

ケーブルの面内非線形分岐応答解析

ANALYSIS OF INPLANE NONLINEAR RESPONSE OF CABLES
THROUGH BIFURCATION

高橋和雄*・田川賢**・池田虎彦**

By Kazuo TAKAHASHI, Masaru TAGAWA and Torahiko IKEDA

Nonlinear responses of the cable through bifurcation under inplane forcing are analyzed in the present paper. Two different responses, that is the anti-symmetric response of the cable which is supported at the same level under symmetric forcing and subharmonic responses are treated. The equation of motion of the cable is solved by the Galerkin method and the harmonic balance method. From the results of numerical examples, the frequency range where the anti-symmetric response exists varies with the sag-to-span ratio and its width is broad in the particular sag-to span ratio. The secondary unstable region is important compared with the primary unstable region. Subharmonic responses with order 1/2 and 1/3 are also obtained. The subharmonic response with order 1/2 only in the case of the cable. This response is important for the cable whose quadratic nonlinear terms are predominant.

1. まえがき

ケーブルの非線形振動に関する研究は最近いくつかの研究が見受けられる^{1)~4)}。非線形振動系の応答には常に生ずる付随形³⁾の応答と、特定の振動数領域のみで付随形の応答とは別個に生ずる分岐形の応答の2つがある^{注1)}。これらのうち、付随形の応答はこれまでかなり取り扱われているが^{2)~4)}、分岐形の応答については、面内加振のもとに生ずる面外非線形分岐応答が山口ら¹⁾によって評価されているのみで、面内加振のもとに生ずる面内非線形分岐応答はこれまで全く取り扱われていないようである。

弦の場合、すでに分數調波共振が存在すること⁷⁾はかなり古くから知られており、弦と類似系であると考えられるローラーチェーンでも生じている^{8),9)}。また、直線はりにおいても対称加振によって逆対称振動が分岐する

ことおよび分數調波共振が存在することが確かめられている^{10),11)}。しかも、実験においてもかなり優勢な応答が現われている。弦とケーブルの異なる点はケーブルがサグを有する点である。ケーブルの線形固有振動特性¹²⁾および非線形振動特性^{3),4)}がサグ比によって著しく異なっていることが最近の研究によって明らかにされつつある。これらによれば、弦よりも非線形性が強く、かつ、非線形項に2次、3次のものが同時に含まれている。したがって、ケーブルでは、その非線形振動の全体像を明らかにするためには、分岐形の非線形応答を評価することが必要である。

そこで、本研究はケーブルの非線形分岐応答を明らかにするために、面内対称加振を受ける水平ケーブルの面内逆対称分岐応答および任意の面内加振を受けるケーブルの1/2および1/3分數調波共振を解析するものである。なお、分岐形の応答は一般に振幅が小さい領域で生ずることおよび解の基本的性質を明らかにすることの目的のために計算自由度として対称・逆対称とも1自由度系に近似するものである。

解析手順としてはまず連続体の非線形運動方程式を Galerkin 法を用いて多自由度系の非線形運動方程式に変換する。さらに、これに調和バランス法を適用して得られる連立非線形代数方程式を数値解析の対象とするも

* 正会員 工修 長崎大学助教授 工学部土木工学科
(〒852 長崎市文教町 1-14)

** 学生会員 長崎大学大学院学生 (同上)

注1) 本論文では主共振(基本調波共振)および高調波共振⁹⁾などのように外力の作用および非線形連成項の存在によって恒等的に零であり得ない解をもつ応答を付随形という。また、分數調波共振⁹⁾などのように恒等的に零の解のほかに、特定の振動数領域で零以外の解をもつ応答を分岐形という。

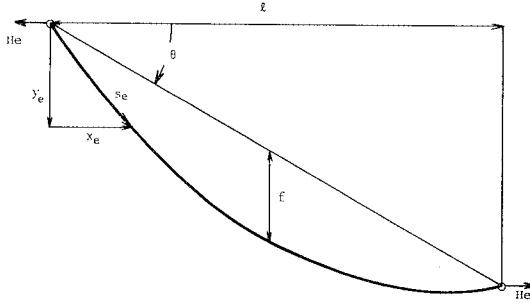


図-1 ケーブルの一般図

のである⁹⁾。調和バランス法は非線形性が大きくなっても有効性を失わない唯一の解法で¹³⁾、非線形性が大きいケーブルの非線形振動解析に適するものである。数値解析において水平ケーブルの非線形分岐応答をサグ比をパラメーターに明らかにした。

2. 運動方程式および解法

図-1 に示すようなケーブルの面内非線形運動方程式は次のように与えられる⁹⁾。

$$L_1(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(\bar{C}_0^2 \frac{1}{x_e'} + \bar{C}_1^2 x_e'^2 \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + \bar{C}_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right\} - \bar{C}_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(x_e' + \frac{\partial u}{\partial s_e} \right) \right] - \frac{p_x \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$L_2(u, v) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(\bar{C}_0^2 \frac{1}{x_e'} + \bar{C}_1^2 y_e'^2 \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + \bar{C}_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} \right\} - \bar{C}_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(y_e' + \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \right] - \frac{p_y \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 u, v : ケーブルの面内水平変位, 鉛直変位, t : 時間, s_e : ケーブルの初期形状に沿う座標系, \bar{C}_0, \bar{C}_1 : ケーブルの縦波, 横波伝播速度, p_x, p_y : 荷重強度, Ω : 外力の円振動数, x_e, y_e : ケーブルの初期形状, x_e', y_e' : 初期形状の s_e による常微分, また, 図-1 において, θ : 支点間傾斜角, f : ケーブルサグ, l : 支点間水平距離

式 (1), (2) の解を次のように変数分離形に仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= l \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) U_i(s_e) \\ v &= l \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) V_i(s_e) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $P_i(t)$: 未知の時間関数 (基準座標), $U_i(s_e) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{xi}^n \sin \frac{n\pi s_e}{l^*}$, $V_i(s_e) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{yi}^n \sin \frac{n\pi s_e}{l^*}$: 面内線形振動の第 i 次固有振動形, l^* : 初期ケーブル長, P_{xi}^n, P_{yi}^n : 線形振動の固有ベクトル (文献 12) 参照). 式 (3) を式 (1), (2) に代入して Galerkin 法を適用する。すなわち,

$$\int_0^{l^*} \{ L_1(u, v) U_n + L_2(u, v) V_n \} ds_e = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $n=1, 2, \dots$. 上式より $P_n(n=1, 2, \dots)$ について次のような連立非線形常微分方程式が得られる。

$$m_n \ddot{P}_n + k_n P_n + k^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{ijn} P_i P_j + \frac{k^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k_{ijln} P_i P_j P_l = p_n r^* \cos \omega t \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $k = \bar{C}_1 / \bar{C}_0$: ケーブルの縦波-横波伝播速度比, $\bar{\omega} = \Omega / \omega_1^0, \tau = \omega_1^0 t, r^* = 8 \rho_0 g l / H_e, \rho_0$: ケーブルの単位長さ当たりの質量, g : 重力の加速度, H_e : 初期水平張力, ω_1^0 : $r=0$ に相当する弦の第 1 次の固有円振動数, $m_n, k_n, k_{ijn}, k_{ijln}, p_n$: Galerkin 法の積分項 (文献 3) 参照)

面内対称加振を受ける水平ケーブルの面内対称振動の基準座標を P_1 , 逆対称振動の基準座標を P_2 とすれば, 式 (5) は次のように書き改められる。

$$\ddot{P}_1 + a_1 P_1 + b_1 P_2^2 + c_1 P_1 P_2^2 + d_1 P_1^3 + e_1 P_1^3 = f_1 r^* \cos \omega t \dots\dots\dots (6)$$

$$\ddot{P}_2 + a_2 P_2 + (b_2 P_1 + c_2 P_1^2 + d_2 P_1 P_2) P_2 = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $a_1 \sim f_1, a_2 \sim d_2$: 式 (5) の係数を各項ごとにまとめ, m_1, m_2 で割った値

式 (7) は同次方程式となっており, しかも $P_2=0$ ならば式 (7) は満足される。 $P_2=0$ ならば, 式 (6) は P_1 のみの方程式であり, $P_1 \neq 0$ なる付随形の解のみが得られる。しかし, P_2 の係数に P_1 の項が含まれるために, P_1 が周期振動する場合には, 式 (7) は係数励振振動 (パラメーター励振) 系の微分方程式となる¹⁴⁾。したがって, 特定の振動数領域で P_2 がゼロ以外の値をもつ逆対称非線形分岐応答が存在することになる。

式 (7) の $P_2=0$ の場合, つまり, 分岐のない場合に式 (6) は次のように書き改められる。

$$\ddot{P} + a_1 P + d_1 P^3 + e_1 P^3 = f_1 r^* \cos \omega t \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) の微分方程式には 2 次および 3 次の非線形項が同時に含まれているから, 分数調波共振については 1/2 および 1/3 のものが卓越することが予想される¹⁴⁾。なお, サグ比 $r=0$ である弦の場合には $d_1=0$ である

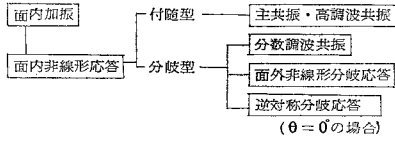


図-2 応答の分類

から、3次の非線形項のみが含まれる。この場合の分数調波共振は1/3のみが発生可能である。

本研究で新たに解析する分数調波共振および逆対称分岐応答のほかに文献4)に示した主共振・高調波共振の付随形の応答および文献1)の面外非線形分岐応答を加えれば、ケーブルの面内加振の非線形応答は図-2のように分類される。これより、ケーブルは非線形項を介して加振振動数以外で振動すること、直接加振されない自由度の振動が励振されることおよび面内加振にもかかわらず面外振動が連成することなどきわめて複雑な動的挙動を示すことが予想される。

3. 面内対称加振による逆対称分岐応答

(1) 解の仮定

面内対称振動の振動数 $\omega_1 (= \sqrt{a_1})$ と逆対称振動の振動数 $\omega_2 (= \sqrt{a_2})$ を比較すると $\omega_2 > \omega_1/2$ の関係が成立する¹²⁾。 ω_2 より高いかほぼ等しい加振振動数のもとに生ずる非線形分岐応答解析にあたっては、 $\omega_1/2$ 付近およびそれより小さい振動数領域で生ずる付随形の応答である高調波成分は無視することができる。また、逆対称非線形分岐応答は $\omega = 2\omega_2$ 付近の周期 $T/2 = \pi/\omega_2$ をもつ主不安定領域に対応する解と、 $\omega = \omega_2$ 付近の周期 $T = 2\pi/\omega_2$ の副不安定領域に対応する解が重要である^{15), 16)}、注2)。したがって、式(6),(7)の解を次のように仮定することができる¹⁷⁾。

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{1}{2} C_0^1 + C_1^1 \cos \omega \tau \\
 P_2 &= \frac{1}{2} C_0^2 + C_{1/2}^2 \cos \frac{\omega \tau}{2} + S_{1/2}^2 \sin \frac{\omega \tau}{2} \\
 &\quad + C_1^2 \cos \omega \tau + S_1^2 \sin \omega \tau
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

ここに、 C_0^1, C_1^1 : 付随応答の振幅成分、 $C_0^2, C_{1/2}^2, S_{1/2}^2, C_1^2, S_1^2$: 分岐応答の振幅成分

式(9)を式(6),(7)に代入して調和バランス法を適用すれば、未定定数 $C_0^1 \sim C_1^1, C_0^2 \sim S_1^2$ を求めるための連立非線形代数方程式が得られる。これを Newton-

注2) 多自由度の係数励振振動系の微分方程式において、励振円振動数 $\omega = 2\omega_2/k$ (ここに、 ω_2 : 固有円振動数、 $k=1, 2, \dots$) の付近に生ずる振動を単純(パラメトリック)共振とよばれている。 $k=1$ の場合 ($\omega = 2\omega_2$) が主不安定領域、 $k \geq 2$ の場合が副不安定領域である。本論文では副不安定領域については $k=2$ の場合のみを考慮している。

Raphson 法によって数値解析すれば必要な解を得ることができる。数値解析にあたってはまず分岐成分 ($C_0^2 \sim S_1^2$) を零とおいて、付随成分 (C_0^1, C_1^1) のみを求めて対称振動の応答曲線を作成する。次いで、 $\omega = 2\omega_2$ 付近で周期 $2T$ をもつ分岐成分 ($C_{1/2}^2, S_{1/2}^2$)、および $\omega = \omega_2$ 付近で周期 T の分岐成分 (C_1^2, S_1^2) を求めることにする。すなわち、これらの振動数領域において、分岐成分に零以外の初期値を代入して数値解析すれば分岐応答と分岐後の付随応答 (C_0^1, C_1^1) が得られる。

(2) 水平ケーブルの逆対称分岐応答特性

水平ケーブルの対称加振による逆対称非線形分岐応答は加振振動数 $\omega = 2\omega_2$ 付近の主不安定領域に生ずる分岐解 ($S_{1/2}^2, C_{1/2}^2$) と $\omega = \omega_2$ 付近の副不安定領域に生ずる分岐解 (S_1^2, C_1^2) の2組から構成される。対称加振による対称付随応答は $\omega = \omega_1$ 付近で共振状態となる。これより、副不安定領域の分岐点の振動数 ω_2 と対称振動の共振振動数 ω_1 の大小関係によって、副不安定領域の分岐応答の様相が異なってくるのが予想される。式(5)内で定義したケーブルの材料パラメータ¹²⁾ $k=30$ の水平ケーブルに対して、 $\omega_2 > \omega_1$ であるサグ比 $r (= f/l) = 0.02$ 、 $\omega_2 \approx \omega_1$ である $r = 0.026$ および $\omega_2 < \omega_1$ である $r = 0.07$ をもつ3種類のケーブルに対して対称加振のもとに生ずる付随対称振動の応答曲線ならびに逆

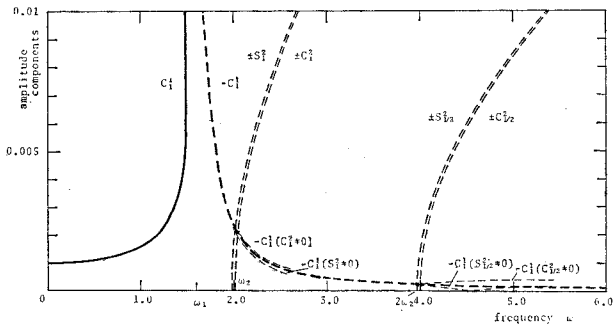


図-3 サグ比 $\gamma=0.02$ のケーブルの逆対称分岐応答

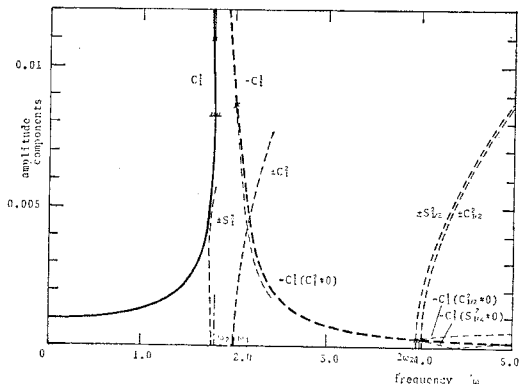


図-4 サグ比 $\gamma=0.026$ のケーブルの逆対称分岐応答

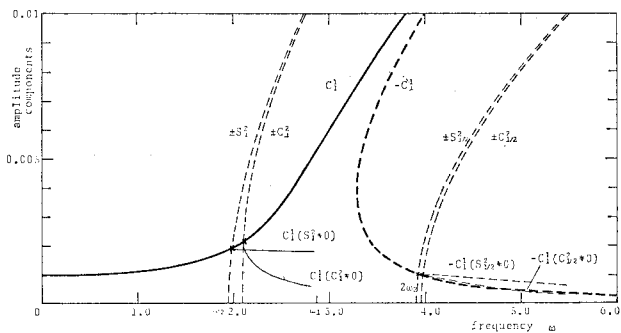


図-5 サグ比 $\gamma=0.07$ のケーブルの逆対称分岐応答

対称分岐応答と分岐後の対称応答を示せば、図-3, 4, 5に示すとおりである。なお、外力の大きさは静的応答 ($\omega=0$ のときの応答振幅) がケーブルの支点間水平距離 l の 1000 分の 1 となるように設定してある。これらの図において、横軸 ω は無次元加振振動数を対応する弦の 1 次の固有振動数で無次元化¹²⁾した無次元加振振動数である。また、縦軸は式 (9) の振幅成分 ($C_1^2, S_1^2, C_{1/2}^2, S_{1/2}^2$) を示す。これらの振幅成分は式 (3) から明らかのように、支点間水平距離 l で無次元化されている。なお、対称応答の振幅成分 C_1^2 はケーブルの中央点の無次元変位に、また、逆対称分岐応答の振幅成分 ($S_1^2, C_{1/2}^2, S_{1/2}^2, C_{1/2}^2$) はケーブルの 4 分の 1 点の無次元変位に対応するように設定してある。

これらの図において、肉太の実線・破線で示されている曲線が付随形の対称振動の主調波応答 (C_1^2) である。実線が外力と同位相の応答を、また、破線で逆位相の応答をそれぞれ示すものである。この付随形の対称応答はあらゆる振動数領域に対して存在する。

これに対して、 $2\omega_2$ 付近で ($C_{1/2}^2, S_{1/2}^2$) の 2 本の曲線から構成される応答曲線は逆対称振動の主不安定領域の分岐応答である。 $\omega=\omega_2$ 付近の (C_1^2, S_1^2) の応答曲線は対応する副不安定領域の分岐応答である。逆対称分岐応答はこれらの振動数領域のみで存在し、他の振動数領域では存在しない。これらの分岐応答の振動数比と振幅比の関係は対応する逆対称振動の主 (基本) 調波応答と同じ硬化ばね特性を示す⁹⁾。対称応答の主調波応答曲線上に示した記号×印は分岐点を示し、これらの分岐点から逆対称振動が生ずる。分岐後の対称応答の振幅は分岐のない対称応答とは差があることがわかる。なお、分岐応答は位相 0° または 180° で、その絶対値は同じである。

図-3 のサグ比 $\gamma=0.02$ のケーブルでは、 $\omega_2 > \omega_1$ であるから、主および副の不安定領域の分岐応答はともに対称応答の逆位相の応答曲線上に生ずる。また、図-5 のサグ比 $\gamma=0.07$ のケーブルでは、 $\omega_2 < \omega_1$ であるか

ら、副不安定領域の分岐応答は対称応答の外力と同位相の応答曲線上に生ずる。これらに対して、 ω_1 と ω_2 が接近する $\gamma=0.026$ 付近のケーブルでは ω_2 付近の副不安定領域の分岐点が対称振動の共振点と一致するために、図-4 のように、 S_1^2 と C_1^2 の分岐点が同位相と逆位相の応答曲線上から別個に生ずることになる。 $\gamma=0.026$ 付近のサグ比をもつケーブルの対称振動の応答曲線は弱い軟化ばね特性を示すので⁹⁾、同位相の応答曲線は図-4 の $///$ の位置で鉛直接線をもつ。これより上の応答曲線は不安定となり、実際には存在し得ない¹³⁾。したがって、 C_1^2 から分岐する S_1^2 は実現し得ない分岐応答である。この場合の分岐応答の発生可能領域は C_1^2 より小さい振動数領域で、逆位相の応答曲線が鉛直接線をもつ位置まで存在する。すなわち、本例の副不安定領域の左側は S_1^2 で規定されるのではなく、この鉛直接線の位置で規定される。鉛直接線の位置は図中に一点鎖線で記入してある注3)。

$2\omega_2$ 付近の主不安定領域はサグ比に無関係に $2\omega_2 > \omega_1$ で生ずるから、対称振動の共振点をささむことなく、常に逆位相の応答曲線上から分岐する。

以上のようにケーブルでは $\omega=2\omega_2$ 、 ω_2 付近の加振振動数のもとに対称振動から逆対称振動が分岐することが確かめられた。

本研究では、対称加振のもとに生ずる逆対称分岐応答の分岐点と分岐後の対称応答を明らかにした。しかし分岐点のみを求める観点に立てば、逆対称振動の振幅が小さいものとして、 P_2 に関する非線形項を無視することができる。このとき、式 (6), (7) は次のように書き改められる。

$$\ddot{P}_1 + a_1 P_1 + d_1 P_1^2 + e_1 P_1^3 = f_1 r^* \cos \omega \tau \dots \dots \dots (10)$$

$$\ddot{P}_2 + a_2 P_2 + (b_2 P_1 + c_2 P_1^2) P_2 = 0 \dots \dots \dots (11)$$

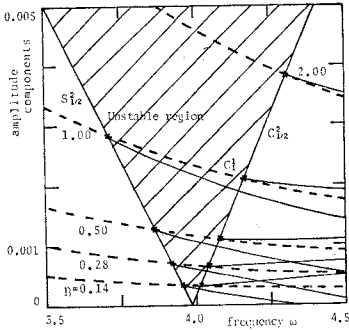
式 (10) は P_1 のみの方程式であるから、これを独立に解くことができる。すなわち、逆対称分岐応答は対称振動に影響を及ぼさないことを意味する。式 (10) の解を式 (9) の第 1 式のように仮定し、 C_0^1, C_1^1 を求めれば、対称非線形応答が得られる。次にこれを式 (11) に代入すれば、次のような係数励振系の微分方程式 (Hill の方程式¹⁴⁾) が得られる。

$$\ddot{P}_2 + (D_1 + D_2 \cos \omega \tau + D_3 \cos 2 \omega \tau) P_2 = 0 \dots \dots \dots (12)$$

$$\text{ここに、} D_1 = a_2 + \frac{1}{2} b_2 C_0^1 + \frac{1}{4} c_2 C_0^1 C_0^1 + \frac{1}{2} c_2 C_1^1 C_1^1$$

$$D_2 = b_2 C_1^1 + c_2 C_0^1 C_1^1, D_3 = \frac{1}{2} c_2 C_1^1 C_1^1$$

注 3) 逆位相の応答曲線も、振幅が大きくなると 3 次の非線形項が効いてくるために、右に傾いてくる位置で鉛直接線をもつ。この鉛直接線は振幅比 ($-C_1^2$) が 0.012 より大きい位置で生ずるので、図中には鉛直接線の位置のみ記入している。



図—6 サグ比 $\gamma=0.026$ のケーブルの逆対称分岐応答の主不安定領域

式 (11) の解を次のように仮定する^{15), 16)}。

$$P_2 = e^{i\tau} \left\{ \frac{1}{2} \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \sin n\omega\tau + \beta_n \cos n\omega\tau) \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 λ : 未定定数、 $\beta_0, \beta_n, \alpha_n$: 未知のベクトル。式 (13) を式 (12) に代入すれば、 λ の値を求めるための同次方程式が得られる。得られた同次方程式の安定判別は文献 15), 16) の方法を用いて行うことができる。

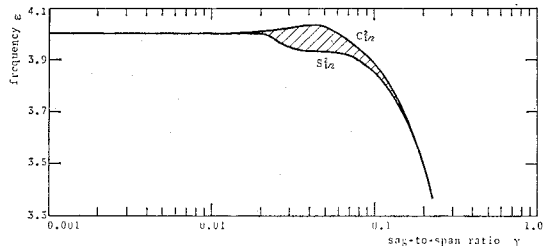
式 (13) を用いて $r=0.026$ のケーブルの $2\omega_2$ 付近の主不安定領域を、各種の荷重強度に対して求めれば、図—6 に示す結果を得る。斜線部が逆対称振動が生ずる不安定領域である。斜線部の内部では逆対称振動は発散振動となる。安定と不安定の境界が周期 $2T$ の周期解をもつ。左側に境界線が周期解 $S_{1/2}^2$ をもち、右側の境界線が周期解 $C_{1/2}^2$ をもつ。図のように、これらの境界線は非線形分岐応答解析から得られた分岐点と全く一致する。図のように $C_{1/2}^2$ と $S_{1/2}^2$ で囲まれる対称振動の応答曲線上で逆対称振動が生ずるから、その幅が広いほど逆対称振動が生じやすい^{注4)}。また、図のように荷重強度が増大すれば、不安定領域は広くなるといえる。

非線形分岐応答解析によって静的応答が支点間水平距離 l の 1000 分の 1 となるような荷重強度のもとで生ずる逆対称分岐応答の主および副不安定領域が発生する振動数領域とサグ比の関係を示せば、図—7, 8 のとおりである。

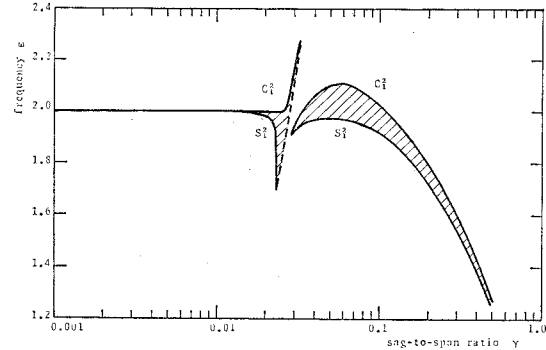
図—7 の加振振動数 $\omega=2\omega_2$ 付近の主不安定領域はサグ比 $r=0.02\sim 0.15$ 付近で広く、他のサグ比の領域では狭い。したがって、周期 $2T$ をもつ逆対称分岐応答はサグ比 $r=0.02\sim 0.15$ のケーブルで生ずる。

図—8 の加振振動数 $\omega=\omega_2$ 付近の副不安定領域はサグ比 $r=0.02\sim 0.03$ の範囲では破線のように下側(振動数の下限)が鉛直接線によって定まるために、不連続

注4) 不安定領域が広ければ、減衰力が存在する場合にも不安定領域は存在する(文献 15) 参照)。また、不安定領域が広いほど、発散する振動数と加振振動数が一致する可能性が高い。



図—7 水平ケーブルの逆対称分岐応答の主不安定領域



図—8 水平ケーブルの逆対称分岐応答の副不安定領域

となっている。副不安定領域の幅は主不安定のそれよりも広い。

これらの逆対称振動が生ずる不安定領域はケーブル特有の性質で、サグ比 r が小さい弦に近いケーブルではきわめて狭く、分岐応答が生じないことが予想される。以上によって、水平ケーブルでは特定のサグ比の範囲で面内対称加振のもとで逆対称振動が分岐することが確認された。

4. 分数調波共振

(1) 分数調波共振の解法

分数調波共振は固有振動数よりも高い振動数領域で生ずるから、付随成分である高調波成分の影響を無視することができる。したがって、本題の解を次のように仮定することができる。

① 1/2 分数調波共振¹⁷⁾

$$P_1 = \frac{1}{2} C_0^1 + C_{1/2}^1 \cos \frac{\omega\tau}{2} + S_{1/2}^1 \sin \frac{\omega\tau}{2} + C_1^1 \cos \omega\tau \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $C_0^1, C_{1/2}^1, S_{1/2}^1, C_1^1$: 振幅成分。

② 1/3 分数調波共振

$$P_1 = \frac{1}{2} C_0^1 + C_{1/3}^1 \cos \frac{\omega\tau}{3} + C_1^1 \cos \omega\tau \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $C_0^1, C_{1/3}^1, C_1^1$: 振幅成分

式 (14), (15) において、 C_0^1, C_1^1 が付随成分で、常

に生ずる応答である。これに対して $C_{1/2}^1, S_{1/2}^1$ および $C_{1/3}^1$ が分岐成分である。式 (14) および式 (15) を式 (8) にそれぞれ代入して調和バランス法を適用すれば、未定定数を決定するための連立非線形代数方程式が得られる。1/3 分数調波共振の場合を示せば、次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \text{定数項} : & a_1 \frac{1}{2} C_0^1 + d_1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} C_0^1 C_0^1 + C_{1/3}^1 C_{1/3}^1 \right. \\ & \left. + C_1^1 C_1^1 \right) + e_1 \frac{3}{4} C_0^1 \left(\frac{1}{6} C_0^1 C_0^1 \right. \\ & \left. + C_{1/3}^1 C_{1/3}^1 + C_1^1 C_1^1 \right) = 0 \\ \cos \frac{\omega \tau}{3} : & C_{1/3}^1 \left\{ \left(a_1 - \frac{\omega^2}{9} \right) + d_1 C_0^1 + \frac{3}{4} e_1 (C_{1/3}^1 C_{1/3}^1 \right. \\ & \left. + C_{1/3}^1 C_1^1 + 2 C_1^1 C_1^1) \right\} = 0 \\ \cos \omega \tau : & (a_1 - \omega^2) C_1^1 + d_1 C_0^1 C_1^1 \\ & + \frac{3}{4} e_1 \left(\frac{1}{3} C_{1/3}^1 C_{1/3}^1 C_{1/3}^1 + C_1^1 C_1^1 C_1^1 \right. \\ & \left. + C_0^1 C_0^1 C_1^1 + 2 C_{1/3}^1 C_{1/3}^1 C_1^1 \right) = f_1 r^* \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

式 (16) の第 2 式から明らかなように、 $C_{1/3}^1 = 0$ が通常存在する解で $\{ \} = 0$ が特定の振動数領域で存在する 1/3 分数調波共振である。以下の数値解析にあたっては、まず、分岐成分 ($C_{1/2}^1, S_{1/2}^1, C_{1/3}^1$) を零とおいて、付随成分 (C_0^1, C_1^1) のみを求める。次いで、 $\omega = 2\omega_1$ もしくは $\omega = 3\omega_1$ 付近において、分岐成分に零以外の値も代入して、分数調波共振を求めることにする。

(2) 1/2 分数調波共振

水平ケーブル ($k=30$) のサグ比 $r=0.1$ および 0.026 の 2 ケースについて、主調波応答と 1/2 分数調波共振を求めれば、図-9 および 10 に示すとおりである。荷重強度は各ケースとも無次元静的応答が支点間水平距離 l の 1000 分の 1 になるように設定している。これらの図において、横軸 $\bar{\omega}$ は無次元加振振動数で、縦軸はケーブル中央点の無次元振幅成分である。図中の実線 C_1^1 は外力と同位相の付随応答を、また、破線 ($-C_1^1$) は外

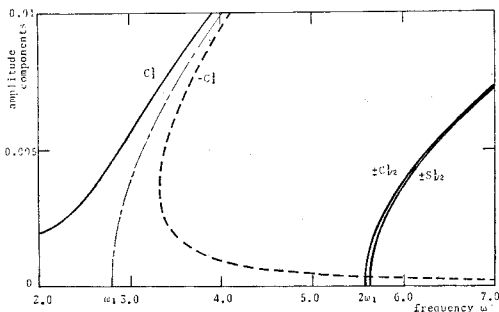


図-9 サグ比 $r=0.1$ のケーブルの 1/2 分数調波共振

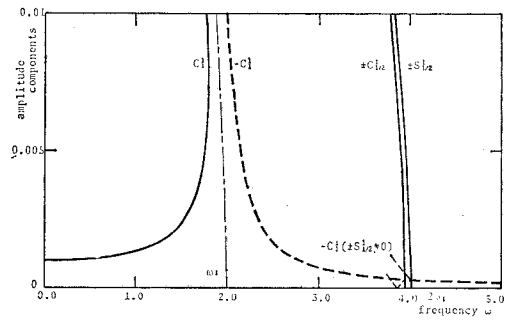


図-10 サグ比 $r=0.026$ のケーブルの 1/2 分数調波共振

力と逆位相の付随応答をそれぞれ示すものである。この付随応答はあらゆる振動数領域で存在する。サグ比 $r=0.1$ のケーブルは 3 次の非線形項が支配的な硬化ばね特性をもつ場合で、 $r=0.026$ のケーブルが 2 次の非線形項が支配的な軟化ばね特性をもつ場合である⁴⁾。主調波応答 C_1^1 は $r=0.1$ の場合 $\omega = \omega_1 = 2.8$ 付近、 $r=0.026$ の場合 $\omega = \omega_1 = 2.0$ 付近で共振となる。

これに対して、1/2 分数調波共振は通常零であり、固有振動数の 2 倍 ($\omega = 2\omega_1$) 付近で分岐的に生ずる。分岐応答には $\pm S_{1/2}^1, \pm C_{1/2}^1$ のように位相が相異なる解が 2 種類存在する。図-9 の 2 次の非線形項が小さい $r=0.1$ のケーブルでは分岐解は主調波応答にほとんど影響を及ぼさない。しかも、分岐応答が生ずる幅も狭い。一方、2 次の非線形項が支配的な $r=0.026$ のケーブルでは図-10 に示すように、1/2 分数調波共振によって、主調波応答は大きな影響を受ける。また、 $S_{1/2}^1$ と $C_{1/2}^1$ の分岐応答曲線で囲まれる振動数の幅が広い。この 2 つの分岐応答に囲まれる応答曲線上で任意の位相をもった 1/2 分数調波共振が生じるものと考えられるから、 $S_{1/2}^1$ と $C_{1/2}^1$ で囲まれる振動数の幅が広いほどこの分岐応答は生じやすい。したがって、1/2 分数調波共振は 2 次の非線形項が大きなケーブルで生じやすい。文献 4) の図-3 に示した結果によれば、水平ケーブルでは、0.015 ~ 0.04 のサグ比の領域に対応する。

なお、1/2 分数調波共振の振動数比と振幅比の関係は

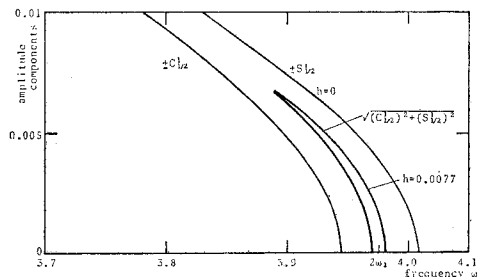


図-11 1/2 分数調波共振に及ぼす減衰の影響

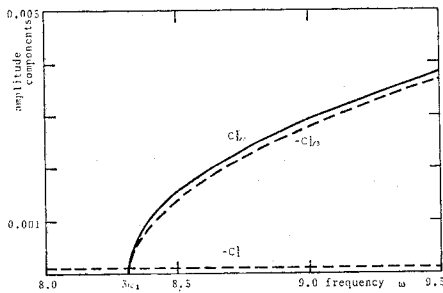


図-12 サグ比 $\gamma=0.1$ のケーブルの 1/3 分数調波共振

いずれも対応するケーブルの主調波応答と同じ非線形振動特性を示すといえる。

図-11 は減衰のある場合とない場合の非線形分岐応答を比較したものである。すなわち、式 (8) において減衰力 ($2h\sqrt{a_2} P_2$, ここに h : 減衰定数) を考慮すると、1/2 分数調波共振が生ずる幅が狭くなって振幅比に上限が存在する。これより、実際のケーブルでは 1/2 分数調波共振は大きな振幅には成長し得ないことが予想される。

1/2 分数調波共振は 2 次の非線形項が存在する振動系に存在するので、この共振は 2 次の非線形項が含まれるケーブルのみ生じ、弦には生じないものである。

(3) 1/3 分数調波共振

サグ比 $\gamma=0.1$ のケーブルについて、主調波応答 (C_1) と 1/3 分数調波共振 ($C_{1/3}$) を求めれば、図-12 に示すとおりである。1/3 分数調波共振は固有振動数の 3 倍 ($\omega=3\omega_1$) の加振振動数で分岐的に生ずる。1/2 分数調波共振の場合と根本的に異なる点は 1/3 分数調波共振の応答曲線は $C_{1/3}$ の 1 本の連続した曲線と与えられることである。また、1/3 分数調波共振はサグ比に無関係に主調波応答 (C_1) に影響を及ぼさない。なお、1/3 分数調波共振の振動数比と振幅比の関係は 1/2 分数調波共振と同様に対応するケーブルの主調波応答と同じ非線形振動特性を示す。

減衰力が存在すると、1/3 分数調波共振の応答曲線の下側が閉じることがわかっているので¹³⁾、減衰のある場合の 1/3 分数調波共振は振幅比が大きい領域で存在するものと考えられる。

本題の 1/3 分数調波共振は 3 次の非線形項をもつ振動系において卓越するから、3 次の非線形項のみが含まれる弦の場合にも 1/3 分数調波共振は発生可能である。

5. ま と め

本研究はケーブルの面内非線形分岐応答解析を行ったものである。本研究で明らかになったことをまとめると、

(1) 面内対称加振によって特定の振動数領域で水平ケーブルには逆対称振動が分岐的に生ずる。逆対称分岐応答が生ずる振動数領域はケーブルのサグ比によって異なる。分岐応答が生ずる振動数領域は副不安定領域の方が主不安定領域よりも広い。

(2) ケーブルの分数調波共振には 1/3 次の分数調波共振のみが含まれる弦とは異なって 1/2 次および 1/3 次の分数調波共振が存在する。1/2 分数調波共振は 2 次の非線形項が支配的なサグ比のケーブルで卓越する。1/2 分数調波共振は振幅比が小さい領域で存在する。また、1/3 分数調波共振は振幅比が大きい領域で存在することが予想される。

本論文によってケーブルの非線形分岐応答を解析的に明らかにした。これより、ケーブルの非線形分岐応答は弦の場合よりも幅が広く、かつ、種類が多いことが判明した。弦やローラーチェーンなどに分岐応答が生ずることが解析的・実験的に確認されていることを考慮するとケーブルにおいてはさらに生じやすいことが予想される。分岐形の応答は付随形とは異なって初期条件や外乱によって分岐的に生ずるものであるが、実際のケーブルではその形状や外力の分布が対称でないことおよび外力の時間的変動が主調和成分以外のものを含むことから、解析結果よりも生ずる可能性が高くなる。実際のケーブルの振動問題では風や潮流などの非線形流体力とケーブルの相互作用によって、複雑な振動挙動を示すが、現象解明のために構造要素から決定される非線形振動特性をまず知っておくことが必要である。本研究の成果はケーブルの非線形振動挙動を説明するために、欠くことができないものである。さらに、ケーブルの非線形振動挙動はケーブルの疲労を考慮する場合に検討の対象になるものと考えられる。

なお、数値解析には長崎大学情報処理センター計算機 FACOM M-180 AD/II を使用したことを付記する。また、本研究の数値計算には、卒論生 坂井秀一君 (現・長崎大学大学院) および川上広行君 (現・清水建設(株)) の協力を得た。

参 考 文 献

- 1) 山口・宮田・伊藤: ケーブル系の非線形動的応答における一挙動, 第 24 回構造工学シンポジウム論文集, pp. 55~61, 1978.
- 2) 山口・宮田・伊藤: 幾何学的非線形性に基づくケーブルの面内・面外連成振動, 第 35 回土木学会年次学術講演会講演概要集, 第 1 部, I-175, pp. 347~348, 1980.
- 3) 山口・宮田・伊藤: 正弦波外力を受けるケーブルの時間応答解析, 土木学会論文報告集, 第 308 号, pp. 37~45, 1981.
- 4) 高橋・藤本・村中・田川: 調和バランス法によるケーブルの非線形振動解析, 土木学会論文報告集, 第 338 号, pp. 59~68, 1983.
- 5) 皆川: 非線形運動方程式の定常解の分類 非線形運動方程

- 式の定常解問題—第2報, 日本建築学会論文報告集, 第277号, pp. 45~53, 1979.
- 6) 清水：非線形振動論, 培風館, 1965.
 - 7) Murthy, G.S.S. and B.S. Ramakrishna : Nonlinear Character of Resonance in Stretched Strings, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 38, pp. 461~471, 1964.
 - 8) 清水・末岡：ローラーチェーンの1/3分数調波振動(第1報, 多自由度系の理論解析), 日本機械学会論文集(第1部), 42巻, 356号, pp. 1096~1108, 1976.
 - 9) 末岡・田村：ローラーチェーンの1/3分数調波共振(第2報, 実験), 日本機械学会論文集(C編), 46巻, 410号, pp. 1217~1224, 1980.
 - 10) Bennett, J.A. and J.G. Easley : A Multiple-Degree-of-Freedom Approach to Nonlinear Beam Vibrations, *AIAA. J.*, Vol. 8, pp. 734~739, 1970.
 - 11) Takahashi, K. : A Method of Stability Analysis for Nonlinear Vibration of Beams, *J. Sound and Vibration*, Vol. 67, pp. 43~54, 1979.
 - 12) 山口・伊藤：単一ケーブルの三次元線形自由振動, 土木学会論文報告集, 第286号, pp. 29~36, 1979.
 - 13) 高橋・河原・山辺：はりおよび薄板の非線形振動の Galerkin 法による解析の収束性および安定性について, 土木学会論文報告集, 第293号, pp. 9~22, 1980.
 - 14) Nayfeh, A.H. and D.T. Mook, : *Nonlinear Oscillations*, John Wiley and Sons, Inc., 1979.
 - 15) Takahashi, K. : Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping, *J. Sound and Vibration*, Vol. 85, pp. 257~262, 1982.
 - 16) 高橋・米倉：係数励振振動系の不安定領域の計算法, 土木学会論文報告集, 第320号, pp. 165~169, 1982.
 - 17) 皆川：非線形振動の数値解析, 非線形運動方程式の定常解の問題—第4報, 日本建築学会論文報告集, 第279号, pp. 21~27, 1979.

(1983.8.31・受付)