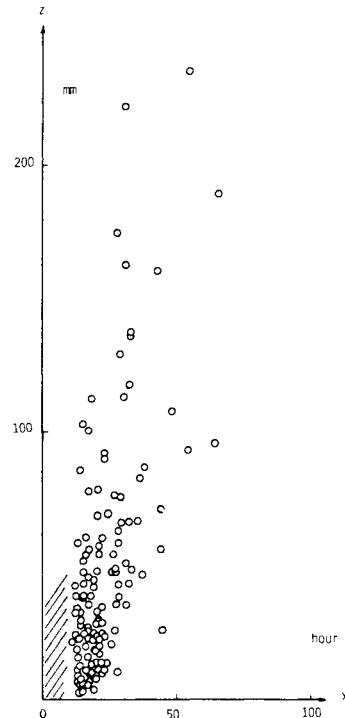
月	平均 値			相 関 係 数			Sample Size
	$x$	$y$	$z$	$x \sim y$	$x \sim z$	$y \sim z$	
6	21.7	9.4	40.2	0.273	0.581	0.789	121 (1941~1970)
7	21.0	10.1	40.9	0.437	0.660	0.660	163 (1900~1965)
8	19.5	9.3	39.2	0.506	0.829	0.742	35 (1926~1965)
9	20.7	7.2	33.4	0.061	0.630	0.509	91 (1926~1965)
10	20.5	5.1	29.3	0.125	0.237	0.814	111 (1926~1965)

$x$ : 降雨継続時間 (h),  $y$ : ピーク雨量 (mm/h),  $z$ : 総雨量 (mm)

表-2 より次のことがわかる。

① 降雨継続時間とピーク雨量の相関係数 ( $x \sim y$  相関) を  $r(x, y)$  と書くと、 $r(x, y)$  は小さく、0~0.5 程度となる。

② 降雨継続時間と総雨量の相関係数  $r(x, z)$  は、0.6 程度である。ただし 8 月はやや高く、10 月はやや低

図-4 降雨継続時間  $x$  と総雨量  $z$  の散布図の例<sup>11)</sup>

(大阪, 7 月, 1900~1965 年,  $x \geq 12$  時間の資料)  
(無降雨継続時間が 4 時間以上の場合、別の一雨降雨とみなす)

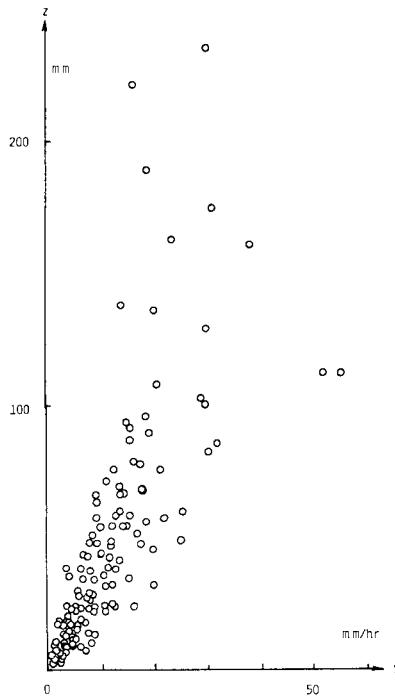


図-5 ピーク雨量  $y$  と総雨量  $z$  の散布図の例<sup>1)</sup>  
(以下図-4と同じ)

い。

③ ピーク雨量と総雨量の相関係数  $r(y, z)$  は、0.5~0.8で、平均0.7程度である。

図-4より次のことがわかる。

④ 降雨継続時間12時間以上の資料のみを抽出しているので、 $x < 12$ について点がない(斜線部)。

⑤ 降雨継続時間が0のとき、総雨量も0である。すなわち、 $x$ と $z$ の平均的な関数関係は $x=z=0$ の原点を通ることを考えれば、 $z \sim x$ の平均的な関数関係は下に凸な曲線となる。すなわち $x$ の増加に対して $z$ の増加率は連増する。

⑥  $x$ の値を固定して $z$ の分布をみると(条件付分布)、 $x$ が大きいとき、 $z$ のばらつきも大きくなる。

⑦ 同じく条件付分布について、 $x$ のある値に対して、 $z$ は、 $z > 0$ の部分にモードをもって分布しているようみえる。

図-5より次のようなことがわかる。

⑧ 上記⑤~⑦と同様の性質が成り立っている。

残念ながら、降雨継続時間とピーカ雨量の関係をプロットしたものは文献1)には示されていない。

端野は、台風性降雨のみを抽出して別途解析を行い、上記①~⑧とはやや異なる性質があることも示している。

b) 提示したモデルの特性と実測値の特性の比較

表-3 相関係数(理論値)

$\alpha_2$	$a$	$\rho(x, y)$			$\rho(x, z)$			$\rho(y, z)$		
		0	1/2	1	0	1/2	1	0	1/2	1
1	0	0.402	0.577		0.577	0.623	0.603	0.577	0.800	0.870
2	0	0.524	0.707		0.707	0.741	0.707	0.5	0.801	0.875
$\infty$	0	0.957	1		1	0.969	0.894	0	0.862	0.894

表-4 形状指数( $\mu^2/\sigma^2$ )(理論値)

$\alpha_2$	$a$	$x$			$y$			$z$		
		0	1/2	1	0	1/2	1	0	1/2	1
1	1	1		1	0.647		1/3	1/3	0.172	1/11
2	1		1	1	1.099		1/2	1/2	0.245	1/8
$\infty$	1			1	3.663		1	1	0.418	1/5

導いた式に数値を代入し、具体的な特性値、分布形状などを、実測資料のもつ諸特性と比較する。

降雨継続時間は指数分布に従うと仮定して大過ない。すなわち、 $\alpha_1=1$ 。 $\eta$ の分布としては、指数分布、あるいは指数分布に近い単峰性分布が考えられる。 $a$ の値が1以上になる可能性は低い。よって $\alpha_2=1, 2, \infty$ ;  $a=0, 1/2, 1$ の9ケースについて計算する。

変動係数の逆数の2乗、すなわち $\mu^2/\sigma^2$ を形状指数とよぶことにする。ガンマ分布の形状は形状母数 $\alpha (= \mu^2/\sigma^2)$ で表わされるから、これと比較するためである。よく知られたように、 $0 < \alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1, \alpha \gg 1$ に対してそれぞれ逆J字形、指数、単峰性、正規分布に従う。

表-1中の各式を用いて形状指数、相関係数を計算したものを作成したものを表-3、表-4に示す。

相関係数について次のことがわかる。

①  $0 < a < 1/2$ では、 $\alpha_2=1$ あるいは2に対して、 $\rho(x, y)=0 \sim 0.5$ ,  $\rho(x, z)=0.6 \sim 0.7$ ,  $\rho(y, z)=0.5 \sim 0.8$ 。これは前項①, ②, ③で述べた実測値のもつ特性と、ほぼ完全に一致している。

②  $a > 1/2$ ,  $\alpha_2$ の大きな値に対しては、相関係数は過大な値を取る。ただし $a=0$ で $\alpha_2$ が大きいときの $\rho(y, z)$ は過小な値となる。

③  $x$ と $y$ が独立( $a=0$ )であっても、 $x$ と $z$ ,  $y$ と $z$ の間にはかなり高い相関性がある。

形状指数について次のことがわかる。

④  $0 < a < 1/2$ に対して、 $y$ はおおむね指数分布的( $\mu^2/\sigma^2 \approx 1$ )となる。

⑤  $\alpha_2$ が小さいとき( $\alpha_2=1$ ),  $z$ は非常にひずみの大きい逆J字形分布に従う( $\mu^2/\sigma^2=0.2 \sim 0.5 \ll 1$ )。 $x$ と $z$ が独立かつ指數分布に従うときは( $a=0$ ,  $\alpha_1=\alpha_2=1$ ),  $z$ の形状指数は $1/3$ である。

残念ながら $y, z$ の周辺分布についてわかっているの

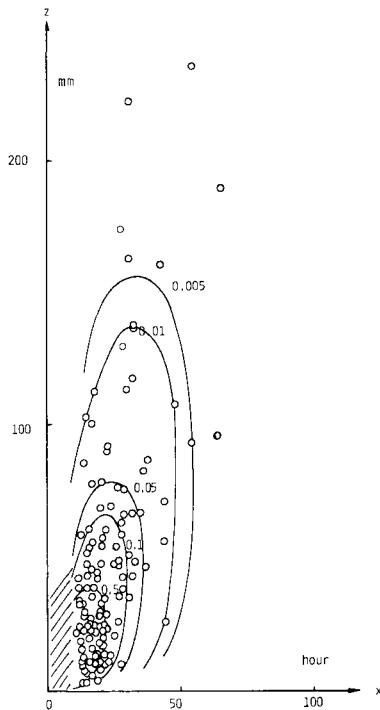


図-6  $x, z$  の同時確率密度関数（式(14)）の等高線の例  
(単位:  $(\times c \times 10^{-3})$ , 条件:  $a=1/4$ ,  $\alpha_1=1$ ,  $\beta_1=1/10$ ,  
 $\alpha_2=\beta_2=2$ ,  $k_3=1.6$ )

は平均値のみである（表-1）。よって  $y, z$  の周辺分布については、実測値の特性と、上記④, ⑤の特性を比較することはできない。

以上総合して次のことがわかる。

⑥  $a$  を、0 と  $1/2$  の中間的な値、 $\alpha_2$  を2程度にすれば、提示した確率モデルは、実測値の分布・相関特性を非常によく再現する。

手元に適当な実測降雨資料がない。また図-4中の点は、 $x \geq 12$  に対して抽出した資料であるから、この資料を用いて、式(14)中の各母数を正確に定めることは難しい。よって各母数に大阪の雨として常識的と考えられる値を代入して式(14)を計算し、その概形を示した（図-6）。図-6は図-4の特徴をよく再現しているようにみえる。

その他、補遺2参照。

##### (5) 検討課題

本論文では(1)の構造式として式(10)を仮定した。また総雨量と降雨継続時間、ピーク雨量の間に(11)の関係式が成り立っているものと仮定した。式(1)は本来、短時間単位の降雨量時系列特性と、一雨規模の降雨特性を結びつける基本的関係式である。したがって、短時間単位の降雨量時系列の確率模型から(1)の関係式を導き、これに基づいて以下の理論展開を行うべきである。

これにより、短時間単位降雨量時系列モデルと、一雨規模の降雨の確率モデルの整合性が保たれることになる。式(1)のこのような役割を考えて、本論文では式(1),あるいは式(1)～(3)を構造式とよんでいる。

式(1)～(3), あるいは式(10)の式形によっては、統いて導かれる各式の式形は異なるものになることはいうまでもない。しかし本論文で示した解析の大筋は変わることはない。この場合でも式(1)～(8)は、以後の解析の基礎式となる。

$x, \eta$  の分布としてガンマ分布を仮定すると、理論式中に、 $a, k_1, k_3, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  の7個の母数が現われる。 $E(\eta) = 1$  であるから  $\alpha_2 = \beta_2$ 、よって独立なものは6個である。実用的な母数推定法の開発も今後の課題である。

### 3. 排水施設と貯留施設の機能分担の理論

#### (1) 目的

水路、排水ポンプ等、排水施設のみにより内水を制御するすれば、ピーク流量が排水（施設）の容量を超える確率がある許容水準以下となるように排水施設の容量を決定する。この場合、排水容量はピーク流量の確率評価に基づいて決定する。

ダム・遊水地等、貯留施設のみが存在し、排水施設が全くない場合には、総流量をすべて、貯留施設で貯えることができれば内水災害は生じない。すなわち、総流量が貯留容量を超える確率がある許容水準以下となるように貯留施設の容量を決定すべきである。この場合、貯留容量は総流量の確率評価に基づいて決定される。

実際には、排水施設と貯留施設を併用するので、ピーク流量と総流量の同時分布に基づいて治水安全度の評価、および排水・貯留施設の容量を決定すべきである。このような目的に対して、前章で示した一雨降雨の確率模型を有効に利用し得ることは明らかである。

以下では、一雨降雨の確率模型の工学的応用の一例として、単一の排水施設と単一の貯留施設をもつ治水システムについて、安全度評価・施設容量決定のための基本的な考え方を示す。

内水が問題になるような流域では、降雨継続時間、湛水継続時間の和  $\tau$  に比べて、到達時間は十分短い。よって解析の時間単位  $\Delta\tau$  は、 $\tau$  より1桁小さく取ればよい。またこの程度の時間単位に対しては、降雨波形と流量波形の相似性はかなり高いと考えてよかろう。以下雨量を対象として解析を行うが、上述の理由により、得られる基本的な特性は、流量を対象とする解析に対しても十分な適用性があるものと考えられる。

#### (2) 等危険度線の方程式

排水施設の容量（ $m^3/s$  単位）を  $y_0$  とする。貯留施設の容量（ $m^3$  単位）を  $z_0$  とする。洪水被害の発生頻度  $\epsilon$



$$Y_0 = y_0/k_1$$

(33) の左辺を  $G(Y_0, Z_0)$  とおけば、 $G(Y_0, Z_0) = \varepsilon/\lambda$  が無次元化された等危険度線の方程式となる。

$u = \eta - Y_0$  において、 $Y_0$  で微分すると、

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \exp[-(u+Y_0)+(u+Y_0)Z_0/u^2] \\ & \cdot (u+Y_0)/u^2 \cdot du \cdot dZ_0/dY_0 \\ & + \int_0^\infty \exp[-(u+Y_0)+(u+Y_0)Z_0/u^2] \\ & \cdot (1+Z_0/u^2)du = 0 \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

$Z_0 = 0$  のとき、

$$dZ_0/dY_0 = -e^{-Y_{00}} / \int_0^\infty e^{-(u+Y_{00})} \cdot \frac{u+Y_{00}}{u^2} du = 0 \dots \dots \dots (35)$$

$Y_0 = 0$  のとき、

$$\begin{aligned} dZ_0/dY_0 &= -2 \int_0^\infty \frac{Z_{00}}{u^2} \cdot e^{-(u+Z_{00})/u} \cdot du \\ &= -s K_1(s)/K_0(s) < 0 \dots \dots \dots (36) \end{aligned}$$

ここに、 $s = 2\sqrt{Z_{00}}$ ,  $K_\nu(s)$  は式 (17) で表わされる。

すなわち、等危険度線の方程式は、 $(Y_{00}, 0)$  で  $Y_0$  軸に接し、 $(0, Z_{00})$  で  $Z_0$  軸と負の勾配で交わる。

以上より式 (33) を導くための前提条件が成り立つならば、等危険度線の概形は図-9 で示す形状となる。

$a, \alpha_1, \alpha_2$  の種々の値に対して、式 (30) の理論解析あるいは数値計算を行うことにより、一定量放流に対する等危険度線の方程式の一般的な性質を知ることができる（補遺 2 参照）。

#### (4) 等危険度線の方程式の応用

降雨継続時間  $x$  とピーク雨量  $y$  の独立性、指數分布の仮定はあまり無理のない仮定なので、以後は式 (33) ~ (36)、あるいは図-9 で示した等危険度線の方程式の性質が成り立つものとして議論を進める。

これらの性質を満たすもっとも単純な近似関数は、

$$\frac{Z_0}{Z_{00}} = \left( \frac{Y_{00} - Y_0}{Y_{00}} \right)^s,$$

$$\text{あるいは } \frac{Z_0}{Z_{00}} = \left( \frac{y_{00} - y_0}{y_{00}} \right)^s, \quad (s > 1) \dots \dots \dots (37)$$

前述のとおり、 $y_{00}, Z_{00}$  はピーク雨量、総雨量の確率分布を別々に評価することにより容易に求まる。よって指數  $s$  がどの程度の値になるかわかつておれば、式 (37) により等危険度線の方程式をきわめて簡便に推定することができる（補遺 2 参照）。

排水施設と貯留施設の容量の、種々の組合せに対して費用を計算する。これを  $(y_0, z_0)$  面上にプロットし等コスト線を描く、等危険度線と等コスト線の接点を結んでいけば、これが種々の危険度に対する、排水施設と貯

留施設の間の最適機能分担を表わす曲線になっているはずである。

#### 4. 結語

一雨降雨の確率モデルを提示した。このモデルを応用して、排水施設・貯留施設を併用した内水防御計画に関する基礎的検討を行った。具体的に次のような研究成果が得られた。

① 一雨降雨の、降雨継続時間・ピーク雨量・総雨量の関係を記述する確率模型を提示した。

② このモデルにより、実際の一雨降雨の分布・相関構造を非常によく表現することができることを確かめた。

③ 総雨量の確率分布として、平方根K分布 (SQRT-K 分布) を提案した。

④ 一定の安全度を保つに必要な、排水施設の容量と貯留施設の容量の組合せを示す曲線の方程式を示した。これを等危険度線の方程式と名付けた。

⑤ 提示した一雨降雨の確率モデルを応用して、ピーク雨量と総雨量の同時分布を考慮し、かつて簡便に等危険度線の方程式を求めるための理論と手順を示した。

謝 辞：徳島大学工学部 端野道夫助教授より貴重な資料と助言を頂いた。記して謝意を表する。

#### 補遺 1

$$\begin{aligned} F_7(y, z) &= \int_0^{x_0} \int_0^{y/\sqrt{s}x} f_1(x) \cdot f_2(\eta) d\eta dx \\ &+ \int_{x_0}^\infty \int_0^{z/\sqrt{s}x} f_1(x) \cdot f_2(\eta) d\eta dx \dots \dots \dots (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_7(y, z) &= \frac{\partial^2 F_7(y, z)}{\partial y \partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{x_0} \int_0^{y/\sqrt{s}x} f_1(x) \cdot f_2(\eta) d\eta dx \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^\infty \int_0^{z/\sqrt{s}x} f_1(x) \cdot f_2(\eta) d\eta dx \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial x_0}{\partial z} \cdot \int_0^{y/\sqrt{s}x_0} f_1(x_0) \cdot f_2(\eta) d\eta \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\frac{\partial x_0}{\partial y} \int_0^{z/\sqrt{s}x_0} f_1(x_0) \cdot f_2(\eta) d\eta \right\} \dots \dots \dots (39) \end{aligned}$$

$f_1(x_0)$  に  $\eta$  は含まれていないから、積分記号の外に出す。これを偏微分すれば式 (7') となる。

#### 補遺 2

本論文を提出後、本論文で示した理論式の数値計算、実測値へのあてはめなどを行った。その結果すでに次のような性質がわかっている<sup>5)</sup>。

①  $a \approx 0.5$ . すなわちピーク雨量は平均的には降雨継続時間の平方根に比例する。

② 降雨波形については、 $\alpha_1 \geq 1$ ,  $\alpha_2 \approx 1$ . すなわち継続時間は指数分布よりやや右にひずんだ分布に従い、そのまわりでのばらつき成分  $\eta$  は指数分布に従う。

③ 等危険度線の近似式の指數  $s$  は、ピーク雨量と継続時間が独立に指数分布に従うときは  $s \approx 3$ , 完全従属のときは  $s=2$  となる（理論的に）、 $s=2$  が安全側。

④ 実測降雨に対する適用例では、 $s=1.6 \sim 2.7$  となった。

### 補遺 3

実際にはあまり小さな降雨を考慮することは無意味であるから、ピーク雨量が  $y_B$  以上の一雨降雨のみを対象として解析する方がよい。

$y_B$  は一雨降雨の数が過少とならないことなどを考慮して定める。

### 補遺 4

「一雨降雨」は定着した水文学用語ではない。定義の

例を文献 6 ) に示す。英語では a (single) rain storm などの表現がみられる<sup>3)</sup>

### 参 考 文 献

- 1) 端野道夫：降雨のシミュレーション，未発表。
- 2) 森口繁一・宇田川鉢久・一松 信：数学公式Ⅲ(第9刷)，岩波全書, pp.187, 193, 1970.
- 3) Waymire, E. and V.K. Gupta : The mathematical structure of rainfall representations, 1. A review of the stochastic rainfall models, WRR, Vol.17, No.5, pp.1261~1272, Oct., 1981.
- 4) Eagleson, P. : Climate, soil, and vegetation, 2. The distribution of annual precipitation derived from observed storm sequences, WRR, Vol.14, No.5, pp. 713~721, 1978.
- 5) 江藤剛治・室田 明・柳本速雄：貯留施設と排水施設を併用した高水計画の安全性，第 28 回水理講演会論文集, pp. 359~367, 1984.
- 6) 江藤剛治・西村克己：MPP モデルによる日降水量時系列の解析, 土木学会論文報告集, 第 342 号, pp. 171~178, 1984, 2.

(1983. 8. 30・受付)