

荷重方向の変動を考慮した構造物の最適設計

OPTIMUM STRUCTURAL DESIGN SUBJECT TO EXTERNAL FORCES
FROM UNCERTAIN DIRECTIONS

松井邦人*・山本一之**・菊田征勇***

By Kunihito MATSUI, Kazuyuki YAMAMOTO and Yukio KIKUTA

A computational method is presented for the optimum design of structures subject to external forces from uncertain directions. Finite element method is used for structural analysis so as to make use of the algorithm for optimizing various types of structures.

As the loading direction changes, the member forces will also vary accordingly. The direction most unfavorable to each member does not necessarily coincide each other. Hence in each member the critical member force and its corresponding direction need to be found before each optimization step. Constraints on stresses, bucklings, displacements and member sizes are considered. Also presented is the case in which multiple external forces vary their directions independently. Example problems are solved to show the validity of the optimization algorithm.

The concept presented here is useful for the optimum design of towers and marine structures.

1. はじめに

1960年に発表されたL.A. Schmitによる構造総合(Structural Synthesis)に関する論文, またその論文に続くSchmitおよび共同研究者による先駆的研究^{1,2)}以来, 構造物の最適化に関する研究は数多くなされ, 著しい進歩を遂げてきている. この分野における研究の流れは, i) 最適化アルゴリズムの開発, ii) 最適化理論の利用による構造特性の解明, iii) 構造物設計への適用, iv) 最適化理論の他分野への応用, に大別できる. 現在この中で主流をなしているのが, アルゴリズムの開発に関する研究である. 一方実用的な分野への応用はまだかなり遅れている. 欧米諸国では航空機産業, 自動車産業において広く最適化手法が取り入れられてはきているが^{3,4)}, 土木工学の分野への適用は大きく立遅れているのが現状である. この原因は実用面においては, 土木構造物は規格化された大量生産品ではないため, 最適化を行って費用を削減しようとする要求が小さいこと, また

一方計算面においては, 設計変数の数が多くなり, その結果収束性が悪く, 必ずしも最適解が得られない, あるいは得られたとしても計算機の利用経費がかかりすぎ, 全体としてのメリットがなくなることなど考えられる. 最適化理論が構造物の設計へ実際に利用されるようになるためには, 効率的で, 信頼できかつ汎用性のある最適化アルゴリズムの開発が必要不可欠である. 効率性に関しては, 計算機のハードウェアの面でも急速に進歩しており, 実質的な計算機利用経費の減少に向かっている. また汎用的な最適化のソフトウェアも数多く開発されてきてはいるが, 複雑な諸条件のもとで, 構造物の最適化を図ることは困難な場合も多い. したがって構造物を最適化する場合には, 単にその構造物の数学モデルに最適化のソフトウェアを適用するのではなく, 構造物の特性と与えられた諸条件を十分に利用することが, 効率的な最適化につながってくる. 最近注目されている最適性規準法⁵⁾は, 構造物の特性を十分に考慮した最適化手法といえるであろう.

本論文においては上記のことを踏まえ, 構造解析法の特性を生かし, 複雑な荷重条件下の構造物最適化の一手法を提案している.

構造物の最適化に関する研究はその大多数が, 構造物に作用する外力を, その大きさ, 方向および作用位置と

* 正会員 Ph. D. 東京電機大学教授 理工学部建設工学科
(〒350-03 比企郡鳩山町石坂)

** 正会員 工博 芝浦工業大学助教授 工学部土木工学科
(〒108 港区芝浦 3-9-14)

*** 正会員 工修 国土館大学教授 工学部土木工学科
(〒154 世田谷区世田谷 4-28-1)

も規定されたものと仮定し、設計変数および状態変数の関数系として目的関数、制約条件式を定義し、数値計画法を用いて目的関数の最適化を行っている。しかしながら大地に建造される構造物には、自重、積載荷重のように大きさ、方向、作用位置が固定されているもの、橋梁に作用する車両荷重のように、大きさ、方向は一定であるが作用位置の変動するもの、また風荷重、波浪荷重、地震荷重のように、大きさおよび作用位置は等価な静的荷重と規定されていても、その作用方向が変動するような外力がある。一般に外力の作用位置や方向に変動があるとき、構造物の設計は複雑なものとなる。本研究においては、外力の大きさ、作用位置は規定されるが、その作用方向はある範囲内で変動し得る場合を想定している。構造物がそのような荷重の作用を受けるとき、各節点変位および個々の部材力は、荷重方向の変動とともに変化する。また変位、部材力が最も厳しい状態、すなわち最悪状態となる荷重方向は各節点、各部材で異なっている。従来このような荷重状態で構造物を設計する方法として、荷重変動領域内に数個の荷重方向を選定し、各荷重方向のもとで構造物を設計し、その中から各荷重に対し、各部材断面が最も大きくなる断面をその部材の設計断面とする考え方、あるいは有限個の方向に作用している荷重を荷重群として扱い、最適化の手法を用いて断面を決定する方法等がある。しかしこれらの方法はどちらも適切にして十分であるとはいえない。さらに、荷重が複数の節点に作用し、それぞれ独立して荷重方向が変動する場合には、上述の方法を用いて解決することはほとんど不可能であろう。本論文は、複数の荷重がそれぞれ独立してその方向を変動する条件のもとで、構造物の最適化を図るアルゴリズムを開発し、例題を用いてその妥当性を検証するものである。

2. 最適化問題

(1) 問題の定式化

電子計算機の出現以来、構造解析手法が大きく進歩し、大部分の構造解析はマトリックス法を用いて定式化することができる。骨組構造の場合には、その構成部材相互の位置関係、および各部材の断面量を表わす設計変数から成る剛性マトリックスにより、変位を表わす状態変数と外力ベクトルの関係を表わすことができる。ここでは外力ベクトルの大きさおよび作用位置は規定されているが、作用方向が変動するため、外力ベクトルは構造全体座標系に対する角度を表わすパラメーターの関数となる。構造設計においては、各部材に生じる応力度は許容応力度以下であるとともに、圧縮部材についてはその座屈応力度以下であり、また構造系の最大変位はあらかじめ与えられた許容値以下である等の制約条件式を満た

さねばならない。これらの制約条件式は設計変数、状態変数および外力の作用方向を表わすパラメーターの関数として表現できる。その他設計変数の上限、下限も制約条件式として考慮している。

いま簡単にするため最適化の尺度となる目的関数として、最も頻繁に用いられる構造物の質量を考えることにすると、上記の最適化問題は次のような数学モデルで表わすことができる。

$$\text{目的関数 } \phi_0(\mathbf{b}) \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{剛性方程式 } \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{z} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{制約条件式 } \max_{\alpha \in A} \phi_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0., (i=1, 2, \dots, p_1) \dots\dots\dots (3)$$

$$\phi_i(\mathbf{b}) \leq 0., (i=p_1+1, \dots, p_2) \dots\dots\dots (4)$$

$$A = \{\alpha | g_k(\boldsymbol{\alpha}) \leq 0., k=1, 2, \dots, q\} \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}^T$ は設計変数、 $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}^T$ は状態変数、 $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}^T$ は環境変数、 $\mathbf{K}(\mathbf{b})$ は $n \times n$ の剛性マトリックス、また $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha})$ は外力ベクトルである。式 (3) は応力、座屈、変位に関する制約条件式を表わしており、式 (4) は部材断面の上限、下限のような設計変数のみからなる制約条件式である。なお式 (3) は $\boldsymbol{\alpha}$ に関するパラメトリックな制約条件で、ここでは $\boldsymbol{\alpha}$ は外力の方向を表わしており、その変動領域は式 (5) で示される。式 (1)~(5) で定義される最適化問題を解くにあたり、式 (3) の最大値を求める必要がある。これはすなわち次に示す式 (6)~(8) で定義される最適化問題を解くことに帰着する。

$$\max. \phi_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}), (i=1, 2, \dots, p_1) \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{制約条件式 } \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{z} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \dots\dots\dots (7)$$

$$g_k(\boldsymbol{\alpha}) \leq 0., (k=1, 2, \dots, q) \dots\dots\dots (8)$$

上記の最適化問題を副問題とよぶことにする。副問題を最適化の手法を用いて解くことも可能であるが、効率的好いとはいえない。構造解析が微小変形理論に基づいてなされるならば、理論的に副問題の最適解を求めることは可能である。その詳細については次節に示す。 $\phi_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}), (i=1, 2, \dots, p_1)$ を制約条件式 (7), (8) のもとで最大化を行い、そのときのそれぞれの $\max \phi_i$ に対応する $\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}$ を $\bar{\mathbf{z}}_i, \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i, (i=1, 2, \dots, p_1)$ とする。得られた $\max. \phi_i, (i=1, 2, \dots, p_1)$ を制約条件式として式 (1) を最小化する過程を最適化の主問題とよぶことにする。

(2) 副問題の解法

Fig. 1 に示すように節点 l に大きさ P_l が作用し

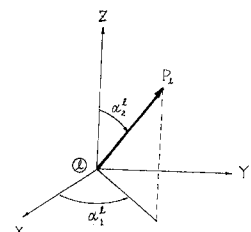


Fig. 1 External Force at Node l .

ているとき、各節点の変位ベクトルを $\mathbf{z}^{(l)}$ とする。全体座標系において節点 l の X, Y, Z 軸方向に単位荷重が作用しているとき、各節点の変位を $\mathbf{z}_1^{(l)}, \mathbf{z}_2^{(l)}, \mathbf{z}_3^{(l)}$ とすると、 P_l による変位は

$$\mathbf{z}^{(l)} = P_l \mathbf{z}_1^{(l)} \cos \alpha_1^l \sin \alpha_2^l + P_l \mathbf{z}_2^{(l)} \sin \alpha_1^l \sin \alpha_2^l + P_l \mathbf{z}_3^{(l)} \cos \alpha_2^l \dots \dots \dots (9)$$

と表わすことができる。さらに複数の節点に外力が作用しているとき、それらの外力による変位は

$$\mathbf{z} = \sum_{l \in I} \mathbf{z}^{(l)} \dots \dots \dots (10)$$

で表わせる。ただし I は外力が作用している節点番号からなる集合である。式 (3) で表わされる応力、屈服、変位に関する制約条件は一般に

$$\max_{\alpha, \mathbf{z}} \phi_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \alpha) = \sum_{l \in I} \max_{\alpha_1^l, \alpha_2^l} \{f_{i1}^l \cos \alpha_1^l \sin \alpha_2^l + f_{i2}^l \sin \alpha_1^l \sin \alpha_2^l + f_{i3}^l \cos \alpha_2^l\} - 1.0 \leq 0 \dots (11)$$

と書き換えることができる。また $f_{i1}^l, f_{i2}^l, f_{i3}^l$ は $\mathbf{z}_1^{(l)}, \mathbf{z}_2^{(l)}, \mathbf{z}_3^{(l)}$ と P_l の関数である。上式を整理すれば

$$\sum_{l \in I} \max_{\alpha_1^l, \alpha_2^l} \sqrt{\{(f_{i1}^l)^2 + (f_{i2}^l)^2\} \sin^2(\alpha_1^l + \theta_{i1}^l) + (f_{i3}^l)^2} \times \sin(\alpha_2^l + \theta_{i2}^l) - 1.0 \leq 0 \dots \dots \dots (12)$$

$$\theta_{i1}^l = \arctan\left(\frac{f_{i1}^l}{f_{i2}^l}\right) \dots \dots \dots (13)$$

$$\theta_{i2}^l = \arctan\left(\frac{f_{i3}^l}{\sqrt{\{(f_{i1}^l)^2 + (f_{i2}^l)^2\} \sin^2(\alpha_1^l + \theta_{i1}^l)}}\right) (l \in I) \dots \dots \dots (14)$$

式 (12) を最大とすることは、その式の各項を最大とすることに帰着する。節点 l に作用している荷重の方向、 α_1^l および α_2^l の変動領域の上限値、下限値をそれぞれ $\alpha_{1U}^l, \alpha_{1L}^l$ および $\alpha_{2U}^l, \alpha_{2L}^l$ とすると、式 (5) は

$$\alpha_{1L}^l \leq \alpha_1^l \leq \alpha_{1U}^l \dots \dots \dots (15)$$

$$\alpha_{2L}^l \leq \alpha_2^l \leq \alpha_{2U}^l \dots \dots \dots (16)$$

となる。式 (12) を最大とすることは $\sin^2(\alpha_1^l + \theta_{i1}^l), \sin(\alpha_2^l + \theta_{i2}^l)$ を最大とすることであり、そのときの α_1^l, α_2^l をそれぞれ $\alpha_{i1}^l, \alpha_{i2}^l$ とする。式 (15), (16) が全空間を形成する場合、 $-\pi < \alpha_1^l \leq \pi, 0 < \alpha_2^l \leq \pi$ であり、そのとき $\sin^2(\alpha_{i1}^l + \theta_{i1}^l), \sin(\alpha_{i2}^l + \theta_{i2}^l)$ の値はともに 1.0 となる。このとき式 (12) は

$$\sum_{l \in I} \sqrt{(f_{i1}^l)^2 + (f_{i2}^l)^2 + (f_{i3}^l)^2} - 1.0 \leq 0 \dots \dots \dots (17)$$

と単純化される。

式 (12) を最大とする $\alpha_{i1}^l, \alpha_{i2}^l$ の値は、一般にそれぞれの制約式により異なっている。このことは後述の例題の結果からも明らかである。このようにして求められた副問題の解は Kuhn Tucker の必要条件を満たさねばならない。すなわち式 (6)~(8) で定義される最適化問題のラグランジアンを

$$L_i = -\phi_i - \lambda_i^T (\mathbf{Kz} - \mathbf{Q}) + \mu_i^T \mathbf{g}, (i=1, 2, \dots, p_i) \dots \dots \dots (18)$$

とすると、

$$L_{i,\alpha} = -\phi_{i,\alpha} - \lambda_i^T \mathbf{Q}, \alpha + \mu_i^T \mathbf{g}, \alpha = 0 \dots \dots \dots (19)$$

$$L_{i,z} = -\phi_{i,z} + \lambda_i^T \mathbf{K} = 0 \dots \dots \dots (20)$$

$$\lambda_i^T (\mathbf{Kz} - \mathbf{Q}) = 0 \dots \dots \dots (21)$$

$$\mu_i^T \mathbf{g} = 0 \dots \dots \dots (22)$$

が成立する。 $\lambda_i \neq 0, \mu_i \geq 0, (i=1, 2, \dots, p_i)$ はラグランジュ乗数で $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in})^T, \mu_i = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{ik})^T$ である。またここでは、一般にベクトル変数 $\mathbf{x} \in R^n$ のスカラー関数 $\phi_i(\mathbf{x})$ の偏微分形を $\phi_{i,x}$ で表わす。これは行ベクトル $(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_n})$ を意味している。

3. 主問題の解法と最適化アルゴリズム

式 (3) の最大値が求まると、式 (2)~(5) の制約条件を満たし、目的関数 (1) を最小とする設計変数 \mathbf{b} を求めるのが主問題である。いま j 番目の反復計算後、設計変数 $\mathbf{b}^{(j)}$ が $\delta \mathbf{b}$ だけ変化すると、 \mathbf{z}, α もそれぞれ $\delta \mathbf{z}, \delta \alpha$ だけ変化するのであろう。式 (1)~(5) の変化量を $\delta \mathbf{z}, \delta \mathbf{b}, \delta \alpha$ の一次近似で表わすと、次のようになる。

$$\delta \phi_0 = \phi_{0,b} \delta \mathbf{b} \dots \dots \dots (23)$$

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{z} + (\mathbf{Kz}),_b \delta \mathbf{b} - \mathbf{Q}, \alpha \delta \alpha = 0 \dots \dots \dots (24)$$

$$\max_{\delta \alpha} \delta \phi_i = \max_{\delta \alpha} (\phi_{i,z} \delta \mathbf{z} + \phi_{i,b} \delta \mathbf{b} + \phi_{i,\alpha} \delta \alpha), (i=1, 2, \dots, p_i) \dots \dots \dots (25)$$

$$\delta \phi_i = \phi_{i,b} \delta \mathbf{b}, (i=p_i+1, \dots, p_2) \dots \dots \dots (26)$$

$$\delta g_k = g_{k,\alpha} \delta \alpha (k=1, 2, \dots, q) \dots \dots \dots (27)$$

$\delta \mathbf{b}$ は式 (2)~(5) を満足する方向で、かつ目的関数式 (1) を小さくするように決定する。式 (3) の不等式制約条件のうちで、満足されない制約条件の添字集合を

$$B_1 = \{i | \phi_i(\mathbf{b}^{(j)}, \mathbf{z}_i, \alpha_i) \geq 0, i \leq p_i\} \dots \dots \dots (28)$$

と定義する。また必要な修正量を $\Delta \phi_i$ とすると、一般に

$$\Delta \phi_i = -\phi_i, (i \in B_1) \dots \dots \dots (29)$$

と置くことができる。式 (19) の右から $\delta \alpha$ を掛けて整理すると、

$$\phi_{i,\alpha} \delta \alpha = [-\lambda_i^T \mathbf{Q}, \alpha + \mu_i^T \mathbf{g}, \alpha] \delta \alpha \dots \dots \dots (30)$$

となる。また式 (20) の右から $\delta \mathbf{z}$ を掛け、式 (24) を用いて整理すると、

$$\phi_{i,z} \delta \mathbf{z} = -\lambda_i^T [(\mathbf{Kz}),_b \delta \mathbf{b} - \mathbf{Q}, \alpha \delta \alpha] \dots \dots \dots (31)$$

となる。式 (3) において \mathbf{b} が $\delta \mathbf{b}$ だけ変化するとき、式 (3) の変化量は式 (25) で表わされる。式 (3) のうち集合 B_1 に属する式だけが、式 (29) に示される量だけ修正される必要があることを考慮して、式 (30), (31) を式 (25) に代入すると、

$$\max_{\delta \alpha} \delta \phi_i = \max_{\delta \alpha} [\phi_{i,b} - \lambda_i^T (\mathbf{Kz}),_b] \delta \mathbf{b} + \mu_i^T \mathbf{g}, \alpha \delta \alpha \leq \Delta \phi_i, (i \in B_1) \dots \dots \dots (32)$$

となる。上式を整理して

$$\max_{\delta \alpha} [\mu_i^T g, \alpha \delta \alpha] \leq -\{\phi_{i,b} - \lambda_i^T(Kz), b\} \delta b + \Delta \phi_i \dots\dots\dots (33)$$

を得る。 $\mu_i \geq 0, \mu_i^T g, \alpha \delta \alpha \leq 0$, であるから, 左辺は $\delta \alpha = 0$, のとき最大となり, その値は 0 である. したがって

$$\{\phi_{i,b} - \lambda_i^T(Kz), b\} \delta b - \Delta \phi_i \leq 0 \dots\dots\dots (34)$$

となる. このことは設計変数が微小変化しても, 応力や変位を最大とする α の値は, 変わらないことを意味している. その結果, 副問題では “ b を一定にして” z, α を求め, 主問題では “ α を一定にして” b を求める. この過程を繰り返すことにより最適解を得ることができ.

いま便宜上次のように定義する.

$$B_2 = \{i | \phi_i(b) \geq 0, i > p_1\} \dots\dots\dots (35)$$

$$l_0 = \phi_{0,b} \dots\dots\dots (36)$$

$$l_i = \phi_{i,b} - \lambda_i^T(Kz), (i \in B_1) \dots\dots\dots (37)$$

$$l_i = \phi_{i,b}, (i \in B_2) \dots\dots\dots (38)$$

$$\tilde{l} = \{l_i | i \in B_1 \cup B_2\} \dots\dots\dots (39)$$

$$\Delta \tilde{\phi} = \{\Delta \phi_i | i \in B_1 \cup B_2\} \dots\dots\dots (40)$$

式 (1)~(5) で定義された最適化問題を解くことは, 次の問題を解くことに帰着する.

$$\text{minimize } \delta \phi_0 = l_0 \delta b \dots\dots\dots (41)$$

$$\text{subject to } \tilde{l} \delta b - \Delta \tilde{\phi} \leq 0. \dots\dots\dots (42)$$

$$\delta b^T W \delta b - \xi^2 \leq 0. \dots\dots\dots (43)$$

式 (43) は b の変化量 δb が大きくなりすぎないように設けた制約条件である. W は重み行列であり, Fletcher Powell 法の Hesse 行列のように適切に選択することにより収束性が向上すると思われる. ここではその件については検討しておらず, 単位行列を用いている. また ξ^2 は小さな正数である. 式 (41)~(43) で定義された問題の解は, ラグランジアン

$$L = l_0^T \delta b + \tilde{v}^T (\tilde{l}^T \delta b - \Delta \tilde{\phi}) + r (\delta b^T W \delta b - \xi^2) \dots\dots\dots (44)$$

と置き, Kuhn-Tucker の必要条件から求めることができる⁶⁾. ただし $\tilde{v}^T \geq 0, r \geq 0$ はそれぞれラグランジュ乗数である. そしてその解は

$$\delta b = \frac{1}{2r} \delta b_1 + \delta b_2 \dots\dots\dots (45)$$

で表わすことができる. ただし

$$\delta b_1 = W^{-1}(l_0 + \tilde{l} \tilde{v}_1) \dots\dots\dots (46)$$

$$\delta b_2 = -W^{-1} \tilde{l} \tilde{v}_2 \dots\dots\dots (47)$$

で表わすことができ, また v_1, v_2 はそれぞれ

$$\tilde{l}^T W^{-1} \tilde{v}_1 = -\tilde{l}^T W^{-1} l_0 \dots\dots\dots (48)$$

$$\tilde{l}^T W^{-1} \tilde{v}_2 = -\Delta \tilde{\phi} \dots\dots\dots (49)$$

の解である. また \tilde{v} と \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 の間には

$$\tilde{v} = \tilde{v}_1 + 2r \tilde{v}_2 \dots\dots\dots (50)$$

の関係がある.

以上に展開した最適化のアルゴリズムを整理すると, 次のようになる.

- Step 1. 初期値 $b^{(0)}$ を選定する.
- Step 2. 式 (9) より $z_1^{(l)}, z_2^{(l)}$, および $z_3^{(l)}$, ($l \in I$) を計算する.
- Step 3. 式 (11) における f_{i1}^l, f_{i2}^l および f_{i3}^l , ($l \in I, i = 1, 2, \dots, p_1$) を計算する.
- Step 4. 式 (12) を最大とする $\theta_{i1}^l, \theta_{i2}^l, \alpha_{i1}^l$ および α_{i2}^l を式 (13)~(16) より求め, またその最大値を計算する.
- Step 5. 添字集合 $B_1 \cup B_2$ を求める.
- Step 6. 式 (20) より $\lambda_i, (i \in B_1)$ を求める.
- Step 7. 式 (36)~(38) より l_0 および $l_i, (i \in B_1 \cup B_2)$ を計算する.
- Step 8. 式 (40) 中の $\Delta \tilde{\phi}$ を求める. たとえば $\Delta \phi_i = -\phi_i, (i \in B_1 \cup B_2)$
- Step 9. 式 (48), (49) より \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 を計算する.
- Step 10. 式 (50) で r の値を仮定し, \tilde{v} を求める. もし \tilde{v} の要素の中で負となるものがあれば, それに対応する添字を $B_1 \cup B_2$ より取り除き, Step 7 に戻る.
- Step 11. 式 (46)~(47) より $\delta b_1, \delta b_2$ および δb を計算する.
- Step 12. $b^{(j+1)} = b^{(j)} + \delta b$ を計算する. ただし (j) は反復計算の回数を示している.
- Step 13. $\|\delta b_1\|, \|\delta \phi_0\|$ が十分に小さく, すべての制約条件を満足しているとき, 反復計算を打ち切る. そうでないときには Step 2 に戻る.

Step 9 において r の値を仮定しているが, 式 (43) を用いて r を決定することも可能である. そのためには ξ^2 の値を前もって決めておく必要がある. 本論文における例題の計算では, 文献 (7), (8) に従い r の値を仮定する方法を採用した.

上記のアルゴリズムの開発にあたり, 比較的大型な構造物の最適化も行えることを念頭においている. そのためには構造解析および感度解析を効率的に行う必要がある. 構造解析においては, 剛性マトリックスの対称性, バンド性を考慮したコレスキー法を用いている. また感度解析を行うため, 式 (20) を整理すると

$$K \lambda_i = \phi_{i,z}^T \dots\dots\dots (51)$$

と書くことができる. 最適解を求めるときには, 満たされていない制約式 $\phi_i, (i \in B_1)$ においてのみ, 感度解析が必要となり, 一般に最適解に近づくと, 満足されない制約式の数は少なくなる. すなわち式 (51) の右辺の列数は少なく, また構造解析で用いたコレスキーマトリックスを用いると, 効率的に $\lambda_i, (i \in B_1)$ を計算すること

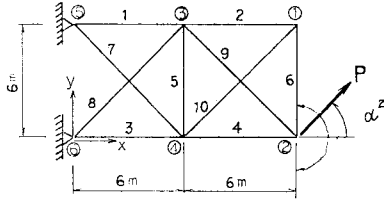


Fig. 2 A 10 Member Truss.

ができる。

4. 数値計算例

本解析手法の妥当性を検討するため、Fig. 2 に示す 10 部材からなる平面トラス構造に単一荷重が作用する場合、および Fig. 5 に示す 25 部材からなる立体トラス構造に複数荷重が作用する場合の 2 例について、荷重作用方向の変動を考慮した最適構造設計の数値解析を行った。

(1) 10 部材平面トラス構造

a) 本方法を用いた結果

各部材の断面積 $b = [b_1, b_2, \dots, b_{10}]^T$ を設計変数とし、座屈計算に必要な各部材の断面 2 次モーメントは各断面積の 2 乗に比例するものと仮定し、その比例定数を 1 とした。荷重状態は節点 ② に作用する $P = 20 \text{ tf}$ (196 kN) の集中荷重が、図に示す変動範囲、すなわち全体構造座標系の X 軸に対し $-90^\circ \sim 90^\circ$ の範囲内の角度で変化するものとした。設計変数の最小値を 0.1 cm^2 とし、次の 2 種類の制約条件に対して最小質量設計を行った。

(i) 応力制約条件

各部材の応力度は、引張部材については許容軸方向引張応力度 (1400 kgf/cm^2 {137 MPa}) 以下とし、圧縮部材については基準耐荷曲線のかわりにオイラー座屈曲線に対して安全率 1.70 をとった値と 1400 kgf/cm^2 {137 MPa} との小さい方を許容軸方向圧縮応力度 σ_{ca} とし、各部材応力度が許容応力度以下となることを制約条件とした。

本解析法により得られた結果を Table 1 に示す。Table 1 は各部材に対する最適断面積、最小質量、許容軸方向圧縮応力度および荷重の作用方向の変動によって生じる各部材の最大圧縮応力度、最大引張応力度とそれぞれの荷重作用角度を示しており、本解析例の荷重作用方向の変動範囲内では、すべての部材断面積は許容軸方向圧縮応力度により決定されている。Fig. 3 は本解析法で得られた各最適断面で構成されたトラス構造に対して、荷重作用方向とそのときの各部材の応力度の関係図を示したもので、横

Table 1 Optimum 10 Member Truss with Stress Constraints.

Member	Area(b_i) (cm^2)	σ_{ca} (kgf/cm^2)	$\sigma_{\text{max,comp.}}$ (kgf/cm^2)	α°	$\sigma_{\text{max,tens.}}$ (kgf/cm^2)	α°
1	30.27	1 025.0	1 024.9	87.5	1 023.9	-90.0
2	15.29	517.8	517.4	76.1	502.3	-90.0
3	29.28	991.5	990.9	-90.0	1 177.5	57.3
4	19.08	646.1	645.8	-90.0	1 147.5	34.2
5	10.22	346.0	346.0	-22.1	130.2	90.0
6	15.29	517.8	517.4	76.1	502.3	-90.0
7	27.44	464.6	464.4	90.0	469.8	-81.3
8	30.30	513.0	513.0	90.0	517.0	82.9
9	32.09	543.3	543.0	90.0	549.4	-81.2
10	25.33	428.9	428.8	-90.0	441.7	76.1

Optimum Mass 1 329 kg

σ_{ca} : the smaller of 1400 kgf/cm^2 and Euler buckling stress/1.70
 $1 \text{ kgf/cm}^2 = 98.0665 \text{ kPa}$

$\sigma_{\text{max,comp.}}$: maximum compressive stress
 $\sigma_{\text{max,tens.}}$: maximum tensile stress

Table 2 Optimum 10 Member Truss with Stress and Displacement Constraints.

(a) Optimum Design Variables, Maximum Compressive and Tensile Stresses

Member	Area(b_i) (cm^2)	σ_{ca} (kgf/cm^2)	$\sigma_{\text{max,comp.}}$ (kgf/cm^2)	α°	$\sigma_{\text{max,tens.}}$ (kgf/cm^2)	α°
1	37.10	1 256.3	842.0	88.0	841.5	-90.0
2	14.53	492.2	492.2	79.5	483.9	-90.0
3	37.17	1 258.9	774.3	-90.0	926.1	56.7
4	26.58	900.3	487.8	-90.0	855.8	34.7
5	9.40	318.3	318.3	-35.8	186.3	90.0
6	14.53	492.2	492.2	79.5	483.9	-90.0
7	27.09	458.6	458.6	90.0	462.3	-82.8
8	30.61	518.3	518.2	-90.0	520.8	84.3
9	32.91	557.2	557.2	90.0	560.1	-84.2
10	24.24	410.4	410.4	-90.0	417.4	79.5

Optimum Mass 1 421 kg

σ_{ca} : the smaller of 1400 kgf/cm^2 and Euler buckling stress/1.70
 $1 \text{ kgf/cm}^2 = 98.0665 \text{ kPa}$

$\sigma_{\text{max,comp.}}$: maximum compressive stress
 $\sigma_{\text{max,tens.}}$: maximum tensile stress

(b) Extreme Values of Displacements

Node	Displacement	δ_{limit} (cm)	δ_{max} (cm)	α°	δ_{min} (cm)	α°
1	u_1	± 0.500	0.379	-90.0	-0.380	84.8
	v_1	± 1.500	1.360	75.7	-1.318	-90.0
2	u_2	± 0.500	0.500	46.2	-0.361	-90.0
	v_2	± 1.500	1.500	76.1	-1.456	-90.0
3	u_3	± 0.500	0.240	-90.0	-0.241	88.0
	v_3	± 1.500	0.538	85.9	-0.537	-90.0
4	u_4	± 0.500	0.265	56.7	-0.221	-90.0
	v_4	± 1.500	0.496	77.0	-0.483	-90.0

u_i : displacement in the direction of x axis at node i
 v_i : displacement in the direction of y axis at node i

軸に荷重作用方向の X 軸に対する角度を、縦軸に部材応力度をとり、荷重作用方向の変動に対する各部材の応力の影響線を表わしている。図中丸印は各部材の断面算定の基礎となる最大応力度を示しており、それらは各部材の許容軸方向圧縮応力度と一致しており、本解析手法

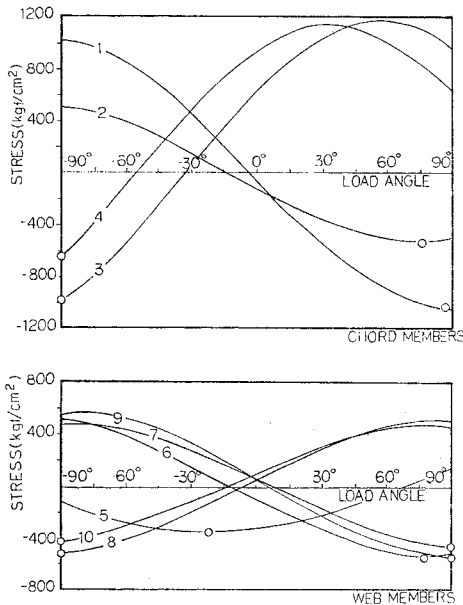


Fig. 3 Stress Influence Lines for 10 Member Truss (Stress Constraints).

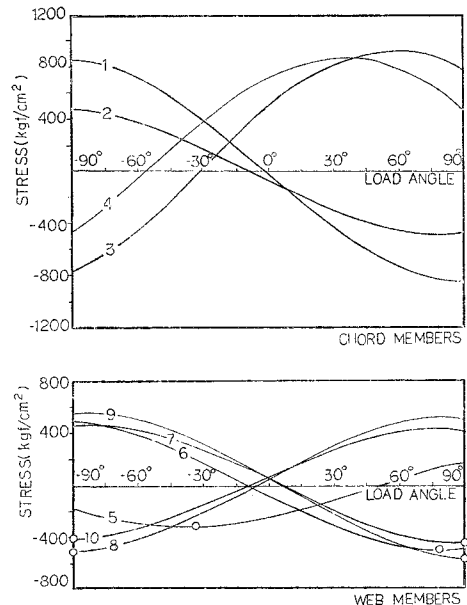


Fig. 4 Stress Influence Lines for 10 Member Truss (Stress and Displacement Constraints).

の妥当性を示している。

(ii) 応力制約条件と変位制約条件

応力制約と、最大変位の制約として X 軸方向に ± 0.5 cm, Y 軸方向に ± 1.5 cm の変位制約の条件のもとで構造物の最適化を行った。Table 2 (a) に各部材に対する最適断面積, 最小質量, 許容軸方向圧縮応力度および荷重の作用方向の変動により生じる各部材の最大圧縮応力度, 最大引張応力度とそのときのそれぞれの荷重作用方向を, Table 2 (b) に各節点に生じる最大変位とそのときの荷重作用方向を示す。Fig. 4 は荷重の作用方向と各部材応力度の関係図で, 応力の制約条件以外に変位の制約条件があるため, 弦材に相当する 1~4 部材の応力度は許容応力度以下となり, 応力に関しては余裕のある断面となっているが, 腹材に相当する 6 個の部材の断面算定の基礎となる最大応力度は, すべて各部材の許容軸方向圧縮応力度と一致する結果が得られ, 構造系全体の剛性に関係する変位制約に対しては腹材は弦材に比較して, それほど大きな影響を与えないことを示している。

b) 他の方法との比較

荷重方向の変動領域内に, 等間隔に 5 個の荷重方向を考え, 次に示す近似解法 1 および近似解法 2 により 10 部材トラスの断面決定を行った。

(i) 近似解法 1

5 個の各荷重方向で, それぞれ応力制約を

Table 3 Optimum Design for a 10 Member Truss at a Specified Direction of Force.

Member	Area(b_i) (cm ²)					$b_{i\max}$
	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = -45^\circ$	$\alpha = -90^\circ$	
1	31.49	28.44	0.83	20.14	28.50	31.49
2	13.63	4.86	0.83	0.10	0.12	13.63
3	18.87	20.84	14.27	1.62	24.36	24.36
4	11.10	24.04	14.27	0.10	24.20	24.20
5	0.10	0.10	1.17	0.10	0.10	1.17
6	13.63	4.86	0.83	0.10	0.12	13.63
7	23.16	8.60	0.10	0.10	0.10	23.16
8	15.64	23.69	0.10	34.26	40.77	40.77
9	33.85	33.38	0.10	14.20	20.04	33.85
10	6.35	0.81	0.10	2.74	3.69	6.35
Optimum Mass kg	945	834	154	446	795	1204

Table 4 Maximum Tensile and Compressive Stresses (Approximation Method 1).

Member	$\sigma_{\max, \text{tens.}}$ (kgf/cm ²)	α°	$\sigma_{\max, \text{comp.}}$ (kgf/cm ²)	α°	σ_{ca} (kgf/cm ²)	$\sigma_{\max, \text{comp.}}/\sigma_{ca}$
1	1115.1	-90.0	1115.2	89.1	1066.4	1.05
2	311.5	-90.0	311.9	87.1	461.6	0.68
3	1296.1	52.0	1021.6	-90.0	824.9	1.24
4	1044.4	38.5	650.9	-90.0	819.6	0.79
5	545.3	90.0	864.3	-39.1	39.7	21.77
6	311.5	-90.0	311.9	87.1	461.6	0.68
7	300.4	-83.3	298.4	90.0	392.1	0.76
8	524.7	87.8	524.3	-90.0	690.3	0.76
9	658.4	-89.2	658.3	90.0	573.1	1.15
10	946.1	87.1	944.9	-90.0	107.6	8.78

σ_{ca} : the smaller of 1400 kgf/cm² and Euler buckling stress/1.70
1 kgf/cm² = 98.0665 kPa

$\sigma_{\max, \text{tens.}}$: maximum tensile stress

$\sigma_{\max, \text{comp.}}$: maximum compressive stress

満足するという条件のもとで、構造物の最小質量設計を行った。その結果は **Table 3** に示されている。各部材断面積は荷重方向により異なっており、各部材についておのおの最も大きな断面を、その部材の設計断面積とする (**Table 3**)。このようにして得られた構造物の質量は 1204 kg である。この構造物が $-90^\circ \sim 90^\circ$ の間で連続的に変動する荷重を受けるとき、各部材の最大引張応力、最大圧縮応力およびそれらの応力値を生じる荷重方向は **Table 4** に示すとおりである。引張応力に対して、すべての断面は余裕があるが、圧縮応力に関しては、必ずしも余裕があるわけではなく、中には許容値の 20 倍を越える部材があり、このような考え方による設計が非常に危険となる可能性があることを示している。

(ii) 近似解法 2

近似解法 1 と同様の荷重状態による応力制約条件を同時に満足し、かつ構造物質量を最小にするように、最適化プログラムを用い断面を決定した。その結果は **Table 5** に示すとおりである。さらにその断面で構成される構造物が $-90^\circ \sim 90^\circ$ の範囲で連続的に方向を変動する荷重を受けるとき、各部材に生じる最大引張応力、最大圧縮応力とそれらの値を与える荷重方向も同表に記されている。

(2) 25 部材立体トラス構造

Fig. 5 に示す構造は、25 部材からなる送電線支持用の鉄塔である。荷重状態は節点 ③ と節点 ④ に作用する集中荷重 $P=100 \text{ tf} (981 \text{ kN})$ がそれぞれ独立に 3 次元空間内を任意の荷重作用角度で変動し得るものと

し、10 部材トラス構造と同様の応力拘束条件のもとで最小質量設計を行うと **Table 6** の結果が得られた。最適化にあたって構造物の対称性を考慮し、対称性を保有する設計変数はリンクして同一グループとして取り扱っており、25 部材を 7 グループに分割している。この例題では、ほとんどの部材が、許容圧縮応力あるいは座屈

Table 5 Optimum Design Variables, Maximum Compressive and Tensile Stresses (Approximation Method 2).

Member	Area(b_i) (cm^2)	$\sigma_{\text{max.tens.}}$ (kgf/cm^2)	α°	$\sigma_{\text{max.comp.}}$ (kgf/cm^2)	α°	$\frac{\sigma_{ca}}{(\text{kgf/cm}^2)}$	$\sigma_{\text{max.comp.}}/\sigma_{ca}$
1	30.27	1 025.2	-90.0	1 026.2	87.5	1 025.2	1.00
2	15.01	508.5	-90.0	523.4	76.3	508.5	1.03
3	29.24	1 178.1	57.2	990.4	90.0	990.4	1.00
4	19.11	1 148.9	34.3	647.1	-90.0	647.1	1.00
5	9.73	136.6	90.0	356.6	-22.5	329.5	1.08
6	15.01	508.5	-90.0	523.4	76.3	508.5	1.03
7	27.36	468.5	-81.5	463.3	90.0	463.3	1.00
8	30.36	517.9	83.1	514.1	-90.0	514.1	1.00
9	32.14	550.3	-81.4	544.2	90.0	544.2	1.00
10	25.25	440.1	76.3	427.6	-90.0	427.6	1.00

Optimum Mass 1 324 kg

σ_{ca} : the smaller of 1 400 kgf/cm^2 and Euler buckling stress/1.70
1 $\text{kgf/cm}^2=98.0665 \text{ kPa}$

$\sigma_{\text{max.tens.}}$: maximum tensile stress

$\sigma_{\text{max.comp.}}$: maximum compressive stress

Table 6 Optimum 25 Member Truss with Stress Constraints.

Group	Member	Area(b_i) (cm^2)	σ_{ca} (kgf/cm^2)	$\sigma_{\text{max.comp.}}$ (kgf/cm^2)	α_2^{30}	α_1^{30}	α_2^{40}	α_1^{40}
1	1	66.15	1 400	1 400	73.2	-180.0	73.2	0.0
	2			1 400	97.5	-122.9	106.7	173.7
	3			1 400	106.7	6.3	97.5	-57.1
	4			1 400	97.5	122.9	106.7	-173.7
	5			1 400	106.7	-6.3	97.5	57.1
3	6	95.41	1 400	1 400	73.3	-173.7	115.9	-116.0
	7			1 400	73.3	173.7	115.9	116.0
	8			1 400	115.9	-64.0	73.3	-6.3
	9			1 400	115.9	64.0	73.3	6.3
4	10	5.50	1 324	1 324	130.4	0.0	84.9	0.0
	11			1 324	84.9	-180.0	130.4	-180.0
	12			1 148	113.9	-70.3	113.9	-109.7
	13			1 148	113.9	70.3	113.9	109.7
5	14	31.42	1 297	1 297	113.4	-53.5	90.8	-48.1
	15			1 297	113.4	53.5	90.8	48.1
	16			1 297	90.8	-131.9	113.4	-126.5
	17			1 297	90.8	131.9	113.4	126.5
6	18	47.01	1 400	1 400	64.5	152.1	115.5	-112.3
	19			1 400	115.5	-67.7	64.5	27.9
	20			1 400	64.5	-152.1	115.5	112.3
	21			1 400	115.5	67.7	64.5	-27.9
7	22	143.78	1 400	1 400	117.2	39.0	92.9	47.3
	23			1 400	117.2	-39.0	92.9	-47.3
	24			1 400	92.9	132.7	117.2	141.0
	25			1 400	92.9	-132.7	117.2	-141.0

Optimum Mass 5 407 kg

σ_{ca} : the smaller of 1 400 kgf/cm^2 and Euler buckling stress/1.70
1 $\text{kgf/cm}^2=98.0665 \text{ kPa}$

条件で、断面が決まっていることがわかる。部材 12,13 は部材 10, 11 と同じ断面と考えているため、応力的に余裕がある。この結果からも、最もクリティカルとなる荷重方向は、部材によって異なっていることがわかる。

方向が変動する荷重を受ける立体構造物を設計する場合、しばしば 3 次元問題を平面問題に置き換えて解析が

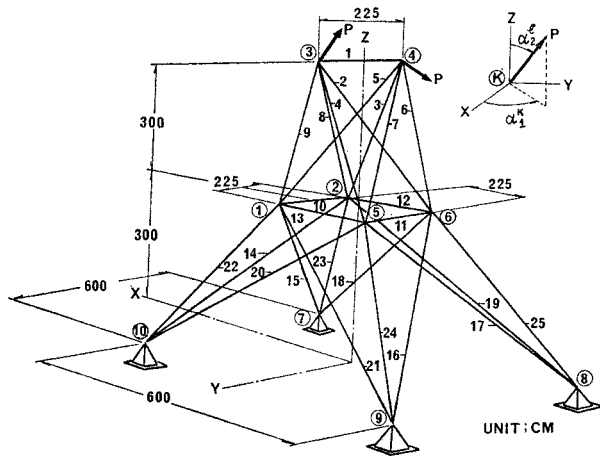


Fig. 5 A 25 Member Truss.

なされるが、十分な配慮が必要であろう。

5. む す び

複数の荷重が、それぞれその方向を変動し得るという複雑な荷重状態のもとで、構造物の最適化を行うアルゴリズムを誘導し、例題を用いその妥当性を示した。本論文で開発されたアルゴリズムは、風荷重を受ける鉄塔構造物や波浪荷重を受ける海洋構造物の設計に適用できるものと思われる。本研究をまとめると、次のようになる。

(1) 本論文で定義されている最適化問題は、副問題と主問題に分離でき、副問題では設計変数を一定として、また主問題では環境変数を一定として扱ってよいことを、理論的に示した。

(2) 近似解法1の考え方は、十分に注意をして用いないと、危険な設計となること、また近似解法2は、比較的よい近似解を与えている。精度を増すためには考慮する荷重方向を増やせばよい。

(3) 計算時間に関しては、近似解法1が最も時間がかかり、本解析手法と近似解法2は同じ程度であるが、後者は考慮する荷重方向を増やすと、それに伴い計算時間も増えてくる。

(4) 本解析手法では、複数の荷重がそれぞれ独立してその作用方向を変動するような複雑な荷重状態の問題も容易に処理できるが、近似解法1、近似解法2ではほとんど不可能である。

(5) 各部材、各変位でクリティカルとなる荷重方向の組合せは異なっており、構造物の複雑さ、荷重状態の複雑さのいかんにかかわらず、この荷重方向の組合せを

求めることができる。

本研究においては、Rosenの斜影勾配法を用いているが、非線形計画法の部分より、より効率的なアルゴリズムで置き換えることにより効率性の改善を容易に図ることができる。

環境変数 α が荷重方向を示している場合、2.(2)の副問題の解法で示したように、応力・変位のクリティカルな値を解析的に求めることができる。しかし移動荷重のように作用点の変動する場合には、副問題も最適化手法を用いて解く必要がある。主問題、副問題を最適化手法を用いて解くことは、よほど効率的な最適化手法を用いないかぎり、困難であろう。

末筆ながら、東京電機大学の奥村敏忠教授には、この論文作成にあたり、多くの貴重なご助言をいただきましたことを、ここに深く感謝致します。

なお、本研究の計算には、東京電機大学計算センターの FACOM M-160 および 国士舘大学計算機センターの Honeywell DPS 8/70 を使用したことを付記するとともに、利用に際し、お世話になった関係諸氏に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) Schmit, L.A.: Structural Design by Systematic Synthesis, Proceedings, 2nd Conference on Electronic Computation, ASCE, New York, pp. 105~122, 1960.
- 2) Schmit, L.A. and Kicher, T.P.: Structural Synthesis of Systematic Waffle Plate, NASA TN D-1961, Dec., 1962.
- 3) Lev, O.E. ed.: Structural Optimization, Recent Developments and Applications, ASCE, New York, 1981.
- 4) Schmidt, L.A.: Structural Synthesis-Its Genesis and Development, AIAA Journal, Vol. 19, No. 10, pp. 1249~1263, Oct. 1981.
- 5) Kirsch, U.: Optimum Structural Design, McGraw Hill Book Co., New York, 1981.
- 6) Haug, E.J. and Arora, J.S.: Applied Optimal Design-Mechanical and Structural Systems, John Wiley & Sons, New York, 1979.
- 7) Arora, J.S.: On Improving Efficiency of an Algorithm for Structural Optimization and a User's Manual for Program Trussopt 3, An Interim Technical Report, Division of Materials Engineering, College of Engineering, The University of Iowa, June 1974 (Revised September 1976).
- 8) Arora, J.S. and Moh, N.S.: Numerical Aspects and Step-size Selection in Gradient Projection Method for Structural Optimization: Technical Report No. 47, Division of Materials Engineering, College of Engineering, The University of Iowa, January 1979.

(1983.8.1・受付)