

二次の変位場理論に基づく薄肉断面ばりの局部 および全体座屈解析

LOCAL AND DISTORTIONAL BUCKLING OF THIN WALLED BEAMS
BASED ON SECOND ORDER DISPLACEMENT FIELDS

薄木 征三*・長谷部 薫**
By Seizo USUKI and Kaoru HASEBE

General nonlinear displacement fields for a plate segment comprising the cross section of a prismatic member are derived from Lagrangian strain-displacement relations by abandoning the assumption of no distortion of cross section. Second order displacement fields are also derived from those displacement fields for the buckling analysis. On the basis of the displacement fields and strain components obtained, four simplified differential equations governing the buckled state of I-beams in pure bending are presented, considering the initial curvature due to bending about their major axis. The solutions obtained using the simplified equations compare favorably with results obtained by a finite strip method with a larger degree of freedoms. The effects of initial curvature of bending are remarkably appeared in the region between local buckling and distortional lateral buckling, and decrease buckling stress of bending in the case of no initial curvature to about 89%.

1. ま え が き

軸力や曲げおよびねじり、あるいはこれらの組合せを受ける折れ板から成る薄肉断面直線部材の座屈現象には、断面を構成する板要素が局部的に座屈する局部座屈 (local buckling)、ならびに部材断面全体が部材軸回りにねじれたり、部材軸に直交方向の横変位、すなわち曲げを生じたり、あるいはこれら曲げとねじれが連成して座屈する全体座屈 (overall member buckling) がある。後者は、断面形不変を仮定する薄肉はり理論に立脚するものであり、I 形ばりなどの横倒れ座屈に問題を限定してみると、少なくとも 1 軸対称 I 形ばりではせん断中心の横方向変位と断面ねじれ角の 2 自由度で座屈支配方程式が記述される。

ところでこれら 2 種類の座屈現象の解析において採用されているすべての仮定を放棄するならば、局部座屈と全体座屈の両者の連成を考慮した座屈理論を展開することは原理的に可能である。しかしながら薄肉断面を構成する各板要素について、板中央面の面内変位と面内力および面外変位と面外力の両者を同時に考慮せねばなら

ず、したがって一般に自由度の多い複雑な解析が要求される。このような連成座屈は断面変形を伴う座屈 (distortional buckling) とよばれることがあり、理論の複雑さを避けて、より実的な解析法や計算法が考案されている。

Bleich¹⁾ は軸圧縮力を受ける T 形スティフナーのねじれ座屈解析において、スティフナー断面内でのウェブの変形をはり理論のたわみ曲線で近似した。このときスティフナー長さ方向のウェブの曲げ剛性とフランジのねじり剛性は無視している。Goldberg²⁾ らは、折れ板断面を構成する各板要素につり合いに関する 8 元連立 1 階微分方程式を建て、開き断面では自由縁の境界条件を満たすべく繰返し計算を行って座屈荷重を求める方法を提案した。Fischer³⁾ は I 形ばりの断面内の変形において上下フランジは剛、ウェブの変形はフーリエ級数の 5 項まで採用して等分布荷重などの場合の横倒れ座屈荷重を求め、断面形不変の場合より小さな座屈荷重が得られることを示した。しかし局部座屈については触れていない。Rajasekaran と Murray⁴⁾ は薄肉ばり理論の変位場に平板としての断面変形モードを重ね合せ、はり軸方向に剛性法を用いて I 形ばりの横倒れ座屈荷重を求めた。

わが国では奥村⁵⁾ が I 形ばりの断面内でフランジは剛、ウェブの変形ははり理論を採用して横倒れ座屈モー

* 正会員 工博 秋田大学助教授 鉱山学部土木工学科
(〒010 秋田市手形学園町 1-1)

** 正会員 工修 秋田大学助手 鉱山学部土木工学科
(同上)

メントを求め、フランジとウェブの局部座屈はそれぞれ周辺でばね支持された板として解析した。また Suzuki と Okumura⁶⁾ は同じくはり断面内の板要素の変形ははり理論を用いて軸力を受ける hat-shape の横倒れ座屈を解析した。このとき板要素の薄肉中心線方向の変位は板要素の重心の変位で代表させ、薄肉中心線のはり軸方向応力は薄肉中心線に沿って直線変化すると仮定している。

Trahair^{7),8)} らも断面変形を考慮した I 形ばりの横倒れ座屈を解析しているが、断面変形モードに対して始めから線形化された変位場を用いており、またウェブのはり軸方向の曲げ剛性を無視している。この2点は前出文献 6) についてもいえることであり、はりの長さがけた高の数倍程度以下で生ずると考えられるフランジとウェブの局部座屈は説明できず、文献 7), 8) では局部座屈には有限帯板法 (FSM) を併用せざるを得なくなっている。

本報告は薄肉折れ板断面はりを対象として、局部座屈と全体座屈の連成を説明し得る二次の理論を提案するものであり、さらに座屈前のはりの変形が座屈荷重に与える影響をも純曲げを受ける I 形ばりに対して明らかにする。基礎となる考え方は、横断面形不変の薄肉はり理論の仮定の一部を放棄することによって、断面変形を考慮した二次の変位場を求め、エネルギー原理から座屈変位支配方程式を導くことにある。はじめに折れ板要素に対して上記の変位場を一般的な形で求め、ついで 2 軸対称 I 形ばりに適用する。本理論によれば、断面内で 4 個の自由度を設定すれば有限帯板法 (上フランジとウェブは 4 要素, 下フランジ 2 要素) とほぼ同程度の精度で手計算または電卓を用いて座屈モーメントを求めることができる。

2. 変位場とひずみの決定

(1) 変位場

Fig. 1 (a) に薄肉板要素から成る一般的な薄肉断面ばりと座標系を示す。z 軸は部材長さ方向、s, n 軸は薄肉中心線および薄肉中央面の法線方向座標である。隣り合う薄肉板要素の中央面の交線 (節線) に番号 1, 2, ...,

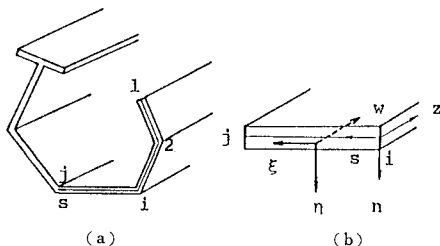


Fig. 1 Thin walled section and coordinate systems.

N を付す。Fig. 1(b) は板要素 i-j を取り出して示したものであり、ξ, η および w は、それぞれ断面内の任意点の s, n および z 軸方向の変位である。

薄肉断面ばりの座屈問題の解析において、断面形不変の仮定を放棄した場合の仮定は次のようである。

(i) ひずみと変位の関係において、はり軸方向の変位 w の微係数の二次のオーダーの項は小さく無視できる。

(ii) キルヒホッフ・ラブの薄板の仮定が成り立つ。

(iii) 薄板中心面のせん断ひずみのうち、直応力や荷重とつり合い状態にあるせん断応力によるせん断ひずみは小さく無視できる (オイラー・ベルヌーイの仮定)。

仮定 (i) により座屈問題を解析する場合のひずみと変位の関係式として次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_n &= \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial n} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ \gamma_{ns} &= \frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial n} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial n} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial s} \\ \gamma_{sz} &= \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial s} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \gamma_{zn} &= \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial n} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial n} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1 \cdot a \sim f)$$

キルヒホッフ・ラブの薄板の仮定 (ii) を式で表わすと

$$\epsilon_n = 0, \gamma_{ns} = 0, \gamma_{nz} = 0 \dots\dots\dots (2 \cdot a \sim c)$$

方程式 (2・a), (2・b) を満たす変位場 ξ, η は文献 9) で与えられており次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi^* - n \cdot \sin \alpha \\ \eta &= \eta^* + n (\cos \alpha - 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot a, b)$$

ここで ξ*(s, z), η*(s, z) は薄板中央面の s, n 軸方向変位であり、α(s, z) は断面内のたわみ角であって Fig. 2 に示すとおりである。α と ξ*, η* は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi^*}{\partial s} &= \dot{\xi}^* = \cos \alpha - 1 \\ \frac{\partial \eta^*}{\partial s} &= \dot{\eta}^* = \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4 \cdot a, b)$$

の関係で結ばれている。ただしここでは微小ひずみの有

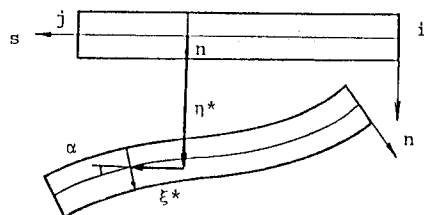


Fig. 2 Deformation of plate element.

限変位を前提とする。・は座標 s に関する微分を表わす。式 (3) を式 (1・f) へ代入し、仮定 (2・c) を用いると

$$\frac{\partial w}{\partial n} + \eta^{*'} \cos \alpha - \xi^{*'} \sin \alpha = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

を得る。ここで $'$ は座標 z に関する微分を表わす。上式を変位 w について解くと

$$w = w^* - n(\eta^{*'} \cos \alpha - \xi^{*'} \sin \alpha) \quad \dots\dots\dots (6)$$

を得る。ここで $w^*(s, z)$ は薄肉中央面での w の値である。

次に薄肉微小要素 $t \cdot ds \cdot dz$ (t は板要素 $i-j$ の板厚) の z 軸方向つり合いを考えると、仮定 (iii) によって z 軸方向直応力のせん断ひずみ $r_{sz} = \tau_{sz}/G$ に及ぼす効果を無視する。すなわちオイラー・ベルヌーイの仮定を採用すれば

$$t \cdot \tau_{sz} = G t r_{sz} = q = \text{一定} \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。ここで $*$ は薄肉中央面での値を示し、せん断応力 τ_{sz} の板厚方向への変化を直線分布で近似している。式 (1・e) で $n=0$ とおき、式 (7) を用いると

$$\frac{\partial w^*}{\partial s} + \xi^{*'} \cos \alpha + \eta^{*'} \sin \alpha - \frac{q}{Gt} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

を得る。これを w^* について解き式 (6) の w^* へ代入すれば次式となる。

$$w = w_i - n(\eta^{*'} \cos \alpha - \xi^{*'} \sin \alpha) - \int_0^s (\xi^{*'} \cos \alpha + \eta^{*'} \sin \alpha) ds + q \cdot \int_0^s \frac{1}{Gt} ds \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで $w_i(z)$ は節線 i 、つまり $s=0$ での w の値を表わす。上式から、軸方向変位 w は横断面形不変のはりと同様に板厚方向 (n 軸方向) へ直線的に変化することがわかる。せん断流の値 q は開き断面では 0 であり、閉じ断面では変位 w^* の連続の条件から式 (8) を用いて決定される。これらを一括して示すと

$$\left. \begin{aligned} q &= 0 \quad \dots\dots\dots \text{開き断面} \\ q &= \frac{1}{\oint \frac{ds}{Gt}} \cdot \oint (\xi^{*'} \cos \alpha + \eta^{*'} \sin \alpha) ds \quad \dots\dots\dots \text{閉じ断面} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10 \cdot a, b)$$

(2) ひずみ

式 (3) と (9) を式 (1・a), (1・c) および (1・e) へ代入すれば、多少の演算の後次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \xi^* - n\dot{\alpha} + \frac{1}{2} \{ (\xi^{*'})^2 + (\eta^{*'})^2 \} \\ \epsilon_z &= w_i' + n(\xi^{*'} \sin \alpha - \eta^{*'} \cos \alpha) - \int_0^s (\xi^{*'} \cos \alpha + \eta^{*'} \sin \alpha)' ds + q' \cdot \int_0^s \frac{1}{Gt} ds + \frac{1}{2} \{ (\xi^{*'})^2 + (\eta^{*'})^2 + (n\alpha')^2 \} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} r_{sz} &= -n\alpha'(2-n\dot{\alpha}) + \frac{q}{Gt} \approx -2n\alpha' + \frac{q}{Gt} \\ &\dots\dots\dots (11 \cdot a \sim c) \end{aligned} \right\}$$

ここで前述のように $*$ = $\partial/\partial s$, $'$ = $\partial/\partial z$ である。

3. 二次理論

これまでは微小ひずみだけを前提とし、変位・変形の大きさには特に制限を付けなかった。しかし薄肉断面ばりの局部座屈にしる全体座屈にしる座屈問題を対象とする場合はいわゆる二次理論に立脚することが十分ではないにせよ必要条件である。以下では薄肉中央面の変位 ξ^* , η^* , たわみ角 α および軸方向変位 w を薄肉板要素節線での自由度で表わす際に二次理論を展開する。

(1) 変位 ξ^* , η^* およびたわみ角 α

Fig. 3 に薄肉板要素 $i-j$ の両端に作用する節線力と両端での節線自由度を示す。問題をこのように二次元化することによって変位 ξ^* , η^* およびたわみ角 α をこれら節線の力学量で表わすことが可能となる。これは、軸力と曲げを受ける一次元部材の有限変位問題と本質的に同じである。つり合い式は⁹⁾

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} M \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{ij} \cos \alpha - N_{ij} \sin \alpha \\ -M/EI_{ij} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

である。ただし曲げモーメント M 、節線力 Q_{ij} , N_{ij} および断面二次モーメント I_{ij} はすべてはり軸方向単位長さ当たりの量である。また上式は、はりの両端 $z=0$ と L にだけ荷重が作用しており、板要素には直接荷重が作用していないことを前提としている。

薄肉中央面の変位が

$$\sin \alpha \approx \alpha, \cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \quad \dots\dots\dots (13 \cdot a, b)$$

と近似できる程度の大きさとしよう。上式を式 (12) へ代入し、節線力も変位およびたわみ角の一次以上のオーダーと考えられるから $Q_{ij}\alpha^2$ は三次以上のオーダーと考えて無視される。さらに軸方向力 N_{ij} も、節線 i で s 軸方向に向かう面内荷重が作用していなければ、この影響も無視できる。よってつり合い式 (12) は微小変位のつり合い式に縮小し、解は

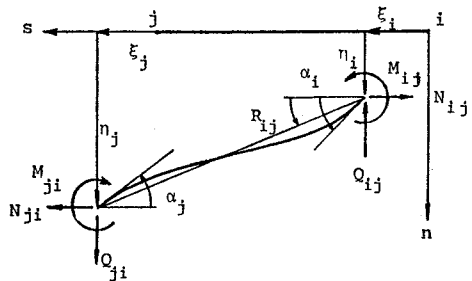


Fig. 3 Nodal displacements and nodal forces.

$$\begin{Bmatrix} M \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{ij} \\ \alpha_i \end{Bmatrix} + \left\{ - (M_{ijs} + Q_{ijs}^2/2) / EI_{ij} \right\} \dots (14)$$

ここで α_i は節線 i ($s=0$) での値である。

式 (4・b) と式 (13・a) より

$$\eta^* = \sin \alpha \approx \alpha \dots (15)$$

式 (14) を上式右辺へ代入して η^* について解くと

$$\eta^* = \eta_i + \alpha_i s - M_{ijs}^2/2 - Q_{ijs}^2/6 \dots (16)$$

η_i は η^* の $s=0$ での値でありまた表示の煩雑さを避けるため、 M_{ij} と Q_{ij} を

$$\frac{M_{ij}}{EI_{ij}} \sim M_{ij}, \quad \frac{Q_{ij}}{EI_{ij}} \sim Q_{ij} \dots (17)$$

と再定義している。

次に薄肉中央面の s 軸方向変位 $\xi^*(s, z)$ は、式 (4・a) と (13・b) より

$$\xi^* = \frac{\partial \xi^*}{\partial s} = -\frac{1}{2} \alpha^2 \dots (18)$$

右辺のたわみ角 α に式 (14) の第2式を代入して積分すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \xi^* = & \xi_i - \{ \alpha_i^2 s - \alpha_i M_{ijs} - (M_{ij}^2 - \alpha_i Q_{ij}) s^2 / 3 \\ & + M_{ij} Q_{ijs} / 4 + Q_{ij}^2 s^2 / 20 \} / 2 \dots (19) \end{aligned}$$

ここで $\xi_i(z)$ は $s=0$ での ξ^* の値である。

式 (16) のたわみ η^* が微小変位と同じく座標 s の三次式であるに対して、 s 軸方向変位 ξ^* は上式より座標 s の五次式となる点が、二次理論の著しい特徴である。

l_i を板要素 $i-j$ の長さとし、式 (14) と (16) で $s=l_i$ とおくと節線 j での力学量が得られる。これらを一括して示すと次のようである。

$$\begin{Bmatrix} R_{ij} \\ M_{ji} \\ \alpha_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & -l_i/2 & -l_i^2/6 \\ 0 & 1 & l_i \\ 1 & -l_i & -l_i^2/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ M_{ij} \\ Q_{ij} \end{Bmatrix} \dots (20)$$

ここで

$$R_{ij} = \frac{\eta_j - \eta_i}{l_i} \dots (21)$$

は板要素 $i-j$ の部材回転角である。式 (20) から Q_{ij} を消去すれば次のたわみ角式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \\ Q_{ij} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_i} \begin{Bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -2 & -4 & 6 \\ -6/l_i & -6/l_i & 12/l_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \\ R_{ij} \end{Bmatrix} \dots (22)$$

(2) 軸方向変位 $w(s, n, z)$

式 (9) の右辺へ式 (13), (14), (16) および (22) を代入し、節線力と節線幾何学量の二次の項まで考慮すれば、軸方向変位 w が次のように座標 s の陽な形で得られる。ただし以下では開き断面を対象とし、せん断流 q の値を 0 とする。

$$\begin{aligned} w = & w_i - \xi_i' s - f_i(s, z) - n \{ \eta_i' + \alpha_i' s - M_{ij}' s^2 / 2 \\ & - Q_{ij}' s^3 / 6 - \xi_i' (\alpha_i - M_{ijs} - Q_{ijs}^2 / 2) \} \dots (23) \end{aligned}$$

ここで $f_i(s, z)$ は式 (9) の右辺第3項の積分から出てくる二次のオーダーの項であり次のようである。

$$\begin{aligned} f_i(s, z) = & \alpha_i \eta_i' s - M_{ij} \eta_i' s^2 / 2 \\ & - (M_{ij} \alpha_i' + Q_{ij} \eta_i') s^3 / 6 \\ & + (M_{ij} M_{ij}' - 2 Q_{ij} \alpha_i') s^4 / 24 \\ & - (M_{ij} Q_{ij}' + 3 M_{ij}' Q_{ij}) s^5 / 120 \\ & - Q_{ij} Q_{ij}' s^6 / 180 \dots (24) \end{aligned}$$

したがって、 w は座標 s の6次式となる。

式 (16), (22) および (23), (24) で

$$M_{ij} = Q_{ij} = 0 \dots (25)$$

とおき、断面全体のねじれ角 $\varphi (= \alpha_i = R_{ij})$ を導入すると、以上の変位場は横断面形不変の場合の二次の変位場に一致することが確かめられる。

(3) ひずみ

式 (11) の ξ^* , η^* および α に式 (16), (22) および (23) を代入して二次のオーダーまで考慮すると次式を得る。

$$\epsilon_s = n (M_{ij} + Q_{ijs}) \dots (26 \cdot a)$$

$$\tau_{sz} = -2n (\alpha_i' - M_{ij}' s - Q_{ij}' s^2 / 2) \dots (26 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_z = & w_i' + n \{ \xi_i'' (\alpha_i - M_{ijs} - Q_{ijs}^2 / 2) - (\eta_i'' + \alpha_i'' s \\ & - M_{ij}'' s^2 / 2 - Q_{ij}'' s^3 / 6) \} - \xi_i'' s - f_i'(s, z) \\ & + \{ (\xi_i')^2 + (\eta_i' + \alpha_i' s - M_{ij}' s^2 / 2 - Q_{ij}' s^3 / 6)^2 \\ & + n^2 (\alpha_i' - M_{ij}' s - Q_{ij}' s^2 / 2)^2 \} / 2 \dots (26 \cdot c) \end{aligned}$$

結局は軸方向ひずみ ϵ_z は節線 i での力学量の二次式となるほかは、 ϵ_s , τ_{sz} とともにその一次式となる。

4. 曲げを受ける I 形断面ばり

Fig. 4(a) に示すような2軸対称 I 形断面ばりが曲げを受ける場合の局部および全体座屈の解析を扱う。このときウェブは幅厚比が十分大きく可撓性に富み、したがって前節までの理論に従うが、上下フランジは幅厚比が小さく、はり断面内の曲げ変形に対して剛であるとする慣用の仮定に従う^{3), 8)}。

以下では I 形断面各板要素ごとの変位場とひずみの評価を具体的に示すとともに、増分理論を構成する。Fig. 4(b) に節点番号と座標を示す。

(1) ウェブ

a) 変位場とひずみ

ウェブ中央点を O とし、ウェブ高を l_1 、板厚を t_1 と

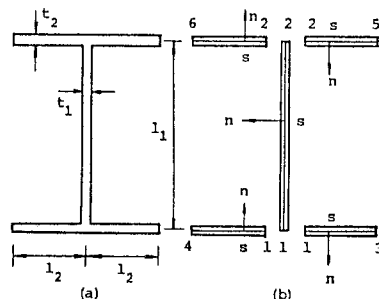


Fig. 4 I section beam and nodal line number.

する。中央点Oの変位 ξ^* , η^* および w^* の値をそれぞれ ξ_0 , η_0 および w_0 とすると式 (16), (22) および (23) で $s=l_1/2$, $n=0$ ならびに節線番号 i, j をそれぞれ 1, 2 とおくことによりこれらの値が ξ_1 , η_1 , w_1 , M_{12} および Q_{12} によって次のように表わせる。

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_0 - h_1(l_1/2, z) \\ \eta_0 - l_1\alpha_1/8 + l_1\alpha_2/8 - l_1R_{12}/2 \\ w_0 + l_1\{\xi_0' - h_1'(l_1/2, z)\} + f_1(l_1/2, z) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(27)$$

ただし上式では ξ_0 , η_0 および w_0 は右辺へ移行してある。また $f_1(l_1/2, z)$ は、式 (24) で $i=1, j=2$ および $s=l_1/2$ を代入した値である。さらに $h_1(l_1/2, z)$ は式 (22) の右辺第2項を $h_1(s, z)$ と置き換えたときの $s=l_1/2$ での値を表わす。 $f_1(s, z)$ と $h_1(s, z)$ をまとめて記すと

$$f_1(s, z) = \alpha_1\eta_1's - M_{12}\eta_1's^2/2 - (M_{12}\alpha_1' + Q_{12}\eta_1')s^3/6 + (M_{12}M_{12}' - 2Q_{12}\alpha_1')s^4/24 + (M_{12}Q_{12} + 3M_{12}'Q_{12})s^5/120 + Q_{12}Q_{12}'s^6/180 \quad \dots\dots\dots(28 \cdot a)$$

$$h_1(s, z) = -\{\alpha_1^2s - \alpha_1M_{12}s^2 - (M_{12}^2 - \alpha_1Q_{12})s^3/3 - M_{12}Q_{12}s^4/4 - Q_{12}^2s^5/120\}/2 \quad \dots\dots\dots(28 \cdot b)$$

式 (27) により、ウェブの節線 $i=1$ での独立変位量 ξ_1 , η_1 および w_1 の代わりにウェブ中央点での独立変位 ξ_0 , η_0 および w_0 で議論することができる。ただし式 (27) から変位 η_1 は変位 η_0 ならびに節線幾何学量の線形関数であるから以下の演算過程では特に断らない場合は η_1 のまま扱う。

式 (23) で $i=1, j=2$ とおき式 (27) を用いれば、ウェブのはり軸方向変位 w は次式となる。

$$w = w_0 + (l_1/2 - s) \cdot \{\xi_0' - h_1'(l_1/2, z)\} - n\{\eta_1' + \alpha_1's - M_{12}s^2/2 - Q_{12}s^3/6 - \xi_0'(\alpha_1 - M_{12}s - Q_{12}s^2/2)\} + f_1(l_1/2, z) - f_1(s, z) \quad \dots\dots\dots(29)$$

ひずみは式 (26) で $i=1, j=2$ とし、 w_1 , ξ_1 に式 (27) を代入すれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_s &= n(M_{12} + Q_{12}s) \\ r_{sz} &= -2n(\alpha_1' - M_{12}'s - Q_{12}'s^2/2) \\ \varepsilon_z &= w_0' + (l_1/2 - s)\{\xi_0'' - h_1''(l_1/2, z)\} \\ &\quad + n\{\xi_0''(\alpha_1 - M_{12}s - Q_{12}s^2) \\ &\quad - (\eta_1'' + \alpha_1's - M_{12}''s^2/2 - Q_{12}''s^3)\} \\ &\quad + \{(\xi_0')^2 + (\eta_1' + \alpha_1's - M_{12}'s^2/2 - Q_{12}'s^3/6)^2 \\ &\quad + n^2(\alpha_1' - M_{12}'s - Q_{12}'s^2)^2\}/2 \\ &\quad + f_1'(l_1/2, z) - f_1'(s, z) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(30 \cdot a \sim c)$$

以上の式 (29), (30) で節線力 M_{12} , Q_{12} は式 (22) のたわみ角式により、たわみ角 α_1 , α_2 および部材回転角 R_{12} の線形関数で与えられる。

b) 増分形

座屈以前のすべての力学量に上記号 $^\circ$ を付けることにする。座屈以前では、はり両端 ($z=0, L$) に I 形断面強軸まわりの曲げモーメントだけが作用し、断面は変形しないとする (厳密には増分理論によって座屈以前の変位支配方程式を解いて証明されるべき事柄である)。すると、

$$\eta_0^\circ = \alpha_1^\circ = \alpha_2^\circ = R_{12}^\circ = 0 \quad \dots\dots\dots(31)$$

座屈以前のウェブ中央点の軸方向変位 w_0° とたわみ ξ_0° は未知のままとする。上式とたわみ角式 (22) により $M_{12}^\circ = M_{21}^\circ = Q_{12}^\circ = 0 \quad \dots\dots\dots(32)$

したがって座屈以前でのひずみは上式と (30) より $\varepsilon_s^\circ = r_{sz}^\circ = 0, \varepsilon_z^\circ \neq 0 \quad \dots\dots\dots(33)$

またはり両端では曲げによる直応力しか作用していないから

$$\bar{r}_{sz}^\circ = \bar{r}_{nz}^\circ = 0, \bar{\sigma}_z^\circ \neq 0 \quad \dots\dots\dots(34)$$

である。記号 $-$ は、はり両端に作用する表面力を表わす。また式 (30 \cdot a, b) より、ひずみ ε_s と r_{sz} は節線での力学量の線形関数であり、はり軸方向ひずみ ε_z だけがその二次関数となっている。はり両端で $\xi = \eta = 0$ の境界条件を考え、仮想仕事の原理

$$\int_0^L \int_F (\sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_s \delta \varepsilon_s + \tau_{sz} \delta r_{sz}) dF \cdot dz - \left[\int_F \bar{\sigma}_z \delta w \cdot dF \right]_0^L = 0 \quad \dots\dots\dots(35)$$

に増分理論を適用すると、ウェブに対して次式を得る。

$$\int_0^L \int_{F_w} (\sigma_z \delta \varepsilon_z^L + \sigma_s \delta \varepsilon_s + \tau_{sz} \delta r_{sz} + \sigma_z^\circ \delta \varepsilon_z^N) dF \cdot dz - \left[\int_{F_w} \bar{\sigma}_z^\circ \delta w^N dF \right]_0^L = - \int_0^L \int_{F_w} \sigma_z^\circ \delta \varepsilon_z^L dF \cdot dz + \left[\int_{F_w} \bar{\sigma}_z^\circ \delta w^L dF \right]_0^L \quad \dots\dots\dots(36)$$

ここで積分領域 F_w はウェブ断面積であり、また

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z^L &= w_0' + (l_1/2 - s)\xi_0'' \\ &\quad + n\{(\xi_0^\circ)''(\alpha_1 - M_{12}s - Q_{12}s^2/2) \\ &\quad - (\eta_1'' + \alpha_1's - M_{12}''s^2 - Q_{12}''s^3)\} + (\xi_0^\circ)' \xi_0' \\ \varepsilon_z^N &= -(l_1/2)h_1''(l_1/2, z) \\ &\quad + n\xi_0''(\alpha_1 - M_{12}s - Q_{12}s^2/2) \\ &\quad + \{(\xi_0^\circ)''^2 + (\eta_1' + \alpha_1's - M_{12}'s^2/2 - Q_{12}'s^3/6)^2\} \\ &\quad + f_1'(l_1/2, z) - f_1'(s, z) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(37 \cdot a, b)$$

$$\left. \begin{aligned} w^L &= w_0 + (l_1/2 - s)\xi_0' \\ &\quad - n\{\eta_1' + \alpha_1's - M_{12}'s^2/2 - Q_{12}'s^3/6 \\ &\quad - (\xi_0^\circ)'(\alpha_1 - M_{12}s - Q_{12}s^2)\} \\ w^N &= -(l_1/2 - s)h_1'(l_1/2, z) \\ &\quad + n\xi_0'(\alpha_1 - M_{12}s - Q_{12}s^2/2) \\ &\quad + f_1(l_1/2, z) - f_1(s, z) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(38 \cdot a, b)$$

上記の ε_z^L と w^L に含まれている ξ_0° は前述のように

座屈以前のウェブ中央点のたわみである。記号 \circ のついていない量はすべて増分量である。増分量に対するフックの法則

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_s \\ \tau_{sz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E\varepsilon_z^L \\ E\varepsilon_s \\ G\gamma_{sz} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (39)$$

ならびに ε_s, τ_{sz} に対する式 (30・a, b) および ε_z^L に対する式 (37・a) を用いて式 (36) の左辺の積分を行う。そしてたわみ角式 (22) によって M_{12}, Q_{12} を変形量 α_1, α_2 および R_{12} で表わす。式 (36) の左辺第 1 項において積 $\sigma_z \delta \varepsilon_z^L = E \varepsilon_z^L \delta \varepsilon_z^L$ においては座屈以前のウェブ中央線の曲率 $(\xi_0^\circ)''$ の二次の項は無視されねばならない。なぜならば変位場とひずみについて三次の理論を展開したとすれば、三次のオーダーの項からも座屈以前のたわみ (ξ_0°) あるいはその微係数の二次の項が出てくるからである。

また初期応力 σ_z° は本章の (3) に示すように微小変位と同じ値である。つまり M° を I 形ばりの強軸まわりの曲げモーメントとして、

$$\sigma_z^\circ = \frac{M^\circ}{J_x} y = \frac{M^\circ}{J_x} \left(\frac{l_1}{2} - s \right) \dots\dots\dots (40)$$

J_x は I 形ばりの強軸まわりの断面二次モーメントである。以上によって仮想仕事の式 (36) の両辺のウェブ断面内での積分が実行可能となるが次節のフランジ断面内での積分とともに部分積分した結果を (4) で示す。

(2) フランジ

a) 変位場とひずみ

Fig. 4(b) の下フランジ右側に注目する。節線番号は $i=3, j=1$ であり板厚を t_2 , 長さを l_2 とする。先に述べたようにフランジは断面剛と仮定するから

$$R_{31} = \alpha_3 = \alpha_1 \dots\dots\dots (41)$$

が成り立つ。よってたわみ角式 (22) より

$$M_{13} = M_{31} = Q_{31} = 0 \dots\dots\dots (42)$$

となる。フランジ薄肉中央面のたわみは式 (16), (19) より、上式を考慮して

$$\begin{Bmatrix} \xi^* \\ \eta^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_3 - \alpha_1^2 s^2 / 2 \\ \eta_3 + \alpha_1 s \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (43)$$

ウェブとフランジ結合点での変位の適合性より

$$\begin{Bmatrix} \xi^* \\ \eta^* \end{Bmatrix}_{s=l} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ -\xi_1 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (44)$$

式 (43) に式 (44) を代入すれば

$$\begin{Bmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 + l_2 \alpha_1^2 / 2 \\ -\xi_1 - \alpha_1 l_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (45)$$

これより ξ_3, η_3 の代わりに η_1, ξ_1 および α_1 で議論することができる。

軸方向変位 w は式 (23) で $i=3, j=1$ とおき、式 (41) と (42) を考慮すれば次式となる。

$$w = w_3 - \xi_3' s - n(\eta_3' + \alpha_1' s - \xi_3' \alpha_1) - \alpha_1 \eta_3' s \dots\dots (46)$$

$s=l_2$ (節線 1), $n=0$ での w の値が w_1 であるから上式へこれらを代入し、上式 (41) と (45) を考慮すると

$$w_3 = w_1 + \xi_3' l_2 + \alpha_1 \eta_3' l_2 = w_1 + (\eta_1' - \alpha_1 \xi_1') l_2 \dots (47)$$

となり w_3 も節線 1 での幾何学量で表わされる。式 (45) と (47) より式 (46) の任意点の軸方向変位 w は

$$\begin{aligned} w &= w_1 + (l_2 - s) (\eta_1' + n\alpha_1' - \alpha_1 \xi_1') + n(\xi_1' + \alpha_1 \eta_1') \\ &= w_0 + (l_1/2 + n) \{ \xi_0'' - h_1'(l_1/2, z) \} \\ &\quad + n\alpha_1 \eta_1' + (l_2 - s) (\eta_1' + n\alpha_1' - \alpha_1 \xi_0'') \\ &\quad + f_1(l_1/2, z) \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

式 (41) ~ (48) の関係を用いればひずみ成分は式 (26)

より次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_s &= 0 \\ \tau_{sz} &= -2n\alpha_1' \\ \varepsilon_z &= w_1' + (l_2 - s) (\eta_1'' + n\alpha_1'' - \alpha_1 \xi_1'') \\ &\quad + n(\xi_1'' + \alpha_1 \eta_1'') + [(\eta_1')^2 + (\xi_1')^2 \\ &\quad + \{(l_2 - s)^2 + n^2\} (\alpha_1')^2] / 2 \\ &= w_0' + (l_1/2 + n) \{ \xi_0'' - h_1''(l_1/2, z) \} \\ &\quad - f_1'(l_1/2, z) + (l_2 - s) (\eta_1'' + n\alpha_1'' - \alpha_1 \xi_0'') \\ &\quad + n\alpha_1 \eta_1'' + [(\eta_1')^2 + (\xi_1')^2 + \{(l_2 - s)^2 \\ &\quad + n^2\} (\alpha_1')^2] / 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49 \cdot a \sim c)$$

下フランジ 4-1 についても同様に変位 w とひずみの表式を得ることができる。Fig. 4(b) のように s, n 座標をとるとき、式 (45) に対応する関係は

$$\begin{Bmatrix} \xi_4 \\ \eta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\eta_1 + l_2 \alpha_1^2 / 2 \\ \xi_1 - \alpha_1 l_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (50)$$

となる。すなわちフランジ 3-1 との違いは η_1 と ξ_1 の符号が逆になるだけである。その結果変位 w とひずみは

$$\begin{aligned} w &= w_0' + (l_1/2 - n) \{ \xi_0'' - h_1''(l_1/2, z) \} \\ &\quad + f_1(l_1/2, z) - n\alpha_1 \eta_1' \\ &\quad + (l_2 - s) (-\eta_1' + n\alpha_1' + \alpha_1 \xi_0'') \dots\dots\dots (51) \\ \varepsilon_z &= w_0'' + (l_1/2 - n) \{ \xi_0'' - h_1''(l_1/2, z) \} \\ &\quad + f_1'(l_1/2, z) - n\alpha_1 \eta_1'' \\ &\quad + (l_2 - s) (-\eta_1'' + n\alpha_1'' + \alpha_1 \xi_0'') + [(\eta_1')^2 \\ &\quad + (\xi_0')^2 + \{(l_2 - s)^2 + n^2\} (\alpha_1')^2] / 2 \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

となる。ほかのひずみ成分 ε_s と τ_{sz} は式 (49・a, b) と同じである。

上フランジ 5-2 と 6-2 についても類似の議論が成り立つ。節線 5 と 6 の変位 ξ_i, η_i および w_i は

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} \xi_5 \\ \eta_5 \\ w_5 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \eta_2 + \alpha_2^2 l_2 / 2 \\ -\xi_2 - \alpha_2 l_2 \\ w_2 + (\eta_2' - \alpha_2 \xi_2') l_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \xi_6 \\ \eta_6 \\ w_6 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\eta_2 + \alpha_2^2 l_2 / 2 \\ \xi_2 - \alpha_2 l_2 \\ w_2 + (-\eta_2' + \alpha_2 \xi_2') l_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

と節線 2 の幾何学量で表わされる。式 (45) と (50) の下フランジと比較してわかるように上式の右辺では $(\xi_1, \eta_1, \alpha_1)$ が単に $(\xi_2, \eta_2, \alpha_2)$ に変わっているに過ぎ

ない。したがってフランジ 5-2 の任意点の変位 w とひずみは、式 (49), (50) で $(\xi_1, \eta_1, \alpha_1)$ を $(\xi_2, \eta_2, \alpha_2)$ へ書き換え、フランジ 6-2 のそれらは、(51), (52) で $(\xi_1, \eta_1, \alpha_1)$ を $(-\xi_2, -\eta_2, \alpha_2)$ と書き換えて得られる。さらに (ξ_2, η_2, w_2) はウェブ 1-2 の節線 2 における変位の値でもあるから、式 (16), (19) および式 (23) で $i=1, s=l_1, n=0$ とおくと次の関係が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1 + h_1(l_1, z) \\ \eta_1 + l_1 R_{12} \\ w_1 - l_1 \xi_1' - f_1(l_1, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_0 - h_1(l_1/2, z) \\ \eta_0 - l_1 \alpha_1/8 + l_1 \alpha_2/8 \\ w_0 - l_1 \{ \xi_0' - h_1'(l_1/2, z) \} / 2 \\ \quad + h_1(l_1, z) \\ \quad + l_1 R_{12}/2 \\ \quad + f_1(l_1/2, z) - f_1(l_1, z) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (54)$$

これにより節線 2 の変位 (ξ_2, η_2, w_2) はウェブ中央点 O の変位 (ξ_0, η_0, w_0) に関連づけられる。関数 h_1, f_1 は式 (28) に示したように節線 1 と 2 における力学量の二次のオーダーの項である。

b) 増分形

増分形仮想仕事の原理は式 (36) で $\delta \varepsilon_s = 0$ (式 (49.a)) とおいたものであり、上下フランジ断面内で積分するとよい。つまり

$$\int_0^L \int_{F_f} (\sigma_z \delta \varepsilon_z^L + \tau_{sz} \delta \gamma_{sz} + \sigma_z \delta \varepsilon_z^N) dF \cdot dz - \left[\int_{F_f} \bar{\sigma}_z \delta w^N dF \right]_0^L = - \int_0^L \int_{F_f} \sigma_z \delta \varepsilon_z^N dF \cdot dz + \left[\int_{F_f} \bar{\sigma}_z \delta w^L dF \right]_0^L \dots\dots\dots (55)$$

積分領域 F_f は上下フランジ断面を表わす。積分の結果は次節以下でウェブに対する積分式 (36) との和として表わす。

(3) 座屈前の支配方程式

ウェブに対する仮想仕事の式 (36) およびフランジに対する上記の式 (55) の右辺を加えて 0 とおくと次のようになる。

$$\int_0^L \{ N^\circ \delta(w_0' + \xi_0' \xi_0') + M^\circ \delta \xi_0'' \} dz - [\bar{N}^\circ \delta w_0 + \bar{M}^\circ \delta \xi_0']_0^L = 0 \dots\dots\dots (56)$$

ここで

$$\begin{Bmatrix} N^\circ \\ M^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_w^\circ + N_{fl}^\circ + N_{fu}^\circ \\ M_w^\circ + l_1 N_{fl}^\circ/2 - l_1 N_{fu}^\circ/2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (57)$$

$$K_{aa} = \frac{EI_w v l_1}{6720} \begin{bmatrix} 29 & -13 & -280 & -72 \\ & 29 & 280 & -72 \\ & & 6720 & 0 \\ \text{SYM.} & & & 816 \end{bmatrix} + \frac{EA_f^3}{144} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{SYM.} & & & 1 \end{bmatrix} + \frac{EI_{fv} l_1^2}{32} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -8 & 0 \\ & 1 & 8 & 0 \\ & & 64 & 0 \\ \text{SYM.} & & & 16 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (67 \cdot a)$$

さらに

$$N_w^\circ = \int_{F_w} \sigma_z^\circ dF, M_w^\circ = \int_{F_w} \sigma_z^\circ \left(\frac{l_1}{2} - s \right) dF \dots\dots (58)$$

はそれぞれウェブの受けもつ軸力と曲げモーメントであり、

$$N_{fl}^\circ = \int_{F_l} \sigma_z^\circ dF, N_{fu}^\circ = \int_{F_u} \sigma_z^\circ dF \dots\dots\dots (59)$$

はそれぞれ下および上フランジの受けもつ軸力である。よって式 (56) の N° と M° はそれぞれ I 形断面に作用する軸力および強軸まわりの曲げモーメントである。 $\bar{N}^\circ, \bar{M}^\circ$ ははり両端に作用しているそれらである。以上より式 (56) は横断面形不変の場合の仮想仕事の式にほかならない。

式 (56) を部分積分すると座屈以前のつり合い式と境界条件を得るが、これらは横断面形不変の場合のつり合い式に一致するので割愛する。結果のみ書くと

$$\begin{Bmatrix} N^\circ(z) \\ M^\circ(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{N}^\circ \\ \bar{M}^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M^\circ \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (60)$$

I 形はり断面内の応力と曲率は微小変位の場合と同じであり、

$$\sigma_z^\circ = \frac{M^\circ}{J_x} \left(\frac{l_1}{2} - s \right), (\xi_0^\circ)'' = \frac{M^\circ}{EJ_x} \dots\dots\dots (61)$$

となる。

(4) 座屈支配方程式

ウェブに対する増分式 (36)、上下フランジに対する増分式 (55) のそれぞれの左辺を合計して 0 とおいたものが座屈後の変位増分に対する仮想仕事の原理である。これら両式のはり断面内での積分を実行し、節線自由度ベクトル

$$\mathbf{a}^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \eta_0/l_1 \quad R_{12}] \dots\dots\dots (62)$$

を導入する。そしてはり両端で断面の移動と断面の変形が拘束されているとする。すなわち

$$z=0 \text{ と } a \text{ で } \mathbf{a} = \delta \mathbf{a} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (63)$$

とする。

以上の結果等曲げの場合の座屈支配方程式と境界条件を次のように得る。

$$K_{\alpha\alpha} \mathbf{a}^N - K_{\beta\beta} \mathbf{a}'' + K_{\alpha\beta} \mathbf{a} - (\xi_0^\circ)'' \mathbf{H}_C \mathbf{a}'' + \sigma^\circ K_C \mathbf{a}'' = \mathbf{0} \dots\dots\dots (64)$$

$(\delta \mathbf{a}')^T = \mathbf{0}$ または

$$K_{\alpha\alpha} \mathbf{a}'' - (\xi_0^\circ)'' \mathbf{H}_T^T \mathbf{a} - 2 J_x \sigma^\circ K_T^T \mathbf{a} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (65)$$

式 (64) で

$$\sigma^\circ = \frac{M^\circ}{J_x} \cdot \frac{l_1}{2} \dots\dots\dots (66)$$

は下フランジの曲げ応力であり、また

$$K_{\beta\beta} = \frac{GJ_w}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -3 \\ & 4 & 0 & -3 \\ & & 0 & 0 \\ \text{SYM.} & & & 36 \end{bmatrix} + GJ_f \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{SYM.} & & & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (67 \cdot b)$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{EI_{wv}}{l_1^2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & -6 \\ & 4 & 0 & -6 \\ & & 0 & 0 \\ \text{SYM.} & & & 12 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (67 \cdot c)$$

$$H_\gamma = \frac{EI_{wv}l_1}{120} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -12 \\ -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 120 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_G = I_{wh} \begin{bmatrix} 3/140 - 12r\epsilon - 4r\beta^2/158 & 0 & -1/5 & -6/35 - 3r/2 - 2r\beta^2/5\delta \\ & -3/140 + 12r\epsilon + 4r\beta^2/158 & -1/5 & 6/35 + 3r/2 + 2r\beta^2/5\delta \\ \text{SYM.} & & & 12/5 + 12r \\ & & & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (68)$$

$$+ \frac{EI_{fv}l_1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 8 & -4 \\ -1 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (67 \cdot d)$$

$$K_\gamma = \frac{I_{wh}}{1120J_x} \begin{bmatrix} 1 & 10 & -112 & -39 \\ -10 & -1 & -112 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & 1344 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{I_{fh}}{240J_x} \begin{bmatrix} -1 & 8 & 0 & -27 \\ -8 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & 480 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (67 \cdot e)$$

$$H_G = \frac{EI_{fv}l_1}{8} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 & -4 - 1/\delta \\ & 2 & 8 & 4 + 1/\delta \\ 0 & 0 & 8/\delta & \\ \text{SYM.} & & & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (67 \cdot f)$$

以上で

$$\begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{wv} \\ I_{wh} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 t_1^3/12 \\ l_1^3 t_1/12 \end{bmatrix}, \begin{Bmatrix} I_{fv} \\ I_{fh} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 l_2 l_2^2/3 \\ t_2 l_2 l_1^2/2 \end{bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} J_w \\ J_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 t_1^3/3 \\ 2 l_2 l_2^2/3 \end{bmatrix}, \begin{Bmatrix} A_w \\ A_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 l_1 \\ 2 t_2 l_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (69 \cdot a \sim d)$$

また式 (67), (68) において

$$\begin{Bmatrix} \beta \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_2/l_1 \\ A_f/A_w \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \delta \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{fv}/I_{wv} \\ t_2/2 l_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (70)$$

は無次元パラメーターである。また式 (68) の ϵ は上記の無次元量を使うと

$$\epsilon = \frac{1}{3} \frac{1}{l_1^2} \left(l_2^2 + \frac{t_2^2}{4} \right) = \frac{1}{3} \beta^2 (1 + \psi^2) \dots\dots\dots (71)$$

と表わされる。

つり合い式 (64) と式 (65) の境界条件を満たす座屈波形として、断面形不変で両端単純支持の場合の解と同じ半波長形

$$\alpha = u \sin \frac{\pi z}{L} \dots\dots\dots (72)$$

を採用する。 $u = [ABCD]^T$ は座屈モードである。座屈前の曲げによるはり軸線の曲率 $(\xi_0^\circ)''$ は、式 (61) と (66) より微小変位の場合と同じく

$$(\xi_0^\circ)'' = \frac{2\sigma^o}{EI_1}, \sigma^o \equiv \sigma_{cr} \dots\dots\dots (73)$$

式 (72) と (73) を式 (64) へ代入すれば $u \neq 0$ なるための条件より座屈応力 (σ_{cr}) 決定方程式が得られる。方程式全体に $L^2/\pi^4 EI_{wv}$ を乗じて無次元化するとこれは

$$|K + kM| = 0 \dots\dots\dots (74)$$

となる。ここで

$$k = \frac{\sigma_{cr} l_1^2 t_1}{\pi^2 E t_1^3/12} = \frac{12 \sigma_{cr} I_{wh}}{\pi^2 E I_{wv}} \dots\dots\dots (75)$$

は平板の座屈における無次元座屈応力である。また行列 K と M は次のようである。

$$K = \frac{1}{\pi^2} \begin{bmatrix} 4\alpha^2/\pi^2 + G(8/15 + r^2/\beta^2)/E & 2\alpha^2/\pi^2 - 2G/15E & 0 & -6\alpha^2/\pi^2 - 2G/5E \\ \text{SYM.} & 4\alpha^2/\pi^2 + G(8/15 + r^2/\beta^2)/E & 0 & -6\alpha^2/\pi^2 - 2G/5E \\ & & 0 & 0 \\ & & & 12\alpha^2/\pi^2 + 24G/5E \end{bmatrix} + \frac{1}{\alpha^2} \begin{bmatrix} (29/70 + 3\delta)/96 + \beta^2 \psi^2 \delta/3 & -(13/70 + 3\delta)/96 & -(1 + 6\delta)/24 & -3/280 \\ \text{SYM.} & (29/70 + 3\delta)/96 + \beta^2 \psi^2 \delta/3 & (1 + 6\delta)/24 & -3/280 \\ & & 1 + 2\delta & 0 \\ & & & (17/70 + \delta)/2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (76)$$

$$M = - \begin{bmatrix} 1/560 - r\epsilon - r\beta^2/45\delta & 0 & -1/60 & -1/70 - r/8 - r\beta^2/30\delta \\ \text{SYM.} & -1/560 + r\epsilon + r\beta^2/45\delta & -1/60 & 1/70 + r/8 + r\beta^2/30\delta \\ & & 0 & 1/5 + r \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ r\beta^2 \begin{bmatrix} -1/6 & 0 & 2/3 & -1/3-1/12\delta \\ & 1/6 & 2/3 & 1/3+1/12\delta \\ \text{SYM.} & & 0 & 2/3\delta \\ & & & 0 \end{bmatrix} \dots (77)$$

式 (77) で第2項は座屈以前でのはり軸線の曲げによる曲率の効果による項である。

5. 計算結果

(1) 有限帯板法 (FSM) との比較

座屈応力を決定する4行4列の行列式 (74) を解いて得た結果と Hancock⁽⁹⁾ が FSM を用いて解いた結果の比較図を Fig. 5, 6 に示す。FSM は上フランジとウェブは4要素, 下フランジは2要素で, 1節線で3変位成分と1回転角の計4自由度であり, したがって式 (74) に相当する行列式は (48×48) の大きさとなる。

断面寸法は 図中に示してあり, ポアソン比は $\nu=0.3$

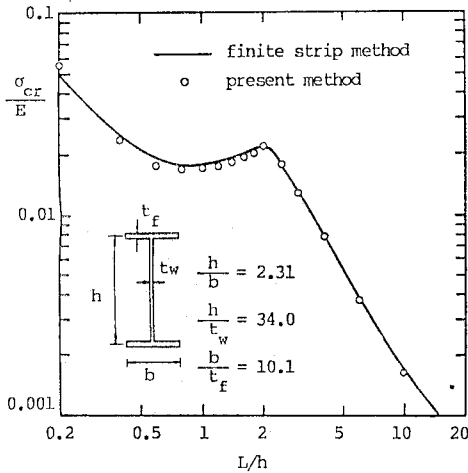


Fig. 5 Buckling stress versus beam length.

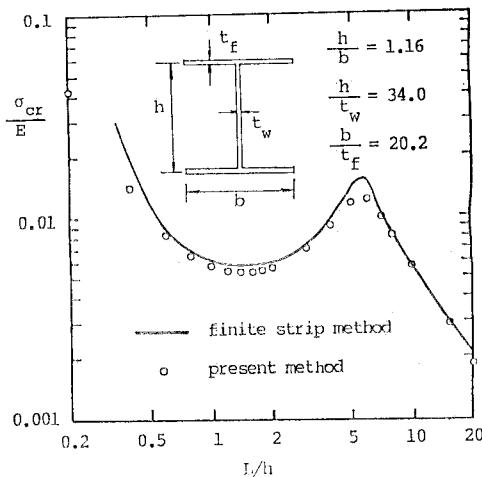


Fig. 6 Buckling stress versus beam length.

である。Fig. 5 では部材長さとした高の比が $L/h > 1.8$ では断面変形を伴った横倒れ座屈が起き, $L/h < 1.8$ では上フランジとウェブの結合線のまわりにこの両者がねじれを生ずる局部座屈を起こしている。この座屈モードについては基本的には文献 10) に類似しているのここでは割愛するが, 座屈応力について本論文の方法と FSM はよい一致を示している。Fig. 6 は H 形に近い断面をもっている場合で Fig. 6 ほどではないが, FSM に比べて $L/h \approx 5.4$ で最大 7% 程度低い座屈応力を得ている。このように本法での結果が FSM と大差がない大きな理由として本法では板要素面内変位 ξ^* と w は座標 s の高次式で表わされるに対し, FSM では一次式で近似していることが考えられる。

(2) 座屈モーメントとスパン長さの関係

Fig. 7 はウェブの断面寸法は一定としてフランジ幅 b を $h/2$ から $h/5$ まで変化させたときの (h はけた高) 座屈モーメント M_{cr} を部材長を横軸に調べたものである。式 (75) の無次元座屈応力 k と M_{cr} との関係は

$$\frac{M_{cr}L}{\sqrt{EJ_y GJ_T}} = k \frac{\pi^2}{6} \frac{L}{h} \left(\frac{t_w}{h} \right)^2 \frac{EJ_y}{\sqrt{EJ_x GJ_T}} \dots (78)$$

で結ばれている。 J_x, J_y および J_T ははりとしての断面定数である。Fig. 7 から座屈モーメント M_{cr} が極大値をとる L/h の値はフランジ幅が (a), (b), ..., (d) と狭くなるにつれ 6~3 へと小さい方へ移行する。すなわちフランジ幅が広ければ局部座屈が支配的であり, 狭ければ横倒れ座屈が支配的となり, これはわれわれの予想に一致する。Fig. 7 にはウェブだけの場合の M_{cr} の値も参考のために示してある。

(3) 座屈以前のたわみの影響

はり両端に作用する曲げモーメントによって座屈する以前にはりは強軸まわりに式 (73) で与えられる曲率をもつ。座屈支配方程式 (64) では曲率 (ξ_0'') を係数と

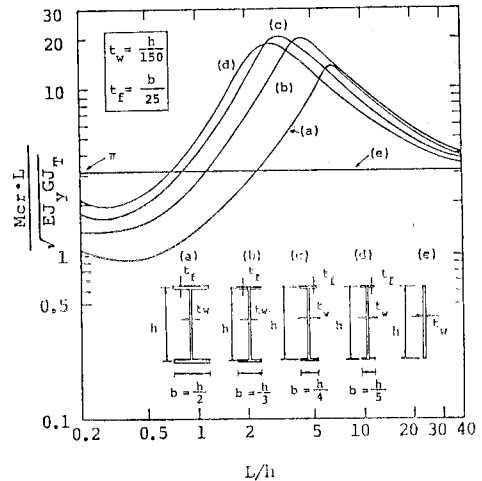


Fig. 7 Buckling moment versus beam length.

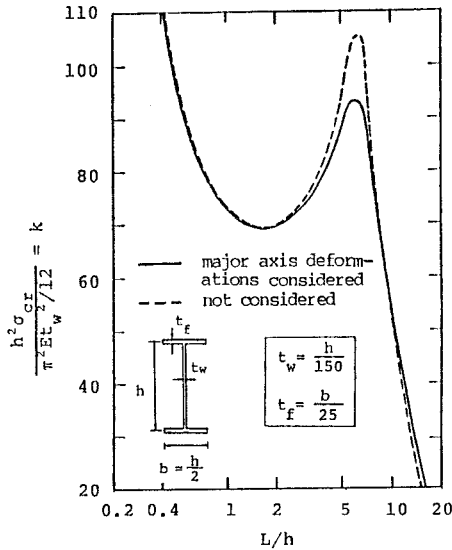


Fig. 8 Effect of major axis deformations on values of factor k .

している項がその効果を表わしており、固有値決定行列式においては式 (77) の第2項に相当する。Fig. 8 は Fig. 7 の (a) の断面 ($b=h/2$) について無次元座屈応力 k に与えるたわみの影響を示したものである。 $L/h > 9$ ではたわみ考慮の場合は無視の場合より大きめの k を与えるが、 $L/h < 9$ では逆の傾向となる。特に $L/h \approx 6$ で k は極大値、つまり横倒れ座屈と局部座屈の遷移点となるが、この点で両者の差は最大となりたわみ考慮は無視に比べて 11.2% の座屈応力の減少が認められる。しかし $b=h/5$ の I 形ばりでは $L/h=2.4$ で最大 2.4% の減少であり、その影響は小さい。

6. むすび

できる限り少ない自由度で薄肉折れ板からなる直線断面部材の全体座屈と局部座屈を統一して取り扱える1つの理論を提案した。基礎となるのはひずみ場の仮定だけといってよい。この仮定から二次の理論を構築した。結果としては断面内の板要素の変形モードはたわみ角式で記述される点は従来と同じであるが、薄肉中心線方向とはり軸方向の変位、すなわち板要素の面内変位は薄肉中心線に沿う座標の高次の代数式となり、また板要素両端の節線幾何学量の二次式で表わされることを明らかにした。

次に純曲げを受ける両端単純支持2軸対称 I 形ばりを対象に増分形仮想仕事の原理によって断面内の4個の自由度に関する座屈支配方程式を導いた。このとき座屈以前のりはり重心軸のたわみも曲率の形で支配方程式に取り

込んだ。また座屈以前の変位支配方程式は横断面形不変の場合と同じであり、したがって上述の座屈以前の曲率も容易に求められる。

得られた4行4列の固有値決定行列式を解いて12倍の自由度をもつ有限帯板法(48行48列)の結果と座屈応力について比較した結果、良好な一致をみた。

また実際に近い断面寸法比をもつ4種類の I 形ばりの座屈モードが半波長の正弦波の場合について座屈モーメントと部材長さとの関係を明らかにした。

最後に座屈以前のりはり軸線のたわみ曲率が座屈応力に与える影響を2種類の I 形ばりに対して図表で示した。その結果、横倒れ座屈が支配的である部材長が長い場合は従来と同じくたわみ考慮は無視より大きめの座屈応力を与えるが部材長が短く局部座屈が支配的になると逆に座屈応力は小さく、したがって危険側の値となることを明らかにした。なお、本論文の投稿とほぼ同時に山梨大学の杉原・深沢氏が著者らとほぼ同じ結果を出したことを付記したい¹¹⁾。

参考文献

- 1) Bleich, F.: *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill, Inc., 1952.
- 2) Goldberg, J.E., Bogdanoff, J.L. and Glauz, W.D.: *Lateral and Torsional Buckling of Thin-Walled Beams*, Proc. of IABSE, Australia, pp. 91~100, 1977.
- 3) Fischer, M.: *Das Kipp-Problem querbelasteter exzentrisch durch Normalkraft beanspruchter I-träger bei Versicht auf die Voraussetzung der Querschnittstreue*, Der Stahlbau, pp. 77~86, 3/1967.
- 4) Rajasekaran, B. and D.W. Murray: *Coupled local Buckling in Wide-Flange Beam Column*, ASCE, Vol. 99, ST 6, pp. 1003~1023, 1973.
- 5) 奥村敏恵: 溶接組立材の座屈に関する研究(第1報), 溶接学会誌, 第21巻10号, pp. 276~283, 1952.
- 6) Suzuki, Y. and Okumura, T.: *Influence of Cross-Sectional Distorsion on Flexural-Torsional Buckling*, Eighth Congress, IABSE, pp. 321~331, 1968.
- 7) Hancock, G.J., Bradford, M.A. and Trahair, N.S.: *Web Distorsional and Flexural-Torsional Buckling*, ASCE, ST 7, Vol. 106, pp. 1557~1571, 1980.
- 8) Bradford, M.A. and Trahair, N.S.: *Distorsional Buckling of I beams*, ASCE, ST 2, Vol. 107, pp. 355~370, 1981.
- 9) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕: 一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論, 土木学会論文報告集, 第237号, pp. 11~25, 1975.
- 10) Hancock, G.J.: *Local, Distorsional, and Lateral Buckling of I-Beams*, ASCE, Vol. 104, ST 11, pp. 1787~1798, 1978.
- 11) 杉原美好・深沢泰晴: ウェブの曲げ変形を伴う I 型プレートガーダーの横座屈後挙動, 第38回年次学術講演会講演概要, 第1部, pp. 197~198, 1983.

(1983.9.26・受付)