

# 道路橋における活荷重応答の確率論的一算定法

## ANALYSIS OF HIGHWAY BRIDGE RESPONSE TO STOCHASTIC LIVE LOADS

篠塚 正宣\*・松村 駿一郎\*\*・久保 雅邦\*\*\*

By Masanobu SHINOZUKA, Shunichiro MATSUMURA and Masakuni KUBO

The theory of the filtered Poisson process is applied to analyze the response of highway bridges to stochastic live loads. For each lane of the bridge, the live loads are idealized as a train of uniformly moving vehicles for which a statistical data base exists so that the probability distribution functions of the vehicular headways and weights can be established. In particular, the headways are assumed to have exponential distributions. The cumulants, and hence the mean value and variance, of any desired response quantity at any bridge location can then be obtained with the aid of the associated influence lines. On the basis of the cumulants thus obtained, the characteristic function of the response quantity can be constructed and used to obtain the corresponding probability density function by means of the Fast Fourier Transform (FFT) technique. Examples are given for the cases of a simply supported girder bridge and a three-span continuous girder bridge subjected to such stochastic live loads.

### 1. 緒 言

現在、道路橋の設計方法は、現行の許容応力度設計法から荷重係数設計法、あるいは限界状態設計法へ移行しようとしている<sup>1),2)</sup>。その中で、より定量的な道路橋の安全性評価の必要性に対する認識が橋梁技術者の間で高まって来ている<sup>3),4)</sup>。このような情況の背景として、一方では信頼性理論が近年急速に発展し、Codified-Design などに対しては実用化の域に達したこと<sup>5),6)</sup>、また他方、構造物の大型化あるいは多様化に伴ってその経済的、政治的社会的な重要性が顕著に増加したため、より合理的な安全性評価が必要になってきたことが指摘される。

道路橋の安全性評価に基づく合理的な設計基準を規定する上で、少なくとも活荷重の問題については、第一に、自動車荷重の特性を知り、さらに荷重と応答との関係について正確に把握する必要がある。ところが、従来自動

車交通流に関する実験的、理論的研究の多くが交通工学の分野で行われており、その成果を道路橋の応答解析に適用した例は少ない。もとより、自動車交通流の不規則性を説明するうえで各種の確率統計的評価を行う必要があるが、合理的な道路橋の安全性を検討するにあたって、交通工学的視点に加えて道路橋に対する荷重としての不規則性をも考慮した自動車交通流の調査・研究が必要であろう。こうした背景から、阪神高速道路公団ではまず自動車荷重の実態を明らかにすることを目的として過去2回にわたり、阪神高速道路の代表的ないくつかの地点において自動車交通流の走行特性、渋滞特性、および重量特性に関する広範な実態調査を行った。さらに、その調査結果を用いて自動車荷重を表わす各種の確率統計的解析の分析を行い、自動車荷重のモデル化に有用な多量の情報が得られた<sup>7),8)</sup>。

本論文では、これらの実態調査に加えてさらに活荷重応答の実態を求めるために、道路橋の確率論的な応答解析のための一算定法を提案する。

これまで、不規則荷重によるはりの応答を確率論的に解析した研究には、たとえば、高岡・白木・松保の研究<sup>9)</sup>、岡林の研究<sup>10)</sup>等がある。それぞれ、はりに作用する不規則分布荷重の確率特性が与えられた場合、不規則関数の相関理論あるいは共分散方程式を用いて、はりの

\* 正会員 Ph.D. Columbia 大学教授 土木工学工業力学教室 (Columbia Univ. 610, New York, N.Y., 10027, U.S.A.)

\*\* 正会員 阪神高速道路公団 大阪第一建設部次長 (〒559 大阪市住之江区北加賀屋2の11の8)

\*\*\* 正会員 工修 (株)総合技術コンサルタント エンジニアリング部 (〒533 大阪市東淀川区東中島3の5の9)

応答量が解析的に求められることを示したものである。いずれも、自動車交通流がはりの不規則分布荷重にモデル化されていることを前提としており、文献10)でははりの断面力のみならず、変位、たわみ角についての計算式も算出されている。しかし、これらの解法では応答の確率量を求めるために、荷重と構造物について数学的に複雑な計算式を展開する必要がある。そのために、連続ばりのような複雑な形式に対しての適用は示されておらず、また応答の平均値と分散以外の高次の確率量は求められていない。

これに対して、本研究では自動車荷重を不規則集中荷重にモデル化し、数学的に扱い易くまた適用範囲の広い算定法を開発した。この算定法では、自動車交通流としてポアソン荷重列を仮定し、はりの影響線関数を用いて応答量をポアソンパルスの重ね合わせによって求めるものである。数学的に言えば、はりの応答解析に Filtered-Poisson 過程の理論が応用できることを利用して、“Campbellの定理”に基づいて応答の平均値と分散を含めた累積率、さらに特性関数を求める。また、後者をフーリエ変換することによって確率密度関数をも求めることができる。この算定法は着目応答の影響線が与えられるならば、複雑な構造物にも、また多数車線の場合にも容易に適用することができ、解析が容易であるとともに適用範囲の広い方法であると言える。

ところで、ポアソン荷重列を仮定することは、車両配列において車頭間隔が指数分布に従うと考えることに外ならないが、交通流の実態調査によれば指数分布は車頭間隔を正確に代表するものではなく、その第一次近似であることが知られている<sup>11)</sup>。しかし、本研究では、自動車荷重による応答解析を数学的に扱い易い方法で提案することを主旨として指数分布を使用した。また、自動車交通流のモデル化を第一次近似で行うとしても、活荷重応答の確率論的実態を明らかにするための実用的解析手法を提案することに、十分工学的な意義があるものと思われる。さらに、応答量の確率論的評価を得ることによって、道路橋の安全性評価に発展させることが可能となる。しかし、そのためには後述するように、構造物の供用期間中における応答の時間的変動に対する扱いが必要になってくる。本論文では、まず、このような安全性解析を行うための基礎資料を得ることを目的とし、車頭間隔が指数分布則に従う荷重列による活荷重応答の一算定法を提案するものである。

## 2. 自動車交通流のモデル化

### (1) 車両配列モデル

自動車荷重によるはりの応答を求めるにあたって、同一車線上を等速度  $V$  で走行する車両配列を考え、各車

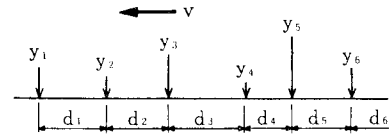


図-1 自動車列モデル

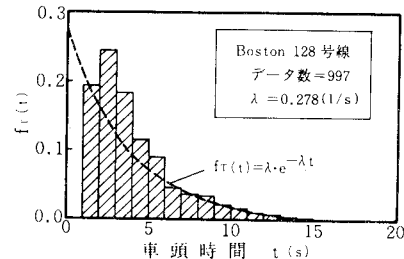


図-2 車頭時間の観測結果(文献11)より)

頭間隔は距離的にも時間的にも指数分布に従うと仮定する。この仮定のもとで図-1のような自動車列を考えると、車頭間隔  $d_1, d_2, \dots$  は時間的に不変で、それらを代表する確率変数を  $D$  とすればその確率分布関数  $F_D(d)$  が次式で与えられる。

$$F_D(d) = 1 - e^{-\lambda d} \quad (d \geq 0, \lambda > 0) \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $d$  は車頭間隔を表わし、係数  $\lambda$  は車線上単位長さあたりの平均台数を表わす。いま、対象とする特定の自動車列について  $\lambda$  は一定とし、その大きさは実態調査に基づいて与えられるものとする。

交通量が比較的少なく、各車両が点とみなされ互いに独立に走行していると考えられる場合には、この仮定が少なくとも近似的に正しいことは広く認められている<sup>11)</sup>。一方、道路橋の安全性にとって問題となるような渋滞時の交通流を考える場合には、各車両が追従して走行する割合が多くなり指数分布の仮定条件に合わなくなる。同じく文献11)には、交通量が増加した場合の車頭間隔の観測結果が与えられている。これによれば、Boston 郊外における夕方の交通量ピーク時の車頭間隔の頻度分布が図-2のようである。同図では車頭時間によって車頭間隔が示されており、図中の点線が観測結果にあてはめた指数分布の確率密度関数を表わすが、この場合には指数分布の仮定が必ずしも最適とは言えない。このように車両配列のモデル化において、あらゆる場合について指数分布の仮定が成立するのではなく、特に渋滞時のモデル化については、文献12)にも指摘されているように、より合理的なモデル化の検討が必要であることは言うまでもない。

しかしながら、前述したように、本論文では車両配列の厳密なモデル化を議論することが主旨ではなく、活荷重応答の実用的な算定法を提案することが第一の目的であるので、車頭間隔が指数分布則に従う場合についての

理論を展開し、計算例を与える。換言すれば、少なくとも第一次近似として指数分布の仮定が成立する場合の荷重列による活荷重応答の算定法を与える。なお、図-2からも類推されるように、同図のような場合に指数分布を用いるとすれば、車頭間隔が非常に小さい場合の発生確率を過大評価することになる<sup>13)</sup>。また、本論文では静的応答のみを算定するが、一般に走行車両により励起される動的効果については、影響線関数に動的倍率を乗ずることによって近似的に考慮することができる。

(2) 荷重特性モデル

図-1において、各車両の重量  $y_1, y_2 \dots$  を確率変数  $Y$  の実現値と考え、その確率分布関数を  $F(y)$  とおく。 $Y$  の分布特性は自動車荷重の実態調査から得られ、調査結果の重量分布そのものを用いることもできるし、あるいは考えている車種の混入に応じてモデル化した分布形を設定することもできる。明らかに、分布関数  $F(y)$  は自動車列に含まれるすべての車両の重量分布を表わす。

ここで、実態調査の結果や文献9)にも指摘されているように、一般に小型車、中型車、大型車等によって各車種の重量分布形状と分布範囲が異なる。分布関数  $F(y)$  はこれらの重量分布を単一の関数によって包絡するものであり、したがって、車種混入率はすでに分布関数の中に反映されており、各車種の混入率に応じた分布特性を示すことになる。たとえば、時間帯に応じて車種混入率が変化するような場合、重量分布形状も微妙に変化する。一般に、乗用車を中心とする小型車の通行車両に占める比率が約60~70%と大きく、重量分布では車両重量が2t未満のものの頻度が非常に高い。

阪神高速道路における調査結果の一部を図-3に示す。それぞれ、朝、昼、夕、夜の代表的な一時間における全通行車両の重量頻度分布である。朝、夕には大型車の混入率が小さく、2t未満の軽量車の頻度が高い。逆に、夜間には大型車混入率が大きくなり、重量車の頻度

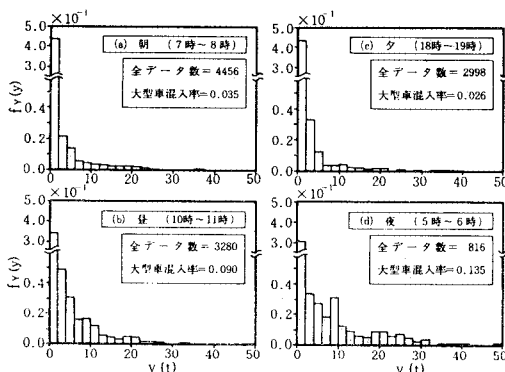


図-3 時間帯別車両重量の調査結果 (文献7)より)

が相対的に高くなっている。本論文の解析例では、これらの重量分布をそのまま使う場合と、これを既存の確率分布関数にモデル化した場合について検討する。

ところで、主桁に対する自動車荷重の効果を考える場合、厳密には車軸重量をとるべきであるが、主桁の支間長が車両長さ比べて十分大きい場合を考えるとすれば、実用的には自動車荷重を集中荷重と考えて十分であろう。たとえば、単純桁について軸重荷重と集中荷重との違いを支間中央点の曲げモーメントで比較すると図-4のようになる。これは、図-5に示すように渋滞時の自動車荷重列を、調査結果に基づく軸重荷重の状態とこれを車両中心の集中荷重に置換した状態とで、それぞれ支間上満載になるように繰り返したシミュレーション結果である。実用的には両者の差は無視できる。

前述のように、重量分布はもとより、さらに車頭間隔の分布も時間とともに変化することはもちろんである。このような時間変化が構造物の応答、したがって、その統計量に影響を与えることは自明のことであるが、本論文ではこのような時間的変動についての考察は今後の研究課題とする。

3. ポアソン荷重列によるはりの応答

(1) 平均値・分散

2. のモデル化によって、一定区間に含まれる車両台数はポアソン分布で表わされることになり、図-1のような荷重列をここではポアソン荷重列と呼ぶことにす

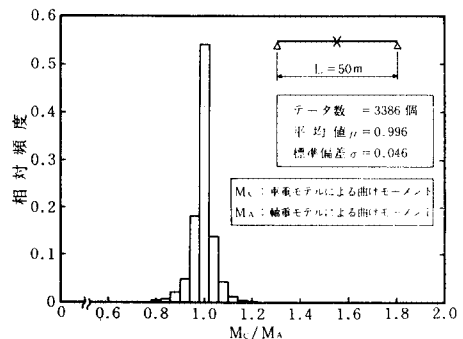


図-4 曲げモーメント比による荷重列モデルの比較

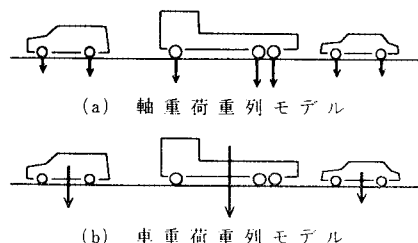


図-5 荷重列モデル

る。したがって、区間  $(0, x]$  に含まれる車両台数を  $N(x)$  とすると、その確率関数  $P_n(n, x)$  は周知のように次式で与えられる。

$$P_n(n, x) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots (2)$$

いま、代表的に図-6 に示す橋長  $L$  の三径間連続はりについて、座標原点をはりの左端におき、任意の点  $x = \xi$  でのポアソン荷重列による曲げモーメント応答に着目する。

$x = \xi$  での曲げモーメントの影響線  $w(\xi; x) = w_\xi(x)$  を用いれば、はりの解析における重ね合わせの原理から、ポアソン荷重列とこの影響線を用いて応答量を求めることができる。曲げモーメントを  $M_\xi$  とすると

$$M_\xi = \sum_{i=1}^{N(L)} Y_i \cdot w_\xi(x_i) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $N(L)$  : 区間  $(0, L]$  に含まれる車両台数を表わし、 $\lambda \cdot L$  を母数とするポアソン分布に従う。  $Y_i$  : 図-6 に示す荷重列の  $i$  番目の車両重量を表わす確率量で、その確率分布関数は  $F_{Y_i}(y) = F_i(y)$  である。  $x_i$  : 同じく、 $i$  番目の車両の  $x$  軸上の位置を示す確率量であり、 $(x_{i+1} - x_i)$  は指数分布に従う確率変数  $D$  となる。  $w_\xi(x_i)$  : 着目点  $x = \xi$  の曲げモーメントの影響線関数で、単位荷重が  $x_i$  に作用した時の  $x = \xi$  における曲げモーメントの大きさを表わす。  $0 \leq x_i \leq L$  で有意義な値を持ち、  $0 \leq x_i \leq L$  以外では  $w_\xi(x_i) = 0$  と考える。

上記の  $w_\xi(x_i)$  の定義に従うと、式 (3) の和を  $i = -\infty \sim +\infty$  に対して書くことができる。

$$M_\xi = \sum_{-\infty}^{+\infty} Y_i \cdot w_\xi(x_i) \dots\dots\dots (4)$$

上述のモデルについて荷重列がエルゴード性を持つと考えると、 $M_\xi$  は荷重列の動きをある任意の時刻に凍結したときの、着目点  $x = \xi$  に生じている曲げモーメントを表わす。したがって、 $M_\xi$  は実は時間の関数でもあって、 $M_\xi(t)$  とも書くことができる。以下に求める  $M_\xi$  の統計量は、 $M_\xi(t)$  の時間による変動の一次元分布についての統計量であると考えることができる。構造物の供用期間中に、応答あるいは応答の絶対値がある閾値を超える確率を求めるといような場合には、 $M_\xi(t)$  と

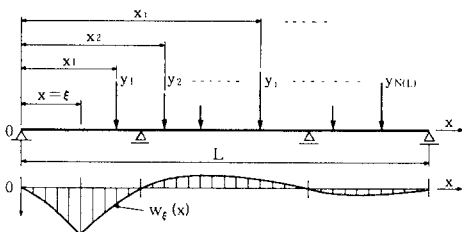


図-6 1車線構造物モデルの例

$dM_\xi(t)/dt$  との二次元分布の確率密度関数が必要になる。この点が、前述した構造物の供用期間中の時間的変動に対する扱いである。

さて、式 (4) について一般化された“Campbellの定理”を用いると、 $M_\xi$  の  $n$  次累積率  $K_n[M_\xi]$  が次式で与えられる<sup>14)</sup>。

$$K_n[M_\xi] = \lambda \cdot E[Y^n] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [w_\xi(x)]^n dx$$

$$= \lambda \cdot a_\xi^n \cdot E[Y^n] \quad (n=1, 2, \dots) \dots\dots (5)$$

$$a_\xi^n = \int_{-\infty}^{\infty} [w_\xi(x)]^n dx \quad (n=1, 2, \dots) \dots\dots (6)$$

ここに、 $E[\cdot]$  は期待値を表わす。式 (5), (6) における  $x$  についての有意義な積分区間は、 $w_\xi(x)$  の定義より  $x=0 \sim L$  である。また、係数  $a_\xi^n$  は確定関数  $w_\xi(x)$  の座標軸まわりの  $n$  次モーメントの積分であり、確定値である。しかも、簡単な単純ばりや片持ちばりの場合のみならず、連続ばりその他任意の構造物についても、影響線関数が与えられるならば容易に  $a_\xi^n$  を求めることができる。ここでは、 $a_\xi^n$  を  $n$  次影響線係数と呼ぶことにする。また、 $E[Y^n]$  は荷重分布の  $n$  次モーメントであり、分布関数  $F_i(y)$  を用いて求めることができる。

確率変数のすべての累積率が得られるならば、理論的にはその確率特性を求めることが可能であり、このことは本論文の算定法が一般に任意の構造物に対して容易に適用できるという大きな利点を示している。

式 (5) において、それぞれ  $n=1$  および 2 とすれば曲げモーメント  $M_\xi$  の平均値  $\mu_\xi$  と分散  $\sigma_\xi^2$  が得られる。

$$\mu_\xi = K_1[M_\xi] = \lambda \cdot a_\xi^1 \cdot E[Y] \dots\dots\dots (7)$$

$$\sigma_\xi^2 = K_2[M_\xi] = \lambda \cdot a_\xi^2 \cdot E[Y^2] \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) から、応答の分散は荷重の原点まわりの 2 次モーメントを用いて与えられることがわかる。

以上の式 (5)~(8) によって、ポアソン荷重列によるはりの応答の確率量を解析的に求めることができる。つまり、活荷重応答の確率特性が累積率の形で解析的に算定されたことになる。

以上の解析を、独立な 2 車線上のポアソン荷重列を受ける場合にも容易に拡張することができる。

図-7 において、A 車線と B 車線の影響を受ける着目点、たとえば G<sub>1</sub> 桁の  $x = \xi$  の点での応答に着目する。

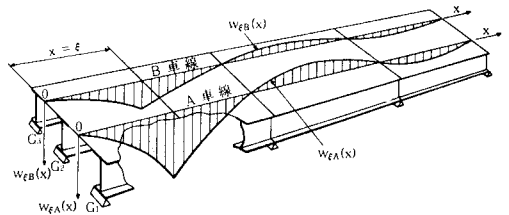


図-7 2車線構造物モデルの例

それぞれの車線上での応答の影響線  $w_A(\xi; x) \equiv w_{\epsilon A}(x)$ , および  $w_B(\xi; x) \equiv w_{\epsilon B}(x)$  が与えられているとする. 式 (3) を拡張して, 着目点  $x = \xi$  の曲げモーメント  $M_\xi$  が次式によって与えられる.

$$M_\xi = \sum_{i=1}^{N_A(L)} Y_{Ai} \cdot w_{\epsilon A}(x_{Ai}) + \sum_{j=1}^{N_B(L)} Y_{Bj} \cdot w_{\epsilon B}(x_{Bj}) \\ = \sum_{i=1}^{N_A(L)} Y_{Ai} \cdot w_{\epsilon A}(x_{Ai}) + \sum_{j=1}^{N_B(L)} Y_{Bj} \cdot w_{\epsilon B}(x_{Bj}) \dots \dots \dots (9)$$

ここに,  $N_A(L)$ ,  $N_B(L)$ : それぞれ, A 車線, B 車線上の区間  $(0, L)$  に含まれる車両台数を表わし, それぞれ,  $\lambda_A \cdot L$ ,  $\lambda_B \cdot L$  を母数とするポアソン分布に従う.  $Y_{Ai}$ ,  $Y_{Bj}$ : それぞれ, A 車線, B 車線上の荷重列の  $i$  番目および  $j$  番目の車両重量を表わす確率量.  $x_{Ai}$ ,  $x_{Bj}$ : 同じく,  $i$  番目と  $j$  番目の車両位置を表わす確率量. それぞれ,  $(x_{A,i-1} - x_{A,i})$ ,  $(x_{B,j-1} - x_{B,j})$  は互いに独立で指数分布に従う.  $\lambda_A$ ,  $\lambda_B$ : それぞれの車線における, 単位長さあたりの平均車両台数.

独立な Filtered-Poisson 過程の和の  $n$  次累積率は, 個々の Filtered-Poisson 過程の  $n$  次累積率の和として与えられることから<sup>15)</sup>, 式 (9) で表わされる  $M_\xi$  の  $n$  次累積率を新たに  $K_n[M_\xi]$  とすれば次式で与えられる.

$$K_n[M_\xi] = \lambda_A \cdot E[Y_A^n] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [w_{\epsilon A}(x)]^n dx \\ + \lambda_B \cdot E[Y_B^n] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [w_{\epsilon B}(x)]^n dx \\ = \lambda_A \cdot a_{\epsilon A}^n \cdot E[Y_A^n] + \lambda_B \cdot a_{\epsilon B}^n \cdot E[Y_B^n] \dots \dots \dots (10)$$

$$a_{\epsilon A}^n = \int_{-\infty}^{\infty} [w_{\epsilon A}(x)]^n dx \quad (n=1, 2, \dots) \dots \dots (11)$$

$$a_{\epsilon B}^n = \int_{-\infty}^{\infty} [w_{\epsilon B}(x)]^n dx \quad (n=1, 2, \dots) \dots \dots (12)$$

係数  $a_{\epsilon A}^n$ ,  $a_{\epsilon B}^n$  は, それぞれ A 車線, B 車線上の  $n$  次影響線係数である.

したがって, 式 (7), (8) と同様に, 式 (10) においてそれぞれ  $n=1$  および 2 として  $M_\xi$  の平均値  $\mu_\xi$  と分散  $\sigma_\xi^2$  を求めることができる.

$$\mu_\xi = \lambda_A \cdot a_{\epsilon A}^1 \cdot E[Y_A] + \lambda_B \cdot a_{\epsilon B}^1 \cdot E[Y_B] \dots \dots \dots (13)$$

$$\sigma_\xi^2 = \lambda_A \cdot a_{\epsilon A}^2 \cdot E[Y_A^2] + \lambda_B \cdot a_{\epsilon B}^2 \cdot E[Y_B^2] \dots \dots \dots (14)$$

以上の結果から, この算定法を独立な多数車線の場合に容易に拡張できることは明らかである. さらに, このことは, 車線上において単一の指数分布モデルを使うのではなく, 車両配列を独立な複数の指数分布モデルを用いて表わす場合に拡張できることを意味しており, 車両配列のモデル化において複数の指数分布によるより正確な評価への改善が可能なことを示唆している.

ところで, 図-6 と 図-7 を用いた例では主桁の曲げモーメントについて議論したが, 明らかなように着目する応答の影響線が既知であるならば, 曲げモーメントのみならず, せん断力, たわみ, たわみ角等についてもまったく同様に適用することが可能である.

(2) 確率密度関数

曲げモーメント応答  $M_\xi$  を簡単のために  $M$  と書く.  $M$  の確率密度関数  $f_M(x)$  とその特性関数  $\phi_M(\theta)$  とはよく知られたフーリエ変換対の関係にある. すなわち,

$$\phi_M(\theta) = E[e^{i\theta M}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} \cdot f_M(x) dx \dots \dots \dots (15)$$

$$f_M(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_M(\theta) \cdot e^{-i\theta x} d\theta \dots \dots \dots (16)$$

ここに,  $i = \sqrt{-1}$  は虚数単位を表わす.

一方, 対数特性関数  $\ln \phi_M(\theta)$  と  $n$  次の累積率  $K_n[M_\xi]$  との間には次の関係がある<sup>14), 16)</sup>.

$$\ln \phi_M(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \cdot K_n[M_\xi] \dots \dots \dots (17)$$

$$\phi_M(\theta) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \cdot K_n[M_\xi] \right\} \dots \dots \dots (18)$$

いま, 前項で示した算定法により累積率  $K_n[M_\xi]$  が求められており, たとえば, 式 (5) を式 (18) へ代入すれば特性関数を求めることができる.

$$\phi_M(\theta) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \cdot \lambda \cdot E[Y^n] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [w_\epsilon(x)]^n dx \right\} \\ = \exp \left\{ \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \cdot (Y^n \cdot [w_\epsilon(x)]^n - 1) \right] dx \right\} \\ = \exp \left\{ \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E [e^{i\theta Y w_\epsilon(x)} - 1] dx \right\} \dots \dots \dots (19)$$

さらに, 式 (19) を式 (16) へ代入してフーリエ変換を行えば, 応答の確率密度関数を得ることができる. 式 (19) は文献 14) の結果と一致している. また,  $\phi_M(\theta)$  の実数部は  $\theta$  について偶関数であり, 虚数部は奇関数である.

前項で求めた累積率 (平均値と分散を含む) を用いてポアソン荷重列による活荷重応答の確率特性を知ることができるが, 確率密度関数によってより高度の分布特性についての情報を得ることができることは言うまでもない. 特に, 道路橋の安全性を議論する上で確率分布の裾部について知ることが必要であり, この点においても, 本論文の算定法によれば今後の安全性評価に有用な解析を行うことができると言えよう.

独立な 2 車線のポアソン荷重列を受ける場合には, 同様に式 (10) を式 (18) へ代入, 整理することによって特性関数が与えられる. すなわち,

$$\phi_M(\theta) = \exp \left\{ \lambda_A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E [e^{i\theta Y_A \cdot w_{\epsilon A}(x)} - 1] dx \right. \\ \left. + \lambda_B \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E [e^{i\theta Y_B \cdot w_{\epsilon B}(x)} - 1] dx \right\} \dots \dots \dots (20)$$

ところで, 理論的に式 (19) あるいは式 (20) によって特性関数を求め, 式 (16) によって確率密度関数を求めることが可能ではあるが, 一般にこれらの式を解析的に展開することは難しい. 非常に簡単なモデルについては特性関数を解析的に展開することができるが, その場

合でも式(16)のフーリエ変換を解析的に求めることは難しい。したがって、これらの計算を数値計算によって行う必要がある<sup>17)</sup>。本論文の解析例では、簡単なモデルについて特性関数の理論解と数値解とを求めて比較し、さらに図-3に示した実測結果を用いた場合について数値解析を行い考察する。

なお、確率密度関数を表わす実用的な簡易法である次の展開式<sup>14),18)</sup>により、求める確率密度関数  $f_M(x)$  が正規分布からどの程度の偏差を示すか調べることができる。

$$f_M(x) = \frac{1}{\sigma_\xi} g_M(u) \\ = \frac{1}{\sigma_\xi} \varphi^{(0)}(u) - \frac{K_3}{6\sigma_\xi^3} \varphi^{(3)}(u) \\ + \left[ \frac{K_4}{24\sigma_\xi^4} \varphi^{(4)}(u) + \frac{K_3^2}{72\sigma_\xi^6} \varphi^{(6)}(u) \right] + \dots \dots (21)$$

ここに、

$$\varphi^{(n)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n}{du^n} e^{-u^2/2} \dots \dots (22)$$

$$u = \frac{M_\xi - \mu_\xi}{\sigma_\xi} \dots \dots (23)$$

である。また、 $g_M(u)$  は変数  $x = M_\xi$  の規準化変数  $u$  についての確率密度関数であり、 $\varphi^{(0)}(u)$  は規準化正規分布の確率密度関数を表わす。式(21)の第一項は  $\lambda^{-1/2}$  のオーダー、第2項は  $\lambda^{-1}$  のオーダーというように  $\lambda^{-1/2}$  についての  $f_M(x)$  の漸近展開を示すものであり、したがって、 $\lambda \rightarrow \infty$  の場合よく知られているように  $f_M(x)$  は正規分布に漸近する。

(3) 非ポアソン荷重列の場合

車頭間隔が指数分布でない場合のモデルとして、たとえばアーラン分布を使用することが考えられるが、この場合車両到着台数はもはやポアソン分布に従わない<sup>19)</sup>。前述の理論ではポアソン荷重列による活荷重応答の算定法について述べたが、ここで非ポアソン荷重列の場合について次のように考える。

いま、一般的な車頭間隔の確率密度関数を  $p(x)$  とすると、文献14)によれば着目応答  $M_\xi$  の一次モーメント  $E[M_\xi]$  と2次モーメント  $E[M_\xi^2]$  は次式によって求めることができる。

$$E[M_\xi] = \lambda \cdot E[Y] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} w_\xi(x) dx \dots \dots (24)$$

$$E[M_\xi^2] = \lambda \cdot E[Y^2] \cdot \eta(0) + 2\lambda E[Y]^2 \\ \cdot \left[ \int_0^\infty p(x)\eta(x) dx + \int_0^\infty \int_0^\infty p(x_1)p(x_2) \right. \\ \left. \cdot \eta(x_1+x_2) dx_1 dx_2 + \dots \right] \dots \dots (25)$$

ここに、 $\eta(x)$  は次式で定義される。

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_\xi(y) \cdot w_\xi(y-x) dx \dots \dots (26)$$

しかし、この場合高次の累積率や特性関数を解析的に示す式を求めることは今後の課題である。

4. 解析例と考察

単純ばりの曲げモーメント応答——計算例(1)

図-8に示す支間長  $L$  の単純ばりに、指数分布に従う重量特性を持つポアソン荷重列が载荷する場合の支間中央点 ( $\xi = L/2$ ) の曲げモーメントについて求める。

影響線関数  $w_\xi(x)$  は次式で表わされる。

$$w_\xi(x) = \begin{cases} x/2 & : 0 \leq x \leq L/2 \\ (L-x)/2 & : L/2 < x \leq L \\ 0 & : \text{上記以外} \end{cases} \dots \dots (27)$$

したがって、1次と2次の影響線係数は式(6)より、

$$a_\xi^{(1)} = L^2/8, a_\xi^{(2)} = L^3/48 \dots \dots (28)$$

一方、車両重量  $Y$  の確率密度関数を次式で表わす。

$$f_Y(y) = \beta e^{-\beta y} \quad (y \geq 0, \beta > 0) \dots \dots (29)$$

ここに、係数  $\beta$  は  $Y$  の分布のパラメーターである。 $Y$  の1次と2次のモーメントは、

$$E[Y] = 1/\beta, E[Y^2] = 2/\beta^2 \dots \dots (30)$$

式(27)を式(19)へ代入し、 $x$  についての積分を有意義な区間  $x=0 \sim L$  で考え積分の変数変換を行えば、

$$\phi_M(\theta) = \exp \left\{ 4\lambda \int_0^L E[e^{i\theta y x} - 1] dx \right\} \dots \dots (31)$$

となる。式(31)の積分式中の項  $E[e^{i\theta y x} - 1]$  について、 $x$  は確率変数  $Y$  に対して定数と考えられるから、この項は式(29)の指数分布の特性関数を用いて求めることができる。

$$E[e^{i\theta y x} - 1] = \frac{\beta}{\beta - i\theta x} - 1 \dots \dots (32)$$

式(32)を式(31)へ代入し、複素変数の定積分を展開すれば特性関数  $\phi_M(\theta)$  が解析的に誘導される。すなわち、

$$\phi_M(\theta) = \exp \left\{ 4\lambda \int_0^L \left[ \frac{\beta}{\beta - i\theta x} - 1 \right] dx \right\} \\ = \exp \left[ -\lambda L \left[ 1 - \frac{4\beta}{\theta L} \text{Arctan} \left( \frac{\theta L}{4\beta} \right) \right] \right. \\ \left. + i \cdot \frac{2\lambda\beta}{\theta} \cdot \ln \left[ 1 + \left( \frac{\theta L}{4\beta} \right)^2 \right] \right] \dots \dots (33)$$

$\phi_M(\theta)$  の実数部と虚数部を、それぞれ実関数  $R_e(\theta)$ ,

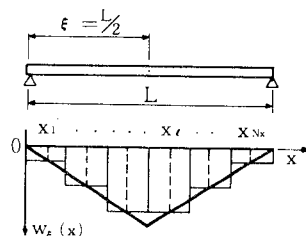


図-8 単純ばりモデル

$Im(\theta)$  とすると、オイラーの公式  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$  より

$$\phi_w(\theta) = R_e(\theta) + i \cdot Im(\theta) \dots\dots\dots (34)$$

$$R_e(\theta) = \exp \left\{ -\lambda L \cdot \left[ 1 - \frac{4\beta}{\theta L} \text{Arctan} \left( \frac{\theta L}{4\beta} \right) \right] \right\} \\ \times \cos \left\{ \frac{2\lambda\beta}{\theta} \cdot \ln \left[ 1 + \left( \frac{\theta L}{4\beta} \right)^2 \right] \right\} \dots\dots\dots (35)$$

$$Im(\theta) = \exp \left\{ -\lambda L \cdot \left[ 1 - \frac{4\beta}{\theta L} \text{Arctan} \left( \frac{\theta L}{4\beta} \right) \right] \right\} \\ \times \sin \left\{ \frac{2\lambda\beta}{\theta} \cdot \ln \left[ 1 + \left( \frac{\theta L}{4\beta} \right)^2 \right] \right\} \dots\dots\dots (36)$$

式 (35), (36) から  $\phi_w(\theta)$  の実数部は  $\theta$  について偶関数であり、虚数部は奇関数であることが容易にわかる。

前述したように、一般には特性関数の算定は数値計算によらねばならないが(計算例(2)参照)、この例題の場合には解析的に求めることができた。ここで、この例題についても数値計算によって特性関数を求め、これを理論値と比較することにより一般に特性関数を数値計算によって求める際の精度について検討する。ここでは、次の区分積法を用いる。

影響線関数の有意義な積分区間  $[0, L]$  を微小幅  $\Delta x$  ごとに  $N_x$  等分割し、各微小幅の中心値を  $x_i (i=1, 2, \dots, N_x)$  とする。図-9に示すように、 $Y$  の分布範囲を近似的に有限範囲と考える。微小幅  $\Delta y$  によって分布範囲を  $N_y$  等分割し、微小幅の中心値を  $y_j (j=1, 2, \dots, N_y)$  とおく。これらの仮定を用いて、任意の  $\theta_k (k=0, 1, 2, \dots)$  について式 (19) の積分と期待値の演算を次式のように級数を用いて展開する。

$$\phi_w(\theta_k) = \exp \left\{ \lambda \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} f_Y(y_j) \cdot [e^{i\theta_k y_j \cdot w_\xi(x_i)} - 1] \Delta y \Delta x \right\} \\ = \exp \left\{ \lambda \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} f_Y(y_j) [\cos(\theta_k \cdot y_j \cdot w_\xi(x_i)) - 1] \Delta y \Delta x \right. \\ \left. + i \cdot \lambda \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} f_Y(y_j) \cdot \sin[\theta_k \cdot y_j \cdot w_\xi(x_i)] \Delta y \Delta x \right\} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (37)$$

いま、計算例として表-1の各定数を用いる。式(7)、(8)によって曲げモーメントの平均値  $\mu_\xi$  と分散  $\sigma_\xi^2$  が求められるから、これらの2式に式(28)、(30)を代入し、

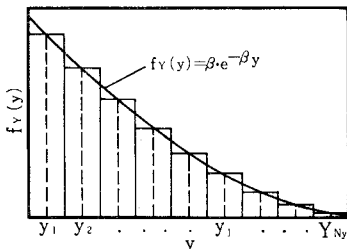


図-9 荷重分布の分割

表-1 計算データ—計算例(1)

$\lambda$ (1/m)	0.100
$L$ (m)	50.0
$\beta$ (1/t)	0.500

表-1の各数値を適用すれば、

$$\mu_\xi = \lambda \cdot \frac{L^2}{8} \cdot \frac{1}{\beta} = 62.5 \quad (t \cdot m) \dots\dots\dots (38)$$

$$\sigma_\xi^2 = \lambda \cdot \frac{L^3}{48} \cdot \frac{2}{\beta^2} = 2083.3 \quad (t^2 \cdot m^2) \dots\dots\dots (39)$$

式(33)と式(37)を用いて求めた特性関数の実数部と虚数部の比較を、図-10および図-11に示す。式(37)による数値計算の結果を理論解に十分近似させるためには、分割数  $N_x$  について20等分、分割数  $N_y$  について40等分程度とすれば十分である。

次に、式(33)または式(37)によって得られた特性関数を、式(16)に従ってフーリエ変換し確率密度関数を求める。フーリエ変換にはFFT法を用いる。ここで、 $\theta \rightarrow \infty$  に対する式(33)の極限值を求めると、次式のように非ゼロの有限値が残る。

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \phi_w(\theta) = \exp(-\lambda L) \neq 0 \quad (\because \lambda L \neq \infty) \dots\dots\dots (40)$$

そこで、 $\phi_w(\theta)$  をフーリエ変換するにあたって、次のように  $\tilde{\phi}_w(\theta)$  を用いて変形し数値計算を扱いやすくする。

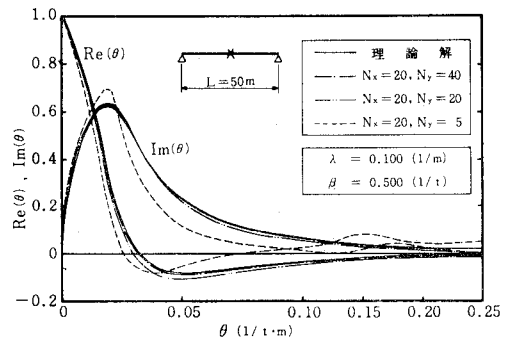


図-10 特性関数  $\phi_w(\theta)$  (その1)—計算例(1)

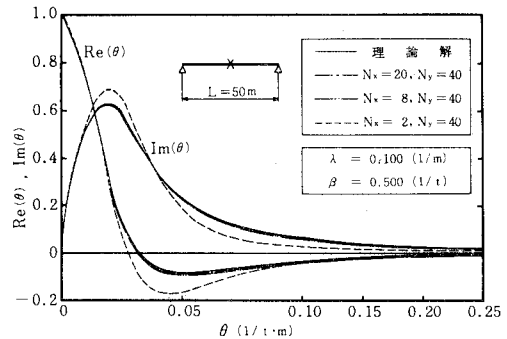


図-11 特性関数  $\phi_w(\theta)$  (その2)—計算例(1)

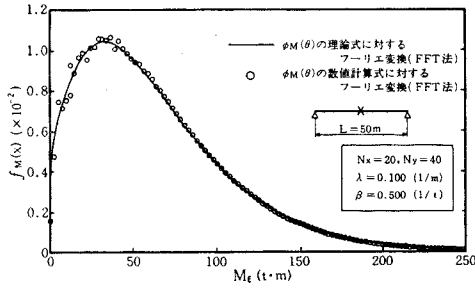


図-12 確率密度関数  $f_M(x)$ —計算例(1)

表-2 平均値・分散の比較—計算例(1)

	理論解	$f_M(x)$ からの数値解	
	(38), (39)式	(33)式より	(37)式より
平均値 $\mu_L$ (t·m)	62.50	62.39	63.02
分散 $\sigma_L^2$ (t <sup>2</sup> ·m <sup>2</sup> )	2083.3	2058.7	2054.5

$$\tilde{\phi}_M(\theta) = \phi_M(\theta) - \lim_{\theta \rightarrow \infty} \phi_M(\theta) \dots \dots \dots (41)$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{\phi}_M(\theta) = 0 \dots \dots \dots (42)$$

式(41)を用いて式(16)を変形すれば、

$$f_M(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{\phi}_M(\theta) + \lim_{\theta \rightarrow \infty} \phi_M(\theta)] e^{-i\theta x} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \delta(0) \cdot \lim_{\theta \rightarrow \infty} \phi_M(\theta) + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_M(\theta) \cdot e^{-i\theta x} dx \right] \quad (43)$$

ここに、 $\delta(0)$  は  $x=0$  における Dirac のデルタ関数である。つまり、式(40)で求められる定数は曲げモーメントがゼロとなる確率を表わす。これは、区間  $[0, L]$  にポアソン荷重列の車両が1台も載荷しない確率に等しい。

フーリエ変換の結果を図-12に示す。 $N_x=20, N_y=40$  とすれば理論解と数値解の差異は十分に小さい。また、平均値と分散の理論解(式(38), (39))とこの確率密度関数から数値的に求めた値とを表-2に示す。非常によく一致している。この結果からも、区分求積法による数値計算が実用的に十分な精度を与えることがわかる。

三径間連続桁橋の曲げモーメント応答—計算例(2)

阪神高速道路における活荷重実態調査によって得られた重量特性を用いて荷重をモデル化し、これを図-13に示す三径間連続桁橋に載荷する場合について求める。構造モデルの諸元を表-3に示す。着目点を中桁( $G_2$ 桁)の側径間中央点(着目点①)、中間支点上(着目点②)および中央径間中央点(着目点③)の3点とする。

橋軸方向および橋軸直角方向について構造的に対称形であり、 $G_2$ 桁に対するA車線とB車線上の影響線関数は等しい。格子理論により着目点の影響線  $w_{eA}(x) = w_{eB}(x)$  を算出し、これを図-14に示す。この影響線から求めた1次と2次の影響線係数  $a_L^1, a_L^2$  と、また道路橋

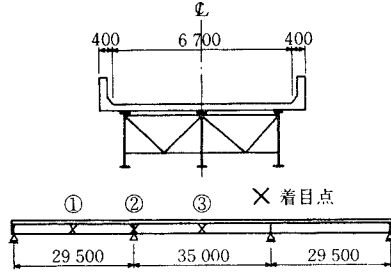


図-13 三径間連続桁橋モデル

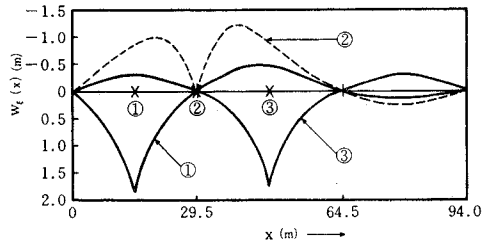


図-14 曲げモーメントの影響線関数

表-3 構造モデルの諸元

形式	三径間連続非合成板桁
支間長 L (m)	29.5 + 35.0 + 29.5 = 94.0
主桁間隔 (m)	2 @ 2.80 = 5.60
車道幅員 (m)	2 @ 3.35 = 6.70
車線数	2車線
設計荷重	T L-20

表-4 影響線係数・設計曲げモーメント

	着目点①	着目点②	着目点③
$a_L^1$ (m <sup>2</sup> )	12.63	-37.38	7.94
$a_L^2$ (m <sup>2</sup> )	26.24	36.90	20.99
$M_L$ (t·m)	105.8	-127.5	93.75

表-5 計算データ—計算例(2)

	荷重ケース	
	朝	夜
$\lambda$ (1/m)	0.100	0.100
$\Delta y$ (1/t)	2.0	2.0
Ny	20	25
$E(Y)$ (t)	1.956	5.092
$E(Y^2)$ (t <sup>2</sup> )	15.89	82.11

示方書<sup>1)</sup>のL-20荷重による設計活荷重曲げモーメント  $M_L$  (ただし、衝撃を含まず)を表-4に示す。

次に、図-3に示す調査結果データの中から、朝と夜の頻度分布を荷重データとして使用しその諸数値を表-5に示す。ここで、A車線とB車線には確率的に同質のポアソン荷重列が独立に作用するものとする。この例題の場合、重量の確率分布とはりの影響線が数値的に与えられており、特性関数を求めるのに数値計算を必要



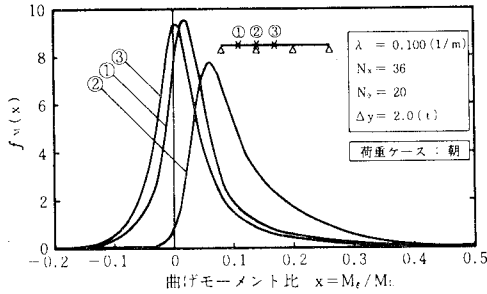


図-15 確率密度関数  $f_M(x)$  (その1)—計算例(2)

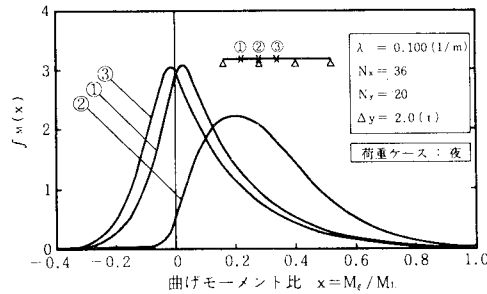


図-16 確率密度関数  $f_M(x)$  (その2)—計算例(2)

表-6 平均値・分散の比較—計算例(2)

	着目点①		着目点②		着目点③	
	理論解	数値解	理論解	数値解	理論解	数値解
平均値	4.94	4.94	-14.62	-14.63	3.11	3.11
$\mu_i$ (t·m)	12.86	12.76	-38.07	-37.11	8.09	8.06
分散	83.4	83.4	117.3	117.3	66.7	66.7
$\sigma_i^2$ (t <sup>2</sup> ·m <sup>2</sup> )	430.9	430.1	606.0	649.8	344.7	344.2

(上段:朝 下段:夜)

とする。この場合、独立な等しい2車線の作用を受けるので、式(37)の $\lambda$ を $2\lambda$ に置き換えたものを特性関数として使うことができる。ただし、確率密度関数 $f_i(y_i)$ は調査結果の重量頻度分布から求められる。

ところで、このモデルでは各着目点において正・負の曲げモーメントを生ずるが、一般的なFFT法によって確率密度関数を求める場合、式(16)に加えて次式によって負の部分の確率密度関数を求めることができる。

$$f_M(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_M^*(\theta) e^{-i\theta x} d\theta \quad (x \geq 0) \dots\dots(44)$$

ここに、 $\phi_M^*(\theta)$ は $\phi_M(\theta)$ の共役複素関数である。式(44)では、 $\phi_M(\theta)$ の実数部は偶関数であり、虚数部は奇関数であることを利用している。

得られた特性関数より求めた確率密度関数を図-15および図-16に示し、さらに平均値と分散の理論解と確率密度関数から求めた数値解との比較を表-6に示す。この結果では、設計曲げモーメントに比べ応答のレベルが非常に小さいが、これは用いた設計荷重が実働荷重に比べて大きいことによる。言うまでもなく、この応

答の確率特性から道路橋の供用期間全体を通しての安全性を推論することはできない。そのためには、前述したように、荷重の時間的変動についての扱いを導入する必要がある。また、応答の分布をみると、同じ荷重ケースでも着目点によって曲げモーメント比( $M_i/M_L$ )のレベルが異なることがわかる。これは、着目点②では負の影響線が大きく支配的であるのに比べ、着目点①や③では正の影響線が支配的ではあるが負の影響線の効果も少なくないことによる。周知のように、現行の設計法では部材に不利な影響線部分にのみ設計荷重を載荷しているが、そのために着目点によって部材の安全性からみた活荷重応答レベルに不均一性が生ずることを示している。このことは、今後荷重係数設計法等への移行にあたって、設計活荷重の規定の上で配慮すべき重要な点であると思われる。

### 5. 結 言

道路橋のより定量的な安全性評価を行ううえで、活荷重応答の確率統計量をより正確に把握する必要がある。本研究では、自動車交通流としてポアソン荷重列を仮定し、Filtered-Poisson過程の理論を応用して活荷重応答の確率特性を解析的に算定する方法を提案し、数値計算を行った。得られた結果と今後の課題をまとめると以下のようなものである。

(1) ポアソン荷重列を仮定することによって活荷重応答の平均値と分散が容易に求められるだけでなく、応答の特性関数と確率密度関数についても理論解を求められることが明らかとなった。

(2) 荷重の分布が指数分布に従い、単純桁支間中央点の曲げモーメント応答に着目するような簡単なモデルの場合には、その特性関数については解析的な形で展開することができるが、一般に、特性関数とそのフーリエ変換である確率密度関数とを解析的に展開することは難しい。ここでは、数値計算によって特性関数と確率密度関数を評価したが、比較的簡単な数値計算法によって精度良く解析できることがわかった。

(3) この算定法は、応答の影響線が与えられるならば、単純ばりや片持ちばりのみならず連続ばりやより複雑な任意の構造物について、また独立な多数車線の荷重列を受ける場合に対しても容易に適用できることを示した。

以上の結果から、本研究の仮定のもとでのこの算定法が数学的に扱い易く適用範囲の広いものであり、道路橋の活荷重応答の確率統計量を評価するうえで十分有意義な方法であると思われる。

一方、本論文で設けられた仮定と道路橋の安全性評価という問題とについては解決すべき次の点が残されてお

り、今後の研究課題であると考えている。

(4) 渋滞時の自動車列を扱う場合に車頭間隔が指数分布に従うとするのは適当ではなく、より正確な他の分布モデルを扱う必要がある。たとえば、アーラン分布を用いることが考えられるが、この場合車両到着台数はポアソン過程にはならず、したがって計数過程としての算定法について明らかにする必要がある。

(5) 本論文では、特定の荷重列による応答について着目したが、道路橋の供用期間中の安全性評価を行うには荷重の時間的変動について扱う必要がある。たとえば、渋滞頻度や渋滞荷重の強度についての確率を導入し、時間軸上での最大値分布について議論する必要がある。しかし、この場合でも一回の渋滞あるいは一つの荷重列による活荷重応答の算定にあたっては、本論文の算定法を活用することができる。

なお、本研究の計算には(株)総合技術コンサルタントの電算システム ACOS-350 を使用した。

謝 辞：最後に、本研究にあたり終始有益なご助言をいただいた、小西一郎京都大学名誉教授および阪神高速道路公団 松本忠夫審議役に謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，昭和55年2月。
- 2) 日本道路協会・橋梁委員会荷重係数設計法分科会：荷重係数設計法について，道路，1979年6月。
- 3) 金井道夫・佐藤和徳：橋梁活荷重の信頼性解析，土木研究所資料，第1865号，昭和57年7月。
- 4) 藤野陽三：確率論に基づく安全性照査法と構造設計，土木学会誌，Vol.63-2，1978年2月。
- 5) 土木学会構造工学委員会・構造物安全性研究小委員会：構造物の安全性・信頼性，1976年10月。
- 6) British Standards Institution：BS 5400。
- 7) 阪神高速道路公団・八千代エンジニアリング：阪神高速道路の通行自動車荷重実態調査報告書，1976年8月。
- 8) 阪神高速道路公団・総合技術コンサルタント：活荷重実態調査報告書，1983年3月。
- 9) 高岡宣善・白木渡・松保重之：不規則関数論に基づく道路橋の空間領域での信頼性解析，土木学会論文報告集，第334号，1983年6月。
- 10) 岡林隆敏：不規則な分布荷重を受けるはりの解析，土木学会論文報告集，第316号，1981年2月。
- 11) Wohl, M. and Martin, B. V., 加藤晃・山根孟・訳：計画者と技術者のための交通工学 [下]，鹿島研究所出版会，pp.31-36，1973年。
- 12) 中川建治：換算等分布活荷重の確率論的考察，土木学会論文集，第127号，1966年3月。
- 13) 篠塚正宣・久保雅邦：自動車交通流の配列に関する確率論的考察，第38回土木学会年次学術講演会概要集，I-200，昭和58年9月。
- 14) Rice, S. O. : Mathematical Analysis of Random Noise in Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover Publication, Inc., New York, pp.147-157, 1954.
- 15) 清水良一：中心極限定理，教育出版，p.195，1981年。
- 16) Lin, Y. K. (森大吉郎他訳)：構造動力学の確率論的方法，培風館，1972年。
- 17) Shinozuka, M., Wai, P. and Vaicaitis, R. : Simulation of a Filtered Poisson Process, Tech. Report, No.6, Columbia Univ., March 1976.
- 18) 竹内啓：確率分布と統計解析，日本規格協会，pp.7-12, 1975年。(1983.10.13・受付)