

小松定夫 共著 “定常不規則変動外力を受ける構造物の初通過
中山隆弘 共著 “破壊確率の高精度評価について” への討議

(土木学会論文報告集 332 号・1983 年 4 月掲載)

▶ 討議者 (Discussion)

藤野 陽三・佐藤 尚次 (東京大学)

By Yozo Fujino and Naotsugu Sato

ランダムな強度を有する構造物が定常不規則外力を受ける際の信頼性 (=1-破壊確率) 問題を対象とする本論文の主要な結論は時間 $[0, t_d]$ 間の破壊確率が途中の時刻において構造物が破壊しなかったという条件を考慮することにより高精度評価できる点にあると思われま。なお、同一著者による論文報告集 No. 332 「静的荷重と定常不規則変動荷重を同時に受ける構造物の初通過破壊確率について」も上記の成果の上に立って議論が行われています。討議者は、論文中で展開されている基本的な考え方に対し疑問をもちましたので討議する次第です。

本論文で著者らが用いている仮定は

- ① 構造物の強度 S はランダムで、その確率特性は既知とする。なお強度 S の外力による劣化はない。
- ② 外力 (に対する 構造物の応答) $x(t)$ は定常不規則過程でその確率特性は既知とする。
- ③ 強度 S と外力 $x(t)$ は統計的に独立とする。
- ④ 外力 $x(t)$ が強度 S を上回ったときに構造物は破壊する。

であり、これらの仮定のもとで著者は、外力 $x(t)$ が構造物に t_d 時間作用した際の破壊確率の評価を検討しております。

強度 S の確率密度関数を $f_S(s)$ とし、外力 $x(t)$ の $[0, t_d]$ 間での最大値 $x_{\max}_{0 < t < t_d}$ の確率分布関数を $F_{x_{\max}_{0 < t < t_d}}(x)$ とするなら、 $[0, t_d]$ 間での破壊確率 $p_f(t_d)$ は次のようにして求まると討議者は考えております。

強度 S が x と $x+dx$ の間にあるとし、そのとき外力 $x(t)$ が $[0, t_d]$ 間で強度値 x を超える確率は $1 - F_{x_{\max}_{0 < t < t_d}}(x)$ です。ところで強度 S が x と $x+dx$ の間の値をとる確率は $f_S(x)dx$ で、また強度 S と外力の最大値 $x_{\max}_{0 < t < t_d}$ とは統計的に独立ですから、構造物の $[0, t_d]$ 間における破壊確率 $p_f(t_d)$ は強度 S の不確定性を考慮して、

$$p_f(t_d) = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) \{1 - F_{x_{\max}_{0 < t < t_d}}(x)\} dx \\ = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F_{x_{\max}_{0 < t < t_d}}(x) dx \dots\dots\dots (32)$$

のように表わすことができます。討議者は、式 (32) を厳密式と考えております。1つのアナロジーとして構造物の供用期間 (t_d に当たる) における最大荷重 W の確率分布関数を $F_W(x)$ とすれば、ここでいう $x_{\max}_{0 < t < t_d}$ は W に対応するものですから、式 (32) の $F_{x_{\max}_{0 < t < t_d}}(x)$ を $F_W(x)$ に置き換えることにより

$$p_f(t_d) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F_W(x) dx \dots\dots\dots (33)$$

となり、これはいわゆる構造信頼性理論で用いられる破壊確率の定義に一致するものです。

著者らは外力 (応答) の最大値分布を用いた式 (32) は厳密式ではなく、それよりも高精度の破壊確率があることを論文中で論じております。

もちろん、定常不規則過程 $x(t)$ の最大値分布 $F_{x_{\max}_{0 < t < t_d}}(x)$ は一般には厳密解が得られず、著者が用いているような近似式で代用せざるを得ないのが現状です。したがって $F_{x_{\max}_{0 < t < t_d}}(x)$ の近似式を式 (32) に代入して求まる $p_f(t_d)$ が近似値であることに對しては納得できます。しかし、本論文における著者のねらいは $F_{x_{\max}_{0 < t < t_d}}(x)$ そのものの高精度評価ではなく、式 (32) に代わる $p_f(t_d)$ の高精度評価式にあるわけですから、仮定 ①~④ のもとで式 (32) を導くにあたってどこに近似が入っているのでしょうか。

著者は、「構造物が途中の時刻 t までに破壊しなかったという非破壊条件によって構造物の強度 S の分布が時々刻々更新される」、「この非破壊条件によって生ずる更新分布を用いる」ことにより高精度の破壊確率が評価できるという考えのもとに理論展開、数値計算を行っております。ここで著者の考え (レベル II) に従って破壊

確率を評価してみたいと思います。ここでは外力として図-10に示す離散化過程を考えることにします。この方がわかりやすいからで、議論の一般性を失うものではありません。[0, t_d] 間で n 回外力が作用するとし、個々の外力 {X₁, ..., X_n} は互いに独立かつ同一の分布に従うものとし、その確率分布関数を F_X(x) とします。

1 回目の外力 X₁ を受けたときの構造物の信頼性 R_{e1}, 破壊確率 P_{f1} は明らかに

$$R_{e1} = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F_X(x) dx, P_{f1} = 1 - R_{e1} \dots (34)$$

となります。1 回目に構造物が破壊しなかったとすれば強度 S の分布は更新されて (式 (9) に対応)

$$f_{S|1 \text{ 回目荷重で破壊せず}}(s) \equiv f_{S|survival, 1}(s) = \frac{f_S(s) F_X(s)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F_X(x) dx} \dots (35)$$

となります。2 回目の外力に対する信頼性 R_{e2} は、

$$R_{e2} = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x|survival, 1) F_X(x) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F^2_X(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F_X(x) dx} \dots (36)$$

さらに、max{X₁, X₂} の確率分布関数が F²_X(x) になることを考慮すれば式 (9) から

$$f_{S|survival, 2}(s) = \frac{f_S(s) F^2_X(s)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F^2_X(x) dx} \dots (37 \cdot a)$$

が得られ、これはまた

$$f_{S|survival, 2}(s) = \frac{f_{S|survival, 1}(s) F_X(s)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{S|survival, 1}(x) F_X(x) dx} \dots (37 \cdot b)$$

とも書けます。これはベジアン更新分布として知られるものです。以下同様の考察を繰り返すことにより、n 回目までの外力で構造物が破壊しなかったときの S の分布は、

$$f_{S|survival, n}(s) = \frac{f_S(s) F^n_X(s)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F^n_X(x) dx} \dots (38)$$

n 回目の外力に対する R_{en} は

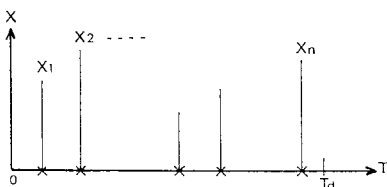


図-10 離散化過程

$$R_{en} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F^n_X(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F^{n-1}_X(x) dx} \dots (39)$$

となるのがわかります。

構造物が n 回の独立な外力を受けて破壊しないためには、各回で破壊しないという条件を合わせて、

$$R_e(t_d) = R_{e1} \cdot R_{e2} \cdot \dots \cdot R_{en-1} \cdot R_{en} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) f_X(x) dx \right\} \cdot \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F^2_X(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F_X(x) dx} \right\} \dots \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F^n_X(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F^{n-1}_X(x) dx} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F^n_X(x) dx \dots (40)$$

となり、これが [0, t_d] 間における信憑性を与えます。ところで、外力 {X₁, ..., X_n} の最大値の確率分布関数は Fⁿ_X(x) ですから、式 (40) から得られる破壊確率は、結局のところ式 (32) において与えたものと一致することになります。つまり、途中のステップでの強度 S の更新分布を考えたところで、最終的に評価される破壊確率は同一の値が得られるということであります。

ここでは便宜的に [0, t_d] 間での外力の作用回数 n を固定して考えましたが、n を確率変数と考えても同じことがいえます。仮に外力の発生が発生率 (occurrence rate) ν に従う定常ポアソン過程であるとします。このとき式 (40) から得られる破壊確率ならびに全確率の定理を用いて

$$p_f(t_d)_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu t_d)^n}{n!} e^{-\nu t_d} \cdot \left\{ 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F^n_X(x) dx \right\} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) e^{-\nu t_d (1 - F_X(x))} dx \dots (41)$$

とすればレベル II の方法による破壊確率が得られます。

一方、レベル I の方法によれば、[0, t_d] 間での外力の最大値 $X_{\max}_{0 < t < t_d}$ の分布 $F_{X_{\max}_{0 < t < t_d}}(x)$ は

$$F_{X_{\max}_{0 < t < t_d}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu t_d)^n}{n!} e^{-\nu t_d} \cdot F^n_X(x) = e^{-\nu t_d (1 - F_X(x))} dx \dots (42)$$

となりますから

$$p_f(t_d)_I = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) e^{-\nu t_d (1 - F_X(x))} dx \dots (43)$$

となり p_f(t_d)_I と p_f(t_d)_{II} は一致しております。著者は外力として定常確率過程を想定しておりますが、レベル超過確率は式 (2)~(4) にあるように応答過程、包絡線過程による方法ともレベルクロッシングをポアソン過程としてとらえておりますので、上に示した結論が論

文中の対象問題にそのまま適用し得ます。よって著者のいうレベルⅠとレベルⅡの方法の間には本質的な差は全くなく、破壊確率も全く同一の値となるはずであると考えられますがいかがでしょうか。

別な見方をしますと、 $t < 0$ の時刻において $[0, t_d]$ 間での破壊確率を評価しようとするなら、そのときもっている情報は f_S, F_X, f_N (発生回数の密度関数)に限られております。強度 S は外力により劣化が生じないという仮定に従う以上、時々刻々のプロセスを考えてみても、そのプロセス自体がすべて f_S, F_X, F_N に支配されていて、これら以外の情報による更新は起こり得ないわけですから、同一の結果を与えることは当然のことと思われまます。

それでは著者がレベルⅠとレベルⅡによる方法で異なる破壊確率の値を得たのはなぜか、ということが問題になりますが、これについて討議者は次のように考えております。

著者は定常確率過程 $x(t)$ のレベル超過確率の近似解として単位時間当たりの強度超過率 ν を用いた指数分布を採用しております(式(2)~(4))。一見するとこれらの式の右辺は S の関数のような印象を受けます。この S を S で置き換えてみれば $P_S(t_d)$ は $[0, t_d]$ 間で外力 $x(t)$ があるレベル S を越えることのない確率を与え、これは同時に $[0, t_d]$ 間での外力の最大値の確率分布関数にほかなりません。よってこれに $f_S(S)$ を掛けて積分すれば、これは式(32)の、レベルⅡと一致する解を得ることができます。

▶回答者 (Closure)———小

本文を詳細に検討され、討議まで頂いたことに対してまずお礼を申し上げます。討議者の論点は、1) 構造信頼性を算定する場合、応答の最大値分布を利用する方法とレベルⅡの方法は本質的に同一であり、したがってレベルⅡの方法が高精度の解を与える方法であるとはいえない。2) レベルⅠの評価法は誤りである。との2点に要約されると思われるので、以下順次回答させて頂く。

振動継続時間内における構造物あるいは構造部材の破壊確率を P_f とすれば、 $P_f = \text{Prob}[S \leq x_{\max}^*]_{0 \leq t \leq t_d}$ がその定義式である。ここに $\text{Prob}[A]$ は事象 A が生起する確率を表わす。したがって討議者の御指摘のとおり、討議文の式(32)は P_f の厳密解を与える。さらに討議者が証明されたように、荷重効果が互いに統計的に独立であれば、確かに荷重効果の最大値の確率分布を利用して、レベルⅡの方法を用いても、得られる構造信頼性の評価値は同一である。これより討議者は、「著者らは外力(応答)の最大値分布を用いた式(32)よりも高精度の破壊確率があることを論文中で論じております」と断

一方著者は式(12)を用いることがレベルⅠの方法であるとしておられます。前記の S に関する積分はこの段階で行っております。討議者のみるところ、式(12)のもつ意味は強度 S がランダムであるということで、それを考慮した平均的強度超過率 $\bar{\nu}$ を、

$$\bar{\nu} = \int_{D_S} \nu(s) f_S(s) ds \dots \dots \dots (44)$$

として求め、これを式(3)または(4)に代入して $[0, t_d]$ 間の破壊確率としているように見受けまます。レベルⅡの方法でも基本的には同じです。先程の例ですと式(43)とせず、

$$P_f(t_d) = 1 - e^{-\nu t_d} \left\{ 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F_X(x) dx \right\} \dots \dots (45)$$

としていることとなります。式(43)と(45)による P_f の値は当然異なったものになります。

強度 S がアンサンブル的に不確定な量で時間軸上では一定値をとるのに対し、外力は時間軸上で不確定量であることを考えれば、式(45)による評価が問題の設定に対応していないことは明らかかと思ひます。つまり、レベルⅠにおける破壊確率の評価式そのものが適正でなかったために、本来同じ値となるべきところが2つの方法によって異なる破壊確率になったのではないのでしょうか。著者は式(12)の前に、「強度が時間に無関係な確率分布で与えられるとき」と述べておられますが、強度が時間に無関係であることと強度の確率分布が時間に無関係であることとの間に混同があるように感じられます。

(1983.5.27・受付)

松 定 夫 (大阪大学)・中山 隆 弘 (広島工大)

定されているが、著者らはそのようには論じていない。論文題目にうたっている「高精度」という語句は、文中に「本研究は著者らの前論文⁷⁾の内容をさらに発展させることを目的に実施された」と述べているように、本論文の方法があくまで前論文の方法、すなわちレベルⅠの方法に比較して、常により精度の高い近似法であることを意図して用いたものであった。なおこの問題に関連し、本文の結論(6)すなわち「振動継続時間中における最大応答の確率分布を用いた静的信頼性解析に基づいて評価する手法は、場合によっては破壊確率を大きく評価する結果を与える」の意味についても、式(10)に示した最大応答の確率分布を用いる場合には、振動性状によっては破壊確率が大きく評価されることがあるという意図であることを併せて御賢察頂ければ幸いである。

従来より不規則変動荷重を受ける構造物の信頼性は、厳密解を求めることが不可能であるがゆえに、出生過程による解法などによって近似的に求められた不規則応答の最大値分布を用いたり、あるいはいわゆるレベル超過

率 (expected crossing rate) に基づいて算定されてきた。本研究ではそのうち、たとえば強度劣化などのように、実質的に強度の時間的変化があっても同一の論理過程によって対応ができるレベル超過率の概念に基づいて定式化を行ったものである。

強度に時間的変化がある問題に対しても有効に応用できることがレベル超過率の概念の長所である。強度が時間的に変化するような問題に対してはレベルⅡの方法によらなければ(場合によってはレベルⅠの方法も良好な近似を与える)、最大値分布の方法では対処できないことを示すために、簡単な計算例を付録A・1に掲げておく。荷重効果が時間的に連続で、強度も時間とともに複雑に変化する問題についても基本的な考え方は同様であり、最大値分布の方法が万能ではないことを特に強調しておく。

次にレベルⅠの方法に対するご討議について回答させて頂く。まず討議者が主張されるとおり、式(45)は著者らが便宜上名づけたレベルⅠの方法を表わすものであるが、式(43)は著者らのいうレベルⅠの方法とは本質的に異なるものである。したがって式(43)と式(45)との比較はあまり意味がないと判断し、ここではレベルⅠの方法は、動的信頼性評価法の1つの実用的近似法であることを主張したい。すなわち論文の図-3(a)あるいは(c)に示した計算例、あるいは本付録A・2の計算結果より、荷重と強度の大きさの相対性、あるいは両者のばらつき程度のいかんによっては、レベルⅠの方法とレベルⅡの方法との実質的差異はあまり認められない。よって適用範囲に十分留意すれば、レベルⅠの方法は計算上簡便な実用的近似法であると考えることができる。

以上で回答とさせて頂くが、最後に著者らの拙論に対し有益な示唆を与えて頂いたことに感謝するとともに、討議者の熱意に敬意を表する次第である。

なお本討議には無関係であるが、論文の式(31)は記載の単純なミスで、正しくは次式のとおりである。読者諸賢に対し、謹んでお詫び申し上げます。

$$P_f^M(t_d) = 1 - \int_0^{\infty} F_{x_{max}}(u) f_S(u) du \dots\dots\dots (31)$$

付録 A・1 強度に時間的変化がある場合の計算例

時刻 t_1 および t_2 において、同じ母集団に属する静的荷重が計2回独立に構造物に作用する状態を想定し、ある構造部材の信頼性をレベルⅡの方法の概念に従って計算してみる。

まず荷重効果の確率分布 $P(x)$ 、部材強度の確率分布 $P(S|t=t_1)$ および $P(S|t=t_2)$ が図-A・1のようにい

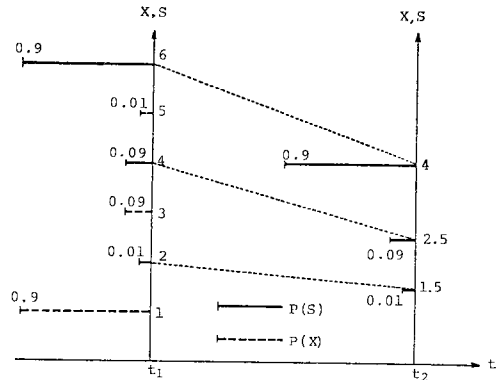


図-A・1 荷重効果と強度の確率分布

ずれも離散的分布として与えられるものと仮定する。また t_1 と t_2 の強度は確率1で同図のように関係づけられているものとする。

最初に時刻 t_1 における荷重効果 $x|_{t=t_1}$ が1であるとす。このとき部材の信頼度は明らかに1である。次に時刻 t_2 における信頼度は、

$$\text{Prob}[S|_{t=t_2} \geq x] = 0.01 \times 0.9 + 0.09 \times 0.9 + 0.9 \times 0.99 = 0.981$$

で与えられる。 $x|_{t=t_1}$ が1である確率が0.9であることを考慮すれば、 $x|_{t=t_1}=1$ なる荷重履歴を経るときの部材の信頼度 $R_{e,A}$ は、

$$R_{e,A} = 0.9 \times 1 \times 0.981 = 0.8829$$

となる。

次に $x|_{t=t_1}=3$ とすれば、時刻 t_1 における信頼度は0.99である。そして $x|_{t=t_1}=3$ の荷重効果に対しても部材が破壊しないときには、 t_2 における強度は4か2.5のいずれかであり、それらの確率分布はそれぞれ、

$$P(x=4|\text{survival}, 1) = 0.9 \times \frac{1}{0.99} = \frac{10}{11}$$

$$P(x=2.5|\text{survival}, 1) = 0.09 \times \frac{1}{0.99} = \frac{1}{11}$$

と更新される。よって時刻 t_2 における信頼度は、

$$\text{Prob}(S|_{t=t_2} \geq x) = \frac{1}{11} \times 0.9 + \frac{10}{11} \times 0.99 = 0.98182$$

となる。 $x|_{t=t_1}=3$ になる確率は0.09であるから、 $x|_{t=t_1}=3$ なる履歴を経るときの部材の信頼度 $R_{e,B}$ は、

$$R_{e,B} = 0.09 \times 0.99 \times 0.98182 = 0.08748$$

となる。さらに $x|_{t=t_1}=5$ の場合にも同様の評価を行えば、 $x|_{t=t_1}=5$ という履歴を経るときの信頼度 $R_{e,C}$ が0.00891と得られる。以上より、 t_1 と t_2 の2時刻に荷重を受ける部材の信頼度 R_e は

$$R_e = R_{e,A} + R_{e,B} + R_{e,C} = 0.9793$$

となり、破壊確率 P_f は、

$$P_f = 1 - R_e = 2.07 \times 10^{-2}$$

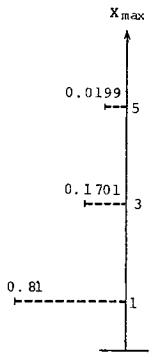


図-A・2
最大荷重効果の
確率分布

となる。

一方荷重効果の最大値 x_{\max} の確率分布は容易に 図-A・2 のように得られるが、この場合 $R_e = \text{Prob}(S \geq x_{\max})$ なる式は S の確率分布が t_1 と t_2 で異なるため、もはや R_e の評価式としては成立しない。

仮に $\tilde{R}_e = \text{Prob}(S|t=t_2 > x_{\max})$, $\tilde{P}_f = 1 - \tilde{R}_e$ としてみれば、

$$\tilde{R}_e = 0.01 \times 0.81 + 0.09 \times 0.81 + 0.9 \times 0.9801 = 0.9631$$

$$\tilde{P}_f = 3.69 \times 10^{-2}$$

となる。ただこのように単純な例ではなく、実際問題の場合に \tilde{R}_e を

R_e の近似値 とするには、強度劣化の性状、あるいは荷重効果や強度のばらつきの大きさの影響など、検討すべ

き問題が非常に多いことはいうまでもない。

付録 A・2 レベル I の方法による計算例

付録 A・1 の問題をレベル I の方法で評価してみよう。

時刻 t_1 における信頼度 $R_{e,1}$ は、

$$R_{e,1} = 0.01 \times 0.9 + 0.09 \times 0.99 + 0.9 \times 1 = 0.9981,$$

時刻 t_2 における信頼度 $R_{e,2}$ は近似的に

$$R_{e,2} = 0.01 \times 0.9 + 0.09 \times 0.9 + 0.9 \times 0.99 = 0.9810$$

である。したがって 2 回の荷重効果に対する信頼度 R_e 、破壊確率 P_f はそれぞれ次のように与えられる。

$$R_e = R_{e,1} \times R_{e,2} = 0.9791$$

$$P_f = 1 - R_e = 2.09 \times 10^{-2}$$

付録 A・1 の結果と、無視できる誤差の範囲内で一致している。

(1983.10.19・受付)