

小型計算機による多径間平板構造の解析

ANALYSIS OF MULTI-SPAN PLATE STRUCTURES

BY A SMALL COMPUTER

岡村 宏 一*・石川 一 美**

By Hirokazu OKAMURA and Kazumi ISHIKAWA

The proposed method of structural analysis is suitable for the use of a small computer. The structures considered here consist of one way continuous rectangular plates with two opposite free edges and arbitrary intermediate supporting conditions. One of the features of this method is a drastic reduction in the number of degrees of freedom needed for numerical analysis in comparison with the FEM, and the other is the efficient formulation of a stiffness matrix method combined with a relaxation technique. As for the detailed procedure, the displacement functions in series form and the point-matching method are adopted to derive the stiffness matrix of large-size rectangular plate panels. The relaxation technique is developed in a way that is compatible with the stiffness matrix method. In addition, the initial unbalanced quantities required in the iteration process are given by an elementary beam theory.

1. ま え が き

最近、設計の分野においても、ミニコン・パソコンのような手元における小型計算機の普及は目覚ましいものがあり、構造解析の面での利用も増大しつつあるようである。近年、平板構造の解析においては、有限要素法が有力な手段として用いられてきたが、この方法はおもに大型計算機を対象として開発されたものであり、小型計算機を使用する場合には、それなりの解法上の工夫が必要であると思われる。このような見地から、特に実際構造に多くみられる多径間の平板構造を解析する場合の工夫として、離散化にあたって、自由辺、あるいは任意の支持条件に対応できる大形の平板要素を採択することや、全体の解式を構成するにあたって、還元法やリラクゼーション法に属する方法を用いることが考えられる。このうち還元法は骨組のみならず、平板構造にも応用されているが、平板構造の解析では、主として調和解析に立脚するために、境界条件や支持条件の制約を受けるうらみがある。また特に平板の解のように指数関数や双曲

線関数を含む場合には、格間の移行に伴い、演算中の桁落ちによる誤差の累積を生ずる難点があり、特別な工夫を要するといわれている¹⁾。一方、リラクゼーション法に属する方法は、骨組構造に関するものをはじめとして古くから研究されており^{2)~4)}、小型計算機を利用するためにそれらを再構成したものも見受けられる^{5),6)}。しかしながら、平板構造の解析に用いるには、目的に応じた適用の工夫や、実用上の効果について検討の余地があるように思われる。

本論文では、特に長大な多径間平板構造を、自由辺や任意の支持条件に対応できる大形の平板要素を採択するとともに、リラクゼーション法に属する一種の分配法を用いて解析することに着目し、その解析法について検討した。本解法を構成するにあたり、留意した諸点を挙げれば次のとおりである。

(1) 本解法は、手元における小型計算機を用いて構造解析を行うことを意図しているが、そのために構造物の規模(長さや径間数)を制限するわけではなく、むしろ、そのような小型計算機を用いて、長大な多径間平板構造の全体系、ならびに局所系の挙動を同時に解析し得る方法を探究したものである。

(2) (1)の観点に立てば、まず、解析の自由度を低減させる必要があり、このためには、離散化にあたって

* 正会員 工博 大阪工業大学教授 土木工学科
(〒535 大阪市旭区大宮 5-16-1)

** 正会員 東洋技研コンサルタント(株)研究室
(〒543 大阪市天王寺区悲日院町 8-11)

導入される平板要素が大きな領域をもつことが望ましく、一方では、本解法のような逐次近似による解析を行うにあたって、構造の全体ならびに局所の両面にわたって、実用上十分な精度をもつ収束値を保証する必要がある。大形要素の導入には種々の方法が考えられ、級数解を用いたものもあるが²⁾、要素の隅点などを含め、任意の材端条件に対応できるようなものは見当らない。ここではとりあえず、等方で相対2辺自由の長方形要素を対象とし、その解を級数解法によって求めた。また、他の相対2辺の節線に任意の条件を与え得るように、選点法を併用して要素の剛性マトリックスを作成した。次に、各要素の選点間の結合条件を、リラクゼーション法に属する1つの方法で与え、多径間平板構造に適用できる応力分配法を構成した。

(3) 周知のように、この種の解法においては、初期の概算値の導入が要点となる。一方、構造解析においては一般に概略計算法は存在するし、特に設計に際しては、はり理論によるものなど多くの慣用計算法が工夫されており、それらを概算値として利用できる。本解析では初期の概算値として、幅方向に平均化されたはり理論による解を用いた。これは、この種の構造の設計において、慣用的にしばしば用いられるものである。概算値は分配計算によって平板としての挙動を評価できるように修正される。また本解法は、計算の途上において、荷重の移動や構造条件の部分的な変更による修正も可能であり、小型計算機を対話的に利用するうえで有用である。

論文の後半では、解析の精度を確認するための基本的な例題、ならびに具体的な例として、実際構造にみられる多径間連続スラブ橋の実用的な問題についての解析結果を示し、本解法の有用性を検証した。

2. 平板要素 (曲げを受ける要素) の剛性方程式

(1) 基礎方程式と基本解

弾性変形は等方性薄板理論に支配され、境界条件はKirchhoffの仮定に従うものとする。このとき長方形板要素の基礎方程式、ならびに必要な変位と断面力の諸式は次のとおりである。

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y) \dots\dots\dots (1)$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} \\ V_y &= -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\} \end{aligned} \right\} R = 2 M_{xy} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 w, θ_x, θ_y : 変位成分, M_x, M_y, M_{xy} : モーメントの成分, V_x, V_y : 換算せん断力の成分, R : 隅角点定着力, $q(x, y)$: 板内荷重, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, E, ν : ヤング率, ポアソン比, h : 板厚。

次に相対2辺自由の大形の長方形要素を対象とし、図-1に示すような相対2辺 ($y=0, b$) が自由、ほかの2辺 ($x=0, l$) が単純支持された板が、任意の矩形等分布荷重 (強さ q)、ならびにその特別な場合である線荷重 (強さ p_r)、線モーメント (強さ m_r) を受ける場合の式 (1) の解を級数解法によって導入する。これらの解は、あと

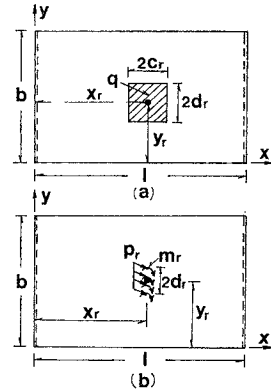


図-1 基本解を求めるための板要素

述べる板要素の剛性方程式を誘導する過程でそれぞれ、荷重項のベクトル、ならびに材端力と材端変位を結ぶ剛性マトリックスを求めるのに用いられる基本的なものである。

まず、荷重 q による解 w_q の特解 w_1 を $\begin{pmatrix} \sin \alpha_m x \\ \sin \beta_n y \end{pmatrix}$ で展開された Navier 解、同次解 w_2 を $\sin \alpha_m x$ で展開された Lévy 解によって与える。ただし $\alpha_m = m\pi/l$, $\beta_n = n\pi/b$ である。ここで、 w_1 は m, n に関する2重級数であるが、計算上の精度を保証するため、総和公式³⁾を用いて、 $\sin \alpha_m x$ に関する単級数と代数式に書き換える方法を探る。 w_q は次式のように表わされる。

$$w_q = w_1 + w_2 = q(F_{q1} + F_{q2}) = qF_q \dots\dots\dots (5)$$

ここで、係数 F_{q1} は Navier 解より前述の操作で、 F_{q2} は Lévy 解に含まれる積分定数を自由辺の条件 ($M_y = 0, V_y = 0$) を満足するように定めてそれぞれ次のように求まる。

$$F_{q1} = -\frac{\lambda l^4}{D\pi^4} \sum_m \frac{1}{m^4} \left[\kappa_m + \frac{2}{\lambda m\pi} \kappa_m' \right] L_m \sin \alpha_m x + \frac{l^4}{1440 D} HZ_q \dots\dots\dots (6)$$

$$F_{q2} = \frac{\lambda^2 l^4}{D\pi^3} \sum_m \frac{1}{m^3} \left[\kappa_{my} + \frac{2}{(1-\nu)\lambda m\pi} \kappa_{my}' \right] \cdot Q_m L_m \sin \alpha_m x \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $\lambda = b/l, m=1, 2, 3, \dots$

式 (6) 中の $L_m, \kappa_m, \kappa_m', H$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} L_m &= \sin \alpha_m x_r \sin \alpha_m c_r \\ \kappa_m &= K_1 \kappa_{m1} - K_2 \kappa_{m2} - K_3 \kappa_{m3} + K_4 \kappa_{m4} \\ \kappa_m' &= K_1 \kappa_{m1}' - K_2 \kappa_{m2}' - K_3 \kappa_{m3}' + K_4 \kappa_{m4}' \\ H &= K_1(1 - Y_1) - K_2(1 - Y_2) - K_3(1 - Y_3) \\ &\quad + K_4(1 - Y_4) \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

ここで、 $Y_1 = (y + y_r - d_r)/b$, $Y_2 = (y + y_r + d_r)/b$, $Y_3 = (y - y_r - d_r)/b$, $Y_4 = (y - y_r + d_r)/b$ で、 $0 \leq Y_{i=1,2,3,4} \leq 1$ のとき $K_{i=1,2,3,4} = 1$ とし、 $Y_1, Y_2 > 1$, もしくは $Y_3, Y_4 < 0$ のときは、 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 をそれぞれ $2 - Y_1, 2 - Y_2, -Y_3, -Y_4$ に置き換えて $K_{i=1,2,3,4} = -1$ とする。また、 $\kappa_{mi}, \kappa_{mi}'$ ($i=1, 2, 3, 4$), Z_q は

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{mi} &= [e^{-\lambda m \pi(1+Y_i)} - e^{-\lambda m \pi(1-Y_i)}] \rho_m^2 \\ &\quad + Y_i [e^{-\lambda m \pi Y_i} + e^{-\lambda m \pi(2+Y_i)}] \rho_m \\ \kappa_{mi}' &= [e^{-\lambda m \pi Y_i} - e^{-\lambda m \pi(2+Y_i)}] \rho_m \\ \rho_m &= (1 - e^{-2\lambda m \pi})^{-1} \\ Z_q &= \bar{K}_1 \bar{X}_1 - \bar{K}_2 \bar{X}_2 - \bar{K}_3 \bar{X}_3 + \bar{K}_4 \bar{X}_4 \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{X}_{i=1,2,3,4} &= X_i(8 - 20X_i^2 + 15X_i^3 - 3X_i^4), \\ X_1 &= (x + x_r - c_r)/l, \quad X_2 = (x + x_r + c_r)/l, \\ X_3 &= (x - x_r - c_r)/l, \quad X_4 = (x - x_r + c_r)/l \end{aligned}$$

で $0 \leq X_{i=1,2,3,4} \leq 1$ のとき $\bar{K}_{i=1,2,3,4} = 1$ とし、 $X_1, X_2 > 1$ もしくは $X_3, X_4 < 0$ のときは、 X_1, X_2, X_3, X_4 をそれぞれ、 $2 - X_1, 2 - X_2, -X_3, -X_4$ に置き換えて $\bar{K}_{i=1,2,3,4} = -1$ とする。式 (7) 中の $\kappa_{my}, \kappa_{my}', Q_m$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{my} &= [e^{-\lambda m \pi(1+\bar{y})} - e^{-\lambda m \pi(1-\bar{y})}] \rho_m^2 \\ &\quad + \bar{y} [e^{-\lambda m \pi \bar{y}} + e^{-\lambda m \pi(2+\bar{y})}] \rho_m \\ \kappa_{my}' &= [e^{-\lambda m \pi \bar{y}} - e^{-\lambda m \pi(2+\bar{y})}] \rho_m \\ Q_m &= \frac{\{(1-\nu)\omega_m + (3-\nu)\omega_m'/\lambda m \pi\}}{(3+\nu)^2 - (1-\nu)^2 \lambda m \pi c_0^2} * \\ &\quad * \frac{\{(3+\nu)b_0 + (1-\nu)\lambda m \pi c_0^2\}}{\dots} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \omega_m &= [e^{-\lambda m \pi(1-\bar{y}_1)} + e^{-\lambda m \pi(1+\bar{y}_1)} - e^{-\lambda m \pi(1-\bar{y}_2)} \\ &\quad - e^{-\lambda m \pi(1+\bar{y}_2)}] \rho_m^2 + [\bar{y}_1 \{e^{-\lambda m \pi \bar{y}_1} - e^{-\lambda m \pi(2+\bar{y}_1)}\} \\ &\quad - \bar{y}_2 \{e^{-\lambda m \pi \bar{y}_2} - e^{-\lambda m \pi(2+\bar{y}_2)}\}] \rho_m \\ \omega_m' &= [e^{-\lambda m \pi \bar{y}_1} + e^{-\lambda m \pi(2+\bar{y}_1)} - e^{-\lambda m \pi \bar{y}_2} - e^{-\lambda m \pi(2+\bar{y}_2)}] \rho_m \\ \bar{y} &= y/b, \quad \bar{y}_1 = (y_r - d_r)/b, \quad \bar{y}_2 = (y_r + d_r)/b, \\ b_0 &= (1 + e^{-2\lambda m \pi}) \rho_m, \quad c_0 = 2e^{-\lambda m \pi} \rho_m \end{aligned}$$

式 (5) によって与えられる w_q を式 (2), (3), (4) に代入すれば、荷重 q を受ける場合の変位、断面力に関する諸式が得られる。

同様に、図-1 (b) に示す線荷重 p_r , 線モーメント m_r による解をそれぞれ、 w_p, w_m とすれば、これらを同時に受ける板の解 w は次式で表わされる。

$$w = w_p + w_m = p_r F_p + m_r F_m \dots (11)$$

ところで、荷重 p_r, m_r は荷重 q の特殊な場合であるから、式 (11) の p_r の係数 F_p は式 (5) の F_q に関し

て分布幅の極限をとり、 m_r の係数 F_m は F_p に偶力としての微分操作を加えて求める。すなわち

$$F_p = \lim_{c_r \rightarrow 0} (F_q/2c_r), \quad F_m = \frac{\partial F_p}{\partial x_r} \dots (12)$$

式 (11), (12) によって与えられる w_p, w_m をそれぞれ式 (2), (3), (4) に代入すれば、荷重 p_r, m_r を受ける場合の変位、断面力に関する必要な諸式が得られる。

(2) 剛性方程式の誘導の過程

図-1 に示した辺長 l, b の板は、相対 2 辺 ($x=0, l$) が単純支持されたものであった。ここでは、これらの 2 辺 (以下、節線 i, j とよぶ) に、任意の材端力と材端変位を与えることのできる辺長 l, b の板要素の解を、前述の基本解を用いて導入する。そのために、図-2(a) に示すように、図-1 に示した板の x 方向の辺長 l を 2 倍にした板を考え、節線 j に相当する中央線 ($x=l$) 上に分布する線荷重と線モーメントを与える。また本法では、これらの力の分布を、先に発表した解法⁹⁾と同様に、節線上の細かく分割された区間で等分布する線荷重と線モーメントの重ね合わせによって与える。すなわち図-2(c) に示すように、節線上の選点 (l, y_r) を挟んでとった小区間 ($2d_r$) に、強さ $2p_{rj}, 2m_{rj}$ の線荷重と線モーメントを作用させる。図-2(a) に示す板の解 w は前述の基本解 (11) よりただちに求まり、次のように表わされる。

$$w = 2 \sum_r p_{rj} \bar{F}_p + 2 \sum_r m_{rj} \bar{F}_m \dots (13)$$

ここで係数 \bar{F}_p, \bar{F}_m は、式 (12) で得られる F_p, F_m において l を $2l$ に x_r を l に置き換えたもので、 r に関する総和は、前述の分割区間における分布力の重ね合わせを表わす。式 (13) を式 (2), (3), (4) に代入すれば、変位、断面力に関する必要な諸式が得られる。以上

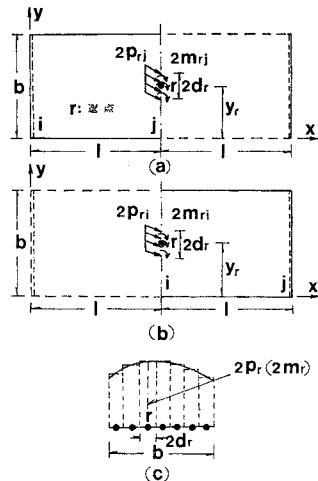


図-2 剛性方程式を求めるための板要素と力の分布の近似

の過程から、図-2 (a) の左半分に着目したとき、節線荷重 $2p_{rj}$ および $2m_{rj}$ による節線 i 上の選点 $(0, y_r)$ の換算せん断力 $(V_x)_{ri}$ 、曲げモーメント $(M_x)_{ri}$ 、たわみ w_{ri} 、たわみ角 $(\theta_x)_{ri}$ 、ならびに節線 j 上の選点 (l, y_r) の諸値 $(V_x)_{rj}$ 、 $(M_x)_{rj}$ 、 w_{rj} 、 $(\theta_x)_{rj}$ がそれぞれ求まる。ただし $r=1, 2, 3, \dots, N$ 、 N は節線上にとった選点の個数である。しかもこの場合、節線 j 上の選点 (l, y_r) においては、線荷重による $(V_x)_{rj}$ は p_{rj} 、 $(\theta_x)_{rj}$ は 0、選点 $(0, y_r)$ においては $(M_x)_{ri}$ 、 w_{ri} がそれぞれ 0 となり、精度のうえで有利である (以上を Case 1 とする)。

次に、図-2 (b) に示すように板の右半分に着目し、中央線を節線 i 、端辺 $(x=2l)$ を節線 j とし、Case 1 と同様に節線 i 上の節線荷重 $2p_{ri}$ 、 $2m_{ri}$ を作用させれば、これらの荷重による節線 i, j 上の選点 (l, y_r) 、 $(2l, y_r)$ の断面力、変位が Case 1 と同様の操作で求まる (以上を Case 2 とする)。さらに Case 1 と Case 2 の結果を重ね合わせることに、次の関係を得る。

$$\begin{Bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & b_{ii2} & a_{ij1} & b_{ij1} \\ \bar{a}_{ii2} & I & 0 & 0 \\ a_{ji2} & b_{ji2} & I & b_{jj1} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{jj1} & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i \\ m_i \\ p_j \\ m_j \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} p_i \\ m_i \\ p_j \\ m_j \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{ii2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{ii2} & \bar{c}_{ij1} & d_{ij1} \\ 0 & 0 & c_{jj1} & 0 \\ \bar{c}_{ji2} & d_{ji2} & 0 & d_{jj1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i \\ m_i \\ p_j \\ m_j \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} p_i \\ m_i \\ p_j \\ m_j \end{Bmatrix} \quad (15)$$

ここで、 V_i, M_i, V_j, M_j : 節線 i, j の選点における材端力のベクトル、 $w_i, \theta_i, w_j, \theta_j$: 同様に材端変位のベクトル、 p_i, m_i, p_j, m_j : 図-2 に示した節線荷重のベクトル、 a, b, c, d : 節線荷重の影響係数の部分マトリックス、 I : 単位マトリックス、添字 1, 2 は Case 1, 2 に相当する。

式 (14), (15) より節線荷重のベクトルを消去すると

$$\begin{Bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = [A][B]^{-1} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [K_P] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ここで $[K_P]$ は曲げを受ける場合の剛性マトリックス。

一方、図-1 (a) を参照すれば、板内荷重による支持辺 i, j の選点の変位と断面力は前述のように式 (5) から求まる。この変位を式 (16) の節線変位で相殺し、断面力を重ね合わせると荷重項のベクトルが得られる。すなわち

$$\begin{Bmatrix} V_{if} \\ M_{if} \\ V_{jf} \\ M_{jf} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{iq} \\ M_{iq} \\ V_{jq} \\ M_{jq} \end{Bmatrix} - [K_P] \begin{Bmatrix} w_{iq} \\ \theta_{iq} \\ w_{jq} \\ \theta_{jq} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ここで、 $V_{if}, M_{if}, V_{jf}, M_{jf}$: 節線 i, j の選点における荷重項のベクトル、 $V_{iq}, M_{iq}, V_{jq}, M_{jq}$: 図-1 (a) の板の支持辺の選点における板内荷重 q による断面力のベクトル、 $w_{iq}, \theta_{iq}, w_{jq}, \theta_{jq}$: 同様に変位のベクトル、式 (16) と (17) を組み合わせて剛性方程式が

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{if} \\ f_{jf} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

の形に得られる。ここで、 $f_i, f_j, \delta_i, \delta_j$: 節線 i, j の選点における材端力、材端変位のベクトル、 f_{if}, f_{jf} : 同様に荷重項のベクトル。

なお、以上の剛性方程式を誘導する過程で、板要素の隅点における拘束力 R が残る。これらは図-2 に示した節線荷重に対して、ほかの断面力と同様に求められ、次の関係を得る。

$$\begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_{ii2} & e_{ij1} & g_{ij1} \\ e_{ji2} & g_{ji2} & 0 & g_{jj1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i \\ m_i \\ p_j \\ m_j \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} p_i \\ m_i \\ p_j \\ m_j \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ここで、 R_i, R_j : 節線 i, j 上の隅点における拘束力のベクトル、 e, g : 節線荷重の影響係数の部分マトリックス、添字 1, 2 は Case 1, 2 に相当する。

式 (15), (19) より

$$\begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} = [C][B]^{-1} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [\bar{K}] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (20)$$

また、式 (17) と同様の操作によって荷重項のベクトル R_{if}, R_{jf} が求まり

$$\begin{Bmatrix} R_{if} \\ R_{jf} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{iq} \\ R_{jq} \end{Bmatrix} - [\bar{K}] \begin{Bmatrix} w_{iq} \\ \theta_{iq} \\ w_{jq} \\ \theta_{jq} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

ここで、 R_{iq}, R_{jq} : 図-1 (a) の板の隅点における板内荷重 q による定着力のベクトル。

式 (20) と (21) を組み合わせて簡単に表わすと

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{ii} & \bar{K}_{ij} \\ \bar{K}_{ji} & \bar{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{if} \\ \bar{f}_{jf} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

ここで、 \bar{f}_i, \bar{f}_j : 節線 i, j の隅点における拘束力のベクトル、 $\bar{f}_{if}, \bar{f}_{jf}$: 同様に荷重項のベクトル。

3. 平板要素 (面内力を受ける要素) の剛性方程式

(1) 基礎方程式と基本解

注) 例外として隅点の直上の線モーメントに対してのみ R の収束値が得られないが、この場合は板要素全体のつり合いから求めることができる。

弾性変形は等方性シャイベ理論に支配されるものとし、応力関数を導入すれば、長方形板要素の基礎方程式、ならびに必要な断面力と変位の諸式は次のようになる。

$$h \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) = -\nu \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int s_x dx + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int s_y dy \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} N_x &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \int s_x dx, & N_y &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \int s_y dy \\ N_{xy} &= -h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \int \epsilon_x dx, & v &= \int \epsilon_y dy \\ \epsilon_x &= \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y), & \epsilon_y &= \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここで、 ϕ ：応力関数、 s_x, s_y ：面内荷重成分の強さ、 N_x, N_y, N_{xy} ：面内力の成分、 $u, v, \epsilon_x, \epsilon_y$ ：変位ならびにひずみの成分。

次に、相対 2 辺自由の大形の長方形板要素を対象とし、**図-3** (a) に示すような相対 2 辺 ($y=0, b$) が自由、ほかの 2 辺 ($x=0, l$) で $N_x=0, v=0$ となるように支持されたシャイベが、正対称に配置された x, y 方向の矩形等分布面内荷重 (強さ s, t) を受ける場合と、その特別な場合である **図-3** (b) に示すような端辺に作用する線荷重 (強さ s_r) ならびに中央線上に作用する線荷重 (強さ $2t_r$) を受ける場合について、式 (23) の解を級数解法によって導入する。これらの解は、**2. (1)** の場合と同じく、板要素の剛性方程式を誘導する過程で用いられる基本的なものである。

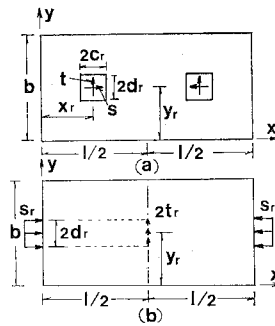


図-3 基本解を求めるためのシャイベ要素

まず、荷重 s による解 ϕ_s の特解 ϕ_1 を、 $\begin{pmatrix} \sin \alpha_m x \\ \sin \beta_n y \end{pmatrix}$ で展開された Navier 解、同次解 ϕ_2 を、 $\sin \alpha_m x$ で展開された Lévy 解によって与える。

ここで、 ϕ_1 を **2.** の基本解と同様に、総和公式⁸⁾を用いて $\sin \alpha_m x$ に関する単級数と代数式に書き換える。 ϕ_s は次式のように表わされる。

$$\phi_s = \phi_1 + \phi_2 = s(G_{s1} + G_{s2}) = sG_s \quad (26)$$

ここで、係数 G_{s1} は Navier 解より、 G_{s2} は Lévy 解に含まれる積分定数を自由辺の条件 ($N_y=0, N_{xy}=0$)

を満足するように定めてそれぞれ次のように求まる。

$$G_{s1} = \frac{\lambda l^3}{h\pi^3} \sum_m \frac{1}{m^3} \left\{ (1+\nu)\kappa_m + \frac{2\nu}{\lambda m\pi} \kappa_m' \right\} \cdot L_m' \sin \alpha_m x + \frac{\nu l^3}{768 h} H Z_s \quad (27)$$

$$G_{s2} = -\frac{\lambda^2 l^3}{h\pi^2} \sum_m \frac{1}{m^2} (\kappa_{my}' - \bar{\kappa}_{my}) R_m L_m' \sin \alpha_m x \quad (28)$$

ここで、 $m=1, 3, 5, \dots$

式 (27) 中の κ_m, κ_m', H は式 (8) で、 L_m', Z_s は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} L_m' &= \cos \alpha_m x_r \sin \alpha_m c_r \\ Z_s &= \bar{K}_1 X_1' - \bar{K}_2 X_2' + \bar{K}_3 X_3' - \bar{K}_4 X_4' \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ここで、 $X'_{i=1,2,3,4} = 1 - 6X_i^2 + 4X_i^3, X_i, \bar{K}_i$ は式 (9) のものと同じである。

式 (28) 中の κ_{my}' は式 (10) で、 $\bar{\kappa}_{my}, R_m$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\kappa}_{my} &= \bar{y} [e^{-\lambda m\pi \bar{y}} + e^{-\lambda m\pi(1-\bar{y})} - e^{-\lambda m\pi(1+\bar{y})} - e^{-\lambda m\pi(2+\bar{y})}] \rho_m \\ R_m &= \frac{(1+\nu)\omega_m - (1-\nu)\omega_m' / \lambda m\pi}{1 - \lambda m\pi c_0} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$\bar{y}, \omega_m, \omega_m', c_0$ は式 (10) のものと同じである。

一方、荷重 t による解 ϕ_t は次式のように表わされる。

$$\phi_t = t(G_{t1} + G_{t2}) = tG_t \quad (31)$$

G_{t1}, G_{t2} は荷重 s の場合と同様に次のように求まる。

$$G_{t1} = \frac{\lambda l^3}{h\pi^3} \sum_m \frac{1}{m^3} \left[(1+\nu)\bar{\kappa}_m + \frac{(3+\nu)}{\lambda m\pi} \bar{\kappa}_m' \right] \cdot L_m \sin \alpha_m x + \frac{l^3}{1536 h} \bar{H} Z_t \quad (32)$$

$$G_{t2} = -\frac{\lambda^2 l^3}{h\pi^2} \sum_m \frac{1}{m^2} (\bar{\kappa}_{my}' - \bar{\kappa}_{my}) S_m L_m \sin \alpha_m x \quad (33)$$

ここで、 $m=1, 3, 5, \dots$

式 (32) 中の L_m は式 (8) で、 $\bar{\kappa}_m, \bar{\kappa}_m', \bar{H}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\kappa}_m &= K_1 \bar{\kappa}_{m1} - K_2 \bar{\kappa}_{m2} + K_3 \bar{\kappa}_{m3} - K_4 \bar{\kappa}_{m4} \\ \bar{\kappa}_m' &= K_1 \bar{\kappa}_{m1}' - K_2 \bar{\kappa}_{m2}' + K_3 \bar{\kappa}_{m3}' - K_4 \bar{\kappa}_{m4}' \\ \bar{H} &= K_1 \bar{Y}_1 - K_2 \bar{Y}_2 + K_3 \bar{Y}_3 - K_4 \bar{Y}_4 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ここで、 $\bar{Y}_{i=1,2,3,4} = 2 - 6Y_i + 3Y_i^2, K_{i=1,2,3,4}, Y_{i=1,2,3,4}$ は式 (8) のものと同じである。また

$$\left. \begin{aligned} \bar{\kappa}_{mi} &= -[e^{-\lambda m\pi(1-Y_i)} + e^{-\lambda m\pi(1+Y_i)}] \rho_m^2 \\ &\quad + Y_i [e^{-\lambda m\pi Y_i} - e^{-\lambda m\pi(2+Y_i)}] \rho_m \\ \bar{\kappa}_{mi}' &= [e^{-\lambda m\pi Y_i} + e^{-\lambda m\pi(2+Y_i)}] \rho_m \\ Z_t &= \bar{K}_1 \bar{X}_1' - \bar{K}_2 \bar{X}_2' - \bar{K}_3 \bar{X}_3' + \bar{K}_4 \bar{X}_4' \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここで、 $\bar{X}'_{i=1,2,3,4} = X_i(1-X_i), \bar{K}_{i=1,2,3,4}, X_{i=1,2,3,4}$ は式 (9) のものと同じである。

式 (33) 中の $\bar{\kappa}_{my}', \bar{\kappa}_{my}$ は式 (10), (30) で、 S_m は次式で与えられる。

$$S_m = \frac{(1+\nu)\bar{\omega}_m + 2(\bar{\omega}_m' - H)/\lambda m \pi}{1 - \lambda m \pi c_0} \dots\dots\dots(36)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_m &= [e^{-\lambda m \pi(1-\bar{y}_1)} - e^{-\lambda m \pi(1+\bar{y}_1)} - e^{-\lambda m \pi(1-\bar{y}_2)} \\ &\quad + e^{-\lambda m \pi(1+\bar{y}_2)}] \rho_m^2 + [\bar{y}_1 \{e^{-\lambda m \pi \bar{y}_1} + e^{-\lambda m \pi(2+\bar{y}_1)}\} \\ &\quad - \bar{y}_2 \{e^{-\lambda m \pi \bar{y}_2} + e^{-\lambda m \pi(2+\bar{y}_2)}\}] \rho_m \\ \bar{\omega}_m' &= [e^{-\lambda m \pi \bar{y}_1} - e^{-\lambda m \pi(2+\bar{y}_1)} - e^{-\lambda m \pi \bar{y}_2} + e^{-\lambda m \pi(2+\bar{y}_2)}] \rho_m \end{aligned}$$

H は式 (8), $\bar{y}_1, \bar{y}_2, c_0$ は式 (10) のものと同じである。

式 (26), (31) によって与えられる ϕ_s, ϕ_t を式 (24), (25) に代入すれば、荷重 s, t を受ける場合の断面力、変位に関する必要な諸式が得られる。同様に、図-3(b) に示す線荷重 s_r, t_r による解をそれぞれ ϕ_{sr}, ϕ_{tr} とすれば、これらを同時に受ける板の解 ϕ_r は

$$\phi_r = \phi_{sr} + \phi_{tr} = S_r G_{sr} + t_r G_{tr} \dots\dots\dots(37)$$

ところで、荷重 s_r, t_r はそれぞれ、前述の面内荷重 s, t の特別の場合であるから、式 (37) の係数 G_{sr}, G_{tr} はそれぞれ、式 (26), (31) の G_s, G_t に関して分布幅の極限をとり、位置の変更を行って求まる。すなわち

$$G_{sr} = \lim_{c_r \rightarrow 0} (G_s/2 c_r)_{x_r=0}, \quad G_{tr} = \lim_{c_r \rightarrow 0} (G_t/2 c_r)_{x_r=l/2} \dots\dots\dots(38)$$

式 (37), (38) によって与えられる ϕ_{sr}, ϕ_{tr} を式 (24), (25) に代入すれば、荷重 s_r, t_r を受ける場合の断面力、変位に関する必要な諸式が得られる。

(2) 剛性方程式の誘導の過程

ここでは、2. (2) の曲げを受ける要素の場合に用いたのと同様の方法で、端辺 ($x=0, l$, 以下節線 i, j とよぶ) に、任意の材端力と材端変位を与えることのできる面内力を受ける辺長 l, b の板要素の解を、前述の基本解 (37) を用いて導入する。そのために、図-3 (b) に示した板の x 方向の辺長 l を 2 倍にした板を考え、また 2. (2) と同様の方法により線荷重 s_r, t_r を重ね合わせ

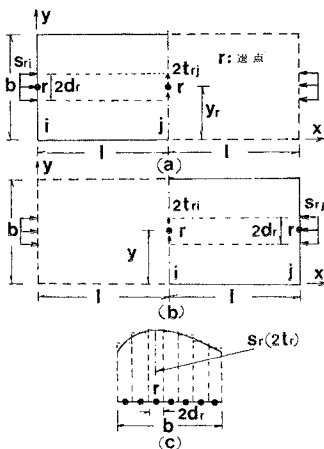


図-4 剛性方程式を求めるためのシャイベ要素と力の分布の近似

た分布荷重を与える。すなわち、図-4 (a) に示す板の解 ϕ は前述の解 (37) を参照してただちに求まり、次のように表わされる。

$$\phi = \sum_r s_r \bar{G}_{sr} + \sum_r t_r \bar{G}_{tr} \dots\dots\dots(39)$$

ここで係数 $\bar{G}_{sr}, \bar{G}_{tr}$ は、式 (38) の G_{sr}, G_{tr} において l を $2l$ に置き換えたもので、 r に関する総和は、図-4 (c) に示す分割区間における分布力の重ね合わせを表わす。式 (39) を式 (24), (25) に代入すれば、断面力、変位に関する必要な諸式が得られる。以上の過程から、図-4 (a) の左半分に着目したとき、節線荷重 s_{ri} および $2t_{rj}$ による節線 i 上の選点 ($0, y_r$) の軸力 (N_x) $_{ri}$, せん断力 (N_{xy}) $_{ri}$, 変位 u_{ri}, v_{ri} , ならびに節線 j 上の選点 (l, y_r) の諸値 (N_x) $_{rj}$, (N_{xy}) $_{rj}$, u_{rj}, v_{rj} がそれぞれ求まる。ただし $r=1, 2, 3, \dots, N$, N は節線上にとった選点の個数である (以上を Case 1 とする)。

次に、図-4 (b) に示すように板の右半分に着目し、中央線を節線 i , 端辺 ($x=2l$) を節線 j とし、Case 1 と同様に節線荷重 $2t_{ri}, s_{rj}$ を作用させれば、これらの荷重による節線 i, j 上の選点 (l, y_r), ($2l, y_r$) の断面力、変位が求まる (以上を Case 2 とする)。さらに Case 1, 2 を重ね合わせ、2. (2) の式 (14), (15), (16) を求めたのと同様の操作で節線 i, j の選点における材端力、ならびに材端変位のベクトルと、図-4 に示した節線荷重のベクトルとの関係から剛性マトリックスが得られる。一方、図-3 (a) の板内荷重 s, t による節線 i, j の断面力と変位を、式 (26), (31) の ϕ_s, ϕ_t の辺長を 2 倍に変更したものから求め、2. (2) の式 (17) を求めたのと同様の操作によって荷重項のベクトルが得られる。以上を組み合わせ、面内力を受ける要素の剛性方程式が式 (18) と同じ形に表わされるが、これらの過程は、曲げを受ける要素の場合と同様であり、式の記述は省略する。

4. リラクゼーション (材端力の分配) の方法

最初に概算値としての初期変位 (たとえばはりの解など) を導入すると、各板要素の節線には、その状態での材端力の不平衡を生ずる。そこで、着目する節線の支持条件、つり合い条件、変位の適合条件を考慮し、相対する節線を固定した状態で材端力を分配し、不平衡量を修正する。この操作を順次各節線に及ぼし、適当な収束値を得るまで反復する。

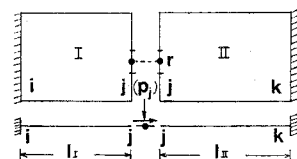


図-5 ある選点において力の分配を受けるパネル

いま、図-5 に示す辺長の異なる2つの板要素（パネル）I, II の節線 j に着目したとき、選点 r における各パネルの材端力は、反覆 t 回の時点で式 (18) の表示により次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \{f_{j1}^t\} &= \{f_{j1}^{t-1}\} + \{\Delta f_{j1}^t\}, \\ \{f_{j2}^t\} &= \{f_{j2}^{t-1}\} + \{\Delta f_{j2}^t\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

ここに、 f_{j1}^{t-1} , f_{j2}^{t-1} : 反覆 $t-1$ 回の時点でのパネル I, II の材端力のベクトル, Δf_{j1}^t , Δf_{j2}^t : 反覆 t 回の時点でのパネル I, II の材端力の修正量のベクトル。

次に、反覆 t 回の時点でのパネル I, II の材端変位の修正量のベクトルを $\Delta \delta_{j1}^t$, $\Delta \delta_{j2}^t$ とすれば、この時点で、相対する節線を固定することにより、式 (18) から $\{\Delta f_{j1}^t\} = [K_{j11}]\{\Delta \delta_{j1}^t\}$, $\{\Delta f_{j2}^t\} = [K_{j22}]\{\Delta \delta_{j2}^t\}$ (41)

選点における材端力のつり合いは $\{f_{j1}^t\} + \{f_{j2}^t\} + \{p_j^t\} = \{0\}$ (42) ここで、 p_j^t : 反覆 t 回の時点での選点における外力（支持条件による反力を含む）のベクトル。

式 (42) に式 (40), (41) ならびに変位の適合条件 $\{\Delta \delta_{j1}^t\} = \{\Delta \delta_{j2}^t\} = \{\Delta \delta_j^t\}$

を代入すると、修正変位量 $\Delta \delta_j^t$ は次式で求まる。
 $\{\Delta \delta_j^t\} = -[K_{j11} + K_{j22}]^{-1} [\{p_j^t\} + \{f_{j1}^{t-1}\} + \{f_{j2}^{t-1}\}]$ (43)

したがって、各パネルの選点における反覆 t 回の時点での材端力の修正量は、式 (18) を考慮して次式で求まる。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta f_{i1}^t\} &= [K_{i11}]\{\Delta \delta_j^t\} \\ \{\Delta f_{j1}^t\} &= [K_{j11}]\{\Delta \delta_j^t\} \\ \{\Delta f_{j2}^t\} &= [K_{j22}]\{\Delta \delta_j^t\} \\ \{\Delta f_{k2}^t\} &= [K_{k22}]\{\Delta \delta_j^t\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

ただし、曲げを受けるパネルの場合には、前述のように隅角点に拘束力を生ずるので、その不平衡力を同時に解除しなければならない。このときの隅点の拘束力の修正量は、式 (22) を考慮して次式で求まる。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta R_{i1}^t\} &= [\bar{K}_{i11}]\{\Delta \delta_j^t\} \\ \{\Delta R_{j1}^t\} &= [\bar{K}_{j11}]\{\Delta \delta_j^t\} \\ \{\Delta R_{j2}^t\} &= [\bar{K}_{j22}]\{\Delta \delta_j^t\} \\ \{\Delta R_{k2}^t\} &= [\bar{K}_{k22}]\{\Delta \delta_j^t\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

ここで、節線 j における修正量 ΔR_{j1}^t , ΔR_{j2}^t をつり合わせるために、図-6 に示すような、該当する点に調整力 $\Delta \bar{P}_1$, $\Delta \bar{P}_2$ を作用させ節線 i , k を固定した板の解を重ね合わせる。この解は、集中力 $\Delta \bar{P}$ の係数として式 (12) の線荷重に対する係数 F_p に関して分布幅の極限

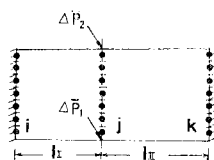


図-6 隅点に作用させる調整力

$$F_{\Delta \bar{P}} = \lim_{d_r \rightarrow 0} (F_p / 2 d_r) \dots\dots\dots (46)$$

をとった基本解を用いることによって得られる。ここで

$$\Delta \bar{P} = \begin{Bmatrix} \Delta \bar{P}_1 \\ \Delta \bar{P}_2 \end{Bmatrix} = \Delta R_{j1}^t + \Delta R_{j2}^t \dots\dots\dots (47)$$

したがって、図-6 の板の各節線の材端力を Δf^{t*} , 節線 j の材端変位を $\Delta \delta_j^{t*}$ とするとき、曲げを受けるパネルの反覆 t 回の時点での修正量は

$$\Delta \bar{f}^t = \Delta f^t + \Delta f^{t*}, \quad \Delta \bar{\delta}_j^t = \Delta \delta_j^t + \Delta \delta_j^{t*} \dots\dots\dots (48)$$

として与えることができる。

5. 数値計算例

ここで検討した主な点を挙げれば次のとおりである。

(i) まず、2.3 に提示した剛性方程式、および 4. で述べたリラクゼーション法の適用性をみるために、厳密解が求まり、しかも板としての特徴をもつ基本的なモデルを若干のパネルに分割して計算し、解の収束性と精度を調べた。

(ii) 次に、非常に多くのパネルをもつモデルについてその全体系、ならびに局所系における解の収束性と精度を調べた。

(iii) 影響面作成の場合のように、荷重が移動する場合についての本法の適用性を調べた。

(1) 曲げを受ける問題

図-7 (a) は、前述の検証項目 (i) に属するモデルの一例で、図のような偏った荷重を受ける相対2辺自由、ほかの2辺が単純支持された単一板を、同図 (b) に示す分割モデルによって3分割し、本法による計算結果を厳密解と比較した。なお、計算にはミニコン (OKITAC SYSTEM 50), パソコン (NEC PC-9801) の双方を用い、単精度で計算している。

初期の概算値として、荷重を幅方向に平均化したはりのたわみを各節線上の選点に導入した。このとき、板の特性との相違によって、材端力の初期の不平衡量（修正量）を生ずる。リラクゼーションは5回の反覆によって有効数字3桁の収束をみた。ここで1回とは、板の左端

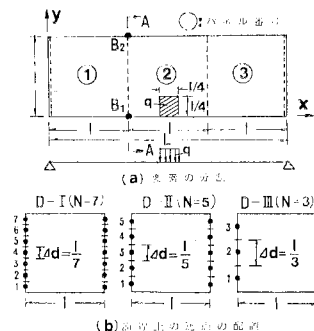


図-7 偏心荷重を受ける単一板 ($\nu=0.3$)

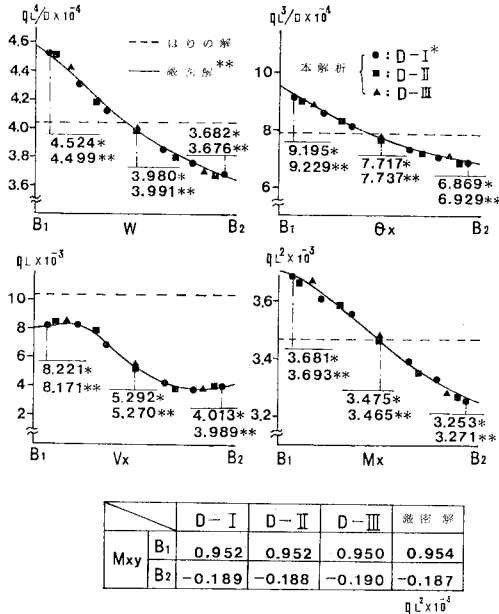


図-8 変位と断面力の分布 (A-A 断面)

から右端への1回のリラクゼーションのことである。このような収束の様子は、各選点、また選点の各分割数 (N=3, 5, 7) において同様であった。

図-8 は本解析値と厳密解 (板を分割せずに求めた級数解) を比較したものであるが、分割数のいずれの場合でも、選点上では満足すべき値を得ている。また図中の表でパネルの隅点の拘束力の不平衡を同時に修正して得られた節線の両端におけるねじりモーメントを厳密解と比較しているが、これらについても同様の結果を得ている。以上の結果を通じて本解析値の厳密解に対する誤差は1%台にとどまっている。なお、同様の荷重が板中央に作用した場合、中央のパネルに等分布荷重が満載した場合についても同様の結果を得ているが、紙数の都合でデータを割愛する。

次に、図-9 は、前述の検証項目 (ii) に属するモデルで、全面等分布荷重を受ける相対2辺自由、端辺単純支持、中間支点で部分的にばね支持される10径間連続板を、図のように10、20、40のパネルに分割したそれぞれの場合について本法による解析を行った。また前題を参考に N=7 とした。初期の概算値としては、支点のばねを幅方向に平均化したはりの解を導入した。この場合も5回の反覆で有効数字3桁の収束をみた。この結果と前述の結果を勘案すれば、パネル数のいかにかわらず、同様の反覆回数で収束値が期待できることがわかる。図-10 (a) は全体のモードを中央線上の M_x の分布についてみたもので、ここでもパネル数のいかにかわらず安定した解が得られている。同図 (b) は支持節線上における M_x の分布を示したもので、部分支持によ

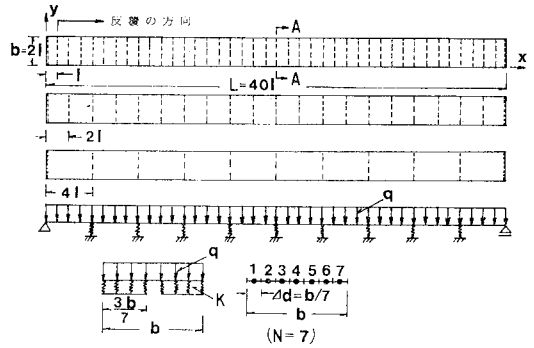
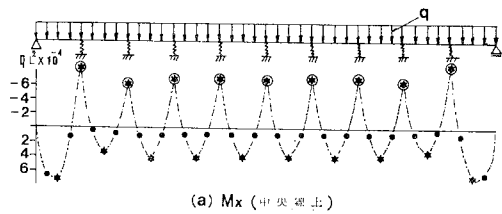
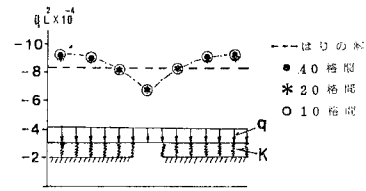


図-9 多径間連続板の要素の分割と支持条件 (K:ばね定数=0.05 E, ν=1/6)



(a) M_x (中央線上)



(b) M_x (A-A 断面)

図-10 多径間連続板の曲げモーメントの分布

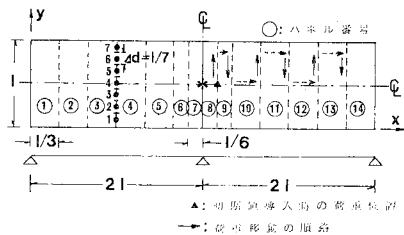


図-11 影響面を作成する2径間連続板の要素の分割と荷重移動の順路 (ν=0)

る局所のモードが、全体のモードと同時に得られていることがわかる。

図-11 は、前述の検証項目 (iii) に属するモデルで、より実用的な問題として、選点上の荷重の移動による影響面を作成する場合の本法の適用性を調べたものである。まず最初の荷重状態において初期の概算値 (この場合、荷重を幅方向に平均化したはりの解) を導入し、前題同様のリラクゼーションを行って解を求める。次に順次荷重の移動を行うが、このとき前回の荷重状態の解を初期値として荷重の移動によって生ずる小さな不平衡力を反覆修正する。図-11 は、相対2辺自由、端辺単純

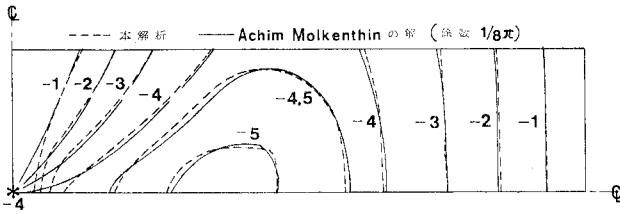


図-12 着目点 * の M_x の影響面

支持の 2 径間連続板の中間支持線の midpoint における M_x の影響面を求めるために設定したパネルの分割と、影響面作成時の選点間の荷重移動の順路を示す。この場合も $N=7$ とした。図-12 は本解析の結果と Achim Molkenhuth の解⁹⁾を比較したものであるが、図-11 の不等分割に対して、特異点近傍の影響の小さい(影響面体積の小さい)部分を除いて、実用上十分な結果を得ている。周知のように連続構造では、荷重の移動による影響は、荷重が作用している径間の近くの径間までであり、計算途上の判断によって、荷重作用点から遠く離れた径間では分配の操作を打ち切ることができる。すなわち、本法によって影響面を作成する場合、適当な概算値を導入すれば、最初の荷重状態において全体系をとらえ、後の荷重移動についてはズームアップの形で局所系をとらえる結果となる。

(2) 面内力を受ける問題

図-13 は検証項目 (i) に属するモデルで、図のように相対 2 辺自由、端辺が $\psi=0$ になるように支持された単一シャイベを、(1) の場合と同様に、図のように 3 分割 ($N=7$) し、本法による計算結果を厳密解と比較した。初期の概算値には荷重を幅方向に平均化した棒の解を用いた。リラクセーションは (1) の場合と同様に、5 回の反覆によって有効数字 3 桁の収束をみた。図-14

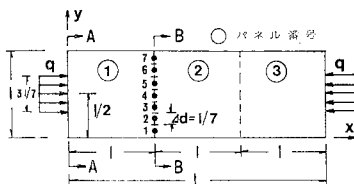


図-13 縁荷重を受ける単一シャイベの要素の分割 ($\nu=0.3$)

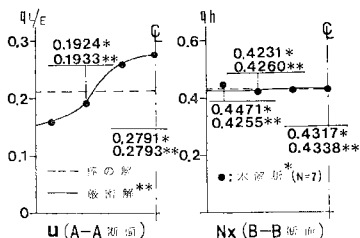


図-14 変位と断面力の分布

に主要値の検証結果を示す。節線の端部に近い選点の N_x のみ誤差が 5% と若干大きいですが、ほかの値の誤差はすべて 1% 以内にとどまっている。

次に、図-15 (a) は検証項目 (ii) に属するモデルで、同図 (b) にみるような 2 種類の幅で部分的なばね拘束を受ける相対 2 辺自由、端辺ローラーの 19 径間シャイベ (正対称構造) を 38 パネル ($N=12$) に分割し、温度変化による変形と軸方向応力を計算した。初期の概算値には、支点のばねを幅方向に平均化した棒の温度変化による変形を末端で拘束し、それを解除した場合の解を用いた。リラクセーションは 7 回の反覆で有効数字 3 桁の収束をみた。図-16 にそれぞれのばね支持の場合の解析値を示すが、軸方向応力については、支持幅による応力集中の様子が、全体の挙動と同時にとらえられていることがわかる。

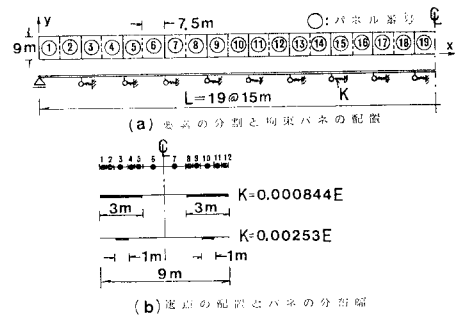


図-15 多径間連続シャイベの要素の分割と拘束条件 (K : ばね定数, $\nu=1/6$)

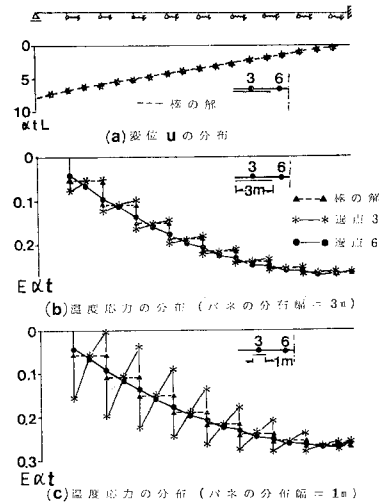


図-16 変位と温度応力の分布 (α : 線膨張係数, t : 温度)

6. ま と め

本研究は、小型計算機を用いて一方向の多径間平板構造の解析を試みたものである。以下におもな結論を簡単に列記する。

(1) 本解法で提示した相対2辺自由、他の2節線に任意の条件を与え得る大形の長方形板要素の剛性方程式は級数解法と選点法を組み合わせで求めたものであるが、種々の荷重状態における一方向の接続に対して、実用上十分と思われる精度を保持した。また、このような大形の要素を採択し、リラクゼーション法を併用して、長大な多径間構造の全体ならびに局所の挙動を小型計算機による単精度計算で解析することができた。

(2) 計算例では種々の接続条件をもつ3~40パネルの例題を扱ったが、応力分配の結果によれば、パネルの数のいかにかわからず、数回の反覆で有効数字3桁の収束をみ、厳密解との比較においても良好な結果が得られた。これらは曲げを受ける問題、面内力を受ける問題のいずれにおいても同様であった。また、図-11の例題にみるように、不等分割の場合にも良好な結果が得られている。

(3) この種の解法においては、適当な初期の概算値の導入が要点となるが、本解析では、板の特性を幅方向に平均化したはりの解を有効に用いることができた。これらの初期値は反覆計算の過程で、構造全体ならびに局所の挙動を同時にとらえ得るように修正される。また、計算の途上における結果を次のステップにおける初期値として繰り返すことにより、荷重の移動に対応できる影響面を作成することもわかった。すなわち本解法は、多径間平板構造の解析において、慣用計算における概算値を、その方法で評価できない問題を含めて、一連の計算の流れの中で修正できるもので、小型計算機を対話的に利用するうえで有用である。

(4) 参考までに本解析の計算時間は、ミニコン (OKITAC SYSTEM 50) を使用した場合、影響係数の計算に48分、板要素の剛性マトリックスの計算に7分、1パネルの分配に2分を要した。またパソコン (NEC

PC-9801) を使用した場合は、インタープリタ形式であったために約5倍の時間を要した。しかし今後 FORTRAN コンパイラ、BASIC コンパイラのソフトを利用すれば、このような時間差は解消できるものと思われる。なお、プログラムの所要メモリーは、解法の性質から幅方向の分割に左右され、最大10分割とした場合で21KBを必要とした。また影響係数、各分配後の材端力、変位のデータはディスクに格納されており、100パネルの接続を想定した場合、260KBを必要とした。元来、1つの構造物の設計にはそれ相当の時間を要するもので、その過程の中での小型計算機の活用については、さまざまな工夫の余地がある。そのような観点に立てば、本解法は多径間平板構造の解析において有用なものと考えられる。

参 考 文 献

- 1) 中村秀治：数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案，土木学会論文報告集，No. 289，pp. 43~53，1979。
- 2) Cross, H.: Simplified Rigid Frame Design, Proc. ACI, Vol. 26, pp. 170~183, 1930.
- 3) Cross, H.: Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments, Trans. ASCE, Vol. 96, pp. 1~10, 1932.
- 4) Kani, G.: Die Berechnung Mehrstöckiger Rahmen, Wittwer Verlag, 1956. (奥村敏恵・佐々木道雄共訳，技報堂，1961)
- 5) Lustgarten, P.: Iterative Method in Frame Analysis, ASCE, No. 89, ST 2, pp. 75~94, 1963.
- 6) Rubinstein, M.F.: Analysis of Large Complex Frames on a Small Computer, J. Franklin Inst., Vol. 280, No. 2, pp. 101~119, 1965.
- 7) Gutkowski, R.M. and C.K. Wang: Continuous Plate Analysis by Finite Panel Method, Proc. ASCE, Vol. 102, No. ST 3, pp. 629~643, 1976.
- 8) 岡村宏一・吉田公憲・島田 功・進藤泰男：構造物の1つの弾性立体解析法とその系統的応用，土木学会論文報告集，No. 190，pp. 61~74，1971。
- 9) Molkenthin, A.: Influence Surfaces of Two-Span Continuous Plates with Free Longitudinal Edges, Springer-Verlag, 1971.
- 10) 岡村宏一・石川一美：応力分配法による多径間平板構造の解析，土木学会第36回年次学術講演会講演概要集，1981。

(1983.8.30・受付)