

有限変位を受ける薄肉はり要素の一離散化展開*

A DISCRETIZATION OF THIN-WALLED BEAMS
UNDER FINITE DISPLACEMENTS阿井 正博**・伊 東 賢***
By Masahiro AI and Satoshi ITO

The three-dimensional rotations of finite magnitude are well known for being out of a linear space, but to be dealt with in the nonlinear field, more generally. Further, in the formulation of variational problems such as the present elastic deformation, the way of describing moments is significantly associated with that for finite rotations. In this paper, according to the theory which has been proposed to decompose a moment into the components in such a manner that the inner products between its components and differentials of the rotation parameters represents the real infinitesimal work, an actual discretization of thin-walled beams will be developed without any restriction on the magnitude of displacements themselves, under the condition of small strains.

1. はじめに

伸び、曲げ、ねじれおよび反り変形を含む運動場で扱われる薄肉はり要素は、断面に3次元ベクトル量の力とモーメント、およびスカラー量としてのバイ・モーメントを受けるなど、一般的な変形状態のもとにある構造要素の一つである。変形が多自由度であることより、その離散化は、微小変位理論としての展開であってもかなり複雑なものとなり、有限変位問題でのそれは加えての幾何学的非線形展開であるためにさらに困難な問題となるが、その中には、単に展開の複雑さのみではなく、以下に述べるきわめて基本的な問題が含まれている。

離散化の代表点(節点)では、その点の変位状況を規定する一組のパラメーターを定めるが、その中の3次元的回転を表現するものを考えると、微小変位理論でベクトル空間で展開される3次元回転が有限変位問題では線形ベクトル空間上にないことはよく知られており、実際の有限変位解析においてその表現に関する工夫が報告されている^{1),13)}。さらに進めて、変位法の離散化系で

* 本論文の一部内容は、土木学会第37回年次学術講演会にて報告⁹⁾。

** 正会員 工博 法政大学助教授工学部土木工学科
(〒184 小金井市梶野町 3-7-2)

*** 正会員 工修 新日本技研(株)
(〒541 大阪市東道修町 3-9)

は、一般に、節点での未知量として変位パラメーターに並立した節点力のパラメーターを考えるが、微小変位問題では線形系の理論の範囲でこれらの組のパラメーターはいわゆる対応関係にあるよう定められるのが普通である。すなわち、それらの内積が実仕事を表わすように定められるとき、たとえば剛性係数が対称になるなど、ひずみエネルギーの存在を陽に、つまり系が変分問題であることを陽に表わして展開することができる。幾何学量と力学量のこの整合性を3次元幾何学的非線形問題において拡大定義し保持することは、一つの理論のあり方として有意である。3次元有限回転とモーメントに関するこの基本問題そのものはすでに一理論が展開されているが²⁾、実際の有限変位解析の中にはこれまで採用されていない。

初期状態まわりのいわゆる線形化有限変位理論としての離散化の展開^{3),10)}がある一方で、より大きい変位の問題に対して要素の節点自由度を剛体変位と変形の自由度に分離する変位法の手法、あるいは変位段階ごとに剛体変位に伴って移動する要素座標に関して変位増分を展開する手法の合理性は、はりの2次元問題で展開されて以来^{9),12),14)}十分認識されており、はりの立体挙動に対してもすでに採用されている^{6),7),9),13),15),16)}。しかし、曲げねじれの効果を見逃した充実断面はりとしてのこれら

の解析では、それぞれの理論の範囲の数値計算を行うに足る展開は示されているが、前述の3次元回転とモーメントの扱いに関する基本的な問題を含めて、必ずしも、すべての力学特性を説明し得る理論式が完備されているとはいえない。

本報告は、文献1)に述べられている幾何学的非線形問題での要素の変形・剛体変位分離による離散化の一般論に準じて、曲げねじれの効果をも含めた薄肉はり要素の変位の大きさを制限しない有限変位問題での具体的な離散化について述べるものであり、3次元有限回転とモーメントの表現は文献2)に基づいており、薄肉はりの基礎方程式としては文献3)のものを採用している。

2. 要素位置と要素力

薄肉はりの断面の変位自由度は、3方向の並進、3自由度の回転、およびねじれであり、両端面でその14自由度を与えれば区間上に外力が作用しない要素の空間形状は唯一定まる。それら14自由度を規定するパラメータを以下のように定める。

空間座標として直交デカルト座標 $\{X, Y, Z\}$ を考え、その単位ベクトルを $\{I_{XYZ}\} = \{I_X, I_Y, I_Z\}$ とする。**Fig. 1** に示すように、薄肉はり要素 (e) の両端面 A, B が接続する節点をそれぞれ I, J とし、両節点には埋め込まれて I, J とともに並進・回転する直交単位ベクトル $\{i_{(xyz)}\}^{I,J} = \{i_x, i_y, i_z\}^{I,J}$ を考える。薄肉はりの断面内の主軸2方向の単位ベクトルを $\{i_\xi, i_\eta\}$ 、軸線方向の単位ベクトルを i_ζ として、要素 (e) の両端面 A, B に物体固定された直交単位ベクトル $\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}^{A,B}$ を考える。このとき、 $\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}^{A,B}$ はそれぞれ $\{i_{(xyz)}\}^{I,J}$ に要素の変位・変形に無関係な一定の接続角で接続されており、 $\{i_{(xyz)}\}^{I,J}$ の $\{I_{(XYZ)}\}$ に対する回転を Euler 角 $\{\phi_{(xyz)}\}^{I,J} = \{\phi_x, \phi_y, \phi_z\}^{I,J}$ で表わしてこの $\{\phi_{(xyz)}\}^{I,J}$ を要素両端の回転パラメータとして採用する。ここに、 $\{\phi_{(xyz)}\}$ は、 $i_x \rightarrow i_y \rightarrow i_z$ 軸の順に回転

する Euler 角。また、 $\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}^{A,B}$ の $\{i_{(xyz)}\}^{I,J}$ に対する一定の回転位置も同様の Euler 角 $\{\Gamma_{(\xi\eta\zeta)}\}^{A,B}$ で表わす。並進のパラメータとしては、両節点の $\{I_{(XYZ)}\}$ に関する空間座標 $\{X, Y, Z\}^{I,J}$ を考え、スカラー量である両端面のねじれ率を $\tau^{A,B}$ と表わす。ここで、前述の座標系はすべて右手系であり、後述する直交単位ベクトルまわりでのモーメントのベクトル表示は右ねじの法則のもとに行う。以上のもとに、要素 (e) の空間形状を規定する要素位置として

$$\{X\}_{(e)} = \{ \langle X, Y, Z \rangle^I, (\phi_{(xyz)})^I, \tau^A, \langle X, Y, Z \rangle^J, (\phi_{(xyz)})^J, \tau^B \}_{(e)} \dots\dots (1)$$

を定める。

$\{X\}_{(e)}$ の位置にある要素両端には対応する力、モーメント、およびバイ・モーメントが作用するが、それらを $\{X\}_{(e)}$ からの要素位置パラメータの微小増分との成分間内積が要素の微小実外力仕事となるように次のように成分表示して要素力とよぶものとする。節点 I で考えて、作用する力は、 $\{X, Y, Z\}^I$ に対応する空間座標成分 $\{F_{(XYZ)}\}^I$ で表わし、Euler 角 $\{\phi_{(xyz)}\}^I$ に対する前述の意味でのモーメントの成分は、文献2)でいうところの共変成分 $\{M_{(xyz)}^*\}^I$ であり、直交単位ベクトル $\{i_{(xyz)}\}^I$ まわりでの右ねじの法則による成分を $\{M_{(xyz)}\}^I$ として、

$$\{M_{(xyz)}^*\}^I = [Z^I(\phi_{(xyz)})] \{M_{(xyz)}\}^I \dots\dots (2.a)$$

$$[Z^I] = \begin{bmatrix} \cos \phi_y \cos \phi_z & -\cos \phi_y \sin \phi_z & \sin \phi_y \\ \sin \phi_z & \cos \phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^I \dots\dots (2.b)$$

の変換関係にある。また、ねじれ率 τ^A に対するバイ・モーメントを M_W^A と表わす。以上を節点 J でも同様に考えて、要素力が

$$\{F\}_{(e)} = \{ \langle F_{(XYZ)} \rangle^I, (M_{(xyz)}^*)^I, M_W^A, \langle F_{(XYZ)} \rangle^J, (M_{(xyz)}^*)^J, M_W^B \}_{(e)} \dots\dots (3)$$

として定まる。

3. 要素の剛体変位、変形および変形力

要素の要素座標 $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}_{(e)}$ を次のように定める。端面Aの重心点を原点としてBの同点を結ぶ方向に \bar{z} -座標、Aの断面主軸方向 η と \bar{z} -方向とのなす面内で \bar{z} と直角方向に \bar{y} -座標、 $\{\bar{y}, \bar{z}\}$ 面に直角方向に \bar{x} -座標を考えて、要素の剛体変位とともに並進・回転する右手系直交座標 $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}_{(e)}$ を定め、その直交単位ベクトルを $\{i_{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})}\}_{(e)}$ と表わす (**Fig. 1**)。この要素座標の空間位置

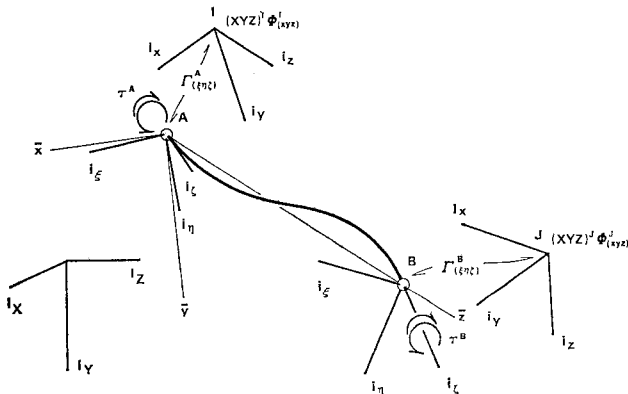


Fig. 1 Position Parameters.

(原点位置と座標方向)は14自由度の $\{X\}_{(e)}$ 中の6自由度で定まる要素の剛体位置と考えてよく、要素座標を空間で固定したときの残りの8自由度が要素の変形を規定する¹⁾。その変形パラメーターを次のように定める。

両端面の $\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}^{A,B}$ の $\{i_{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})}\}_{(e)}$ に対する Euler 角を $\{\theta_{(\xi\eta\zeta)}\}^{A,B}$ と表わせれば、前述の $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}_{(e)}$ の定め方より $\theta_{\zeta}^A \equiv 0$ 。両端面の重心点間の距離を $\bar{l} = (1+\epsilon)l$ (l は重心線に沿う初期長さ) と表わすものとし、他に A, B のねじれ率 $\tau^{A,B}$ を考えて、要素の変形として

$$e_{(e)} = \{\epsilon, \theta_{\xi}^A, \theta_{\xi}^B, \theta_{\eta}^A, \theta_{\eta}^B, \theta_{\zeta}^B, l_{\tau}^A, l_{\tau}^B\} \dots (4)$$

のパラメーターを定める。

要素変形と要素座標の空間位置は、要素位置の自由度を前述の意味のもとに分離したものであり、式(1)の $\{X\}_{(e)}$ の成分より次のように求めることができる。節点 I で考えて、Euler 角 $\{\phi_{(xyz)}\}^I, \{T_{(\xi\eta\zeta)}\}^A$ による $\{I_{(XYZ)}\}$ から $\{i_{(xyz)}\}^I$, および $\{i_{(xyz)}\}^I$ から $\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}^A$ への直交変換マトリックスをそれぞれ $[T^I(\phi_{(xyz)})]$, および $[T_I^A(T_{(\xi\eta\zeta)})]$ として、 $\{I_{(XYZ)}\}$ から $\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}^A$ への変換

$$\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}^A = [T^A]\{I_{(XYZ)}\} \dots (5)$$

のマトリックス $[T^A] = [T_I^A][T^I(\phi_{(xyz)})]$ は与えられた Euler 角 $\{\phi_{(xyz)}\}$ に対して既知であり、 $[T^A]$ の成分を

$$[T^A] = \begin{bmatrix} T_{(\xi X)} & T_{(\xi Y)} & T_{(\xi Z)} \\ T_{(\eta X)} & T_{(\eta Y)} & T_{(\eta Z)} \\ T_{(\zeta X)} & T_{(\zeta Y)} & T_{(\zeta Z)} \end{bmatrix}^A \dots (6)$$

と表わすものとし、節点 J でも同様に考える。この準備のもとに、要素座標の空間での回転位置

$$\{i_{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})}\}^{(e)} = [T^{(e)}]\{I_{(XYZ)}\} \dots (7)$$

を定める直交マトリックス $[T^{(e)}]$ の各成分

$$[T^{(e)}] = \begin{bmatrix} T_{(\bar{x}X)} & T_{(\bar{x}Y)} & T_{(\bar{x}Z)} \\ T_{(\bar{y}X)} & T_{(\bar{y}Y)} & T_{(\bar{y}Z)} \\ T_{(\bar{z}X)} & T_{(\bar{z}Y)} & T_{(\bar{z}Z)} \end{bmatrix}^{(e)} \dots (8)$$

と式(4)の各変形パラメーターを求めることを考える。

幾何学的関係より、 $[T^{(e)}]$ の第3行成分が

$$\{T_{(\bar{z}X)}, T_{(\bar{z}Y)}, T_{(\bar{z}Z)}\}^{(e)} = \{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\} / \bar{l} \dots (9 \cdot a)$$

と表わされ、変形パラメーター ϵ が

$$\epsilon = \sqrt{\bar{X}^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2} / l - 1 \dots (10 \cdot a)$$

と表わされることは明らかである。ここに、 $\{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}$ は

$$\{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\} = \{X_J - X_I, Y_J - Y_I, Z_J - Z_I\} \dots (11)$$

を表わす。また、 $[T^{(e)}]$ の第2行成分は、前述の要素座標の設定における $|i_{\bar{y}}^{(e)}| = 1, i_{\bar{y}}^{(e)} \cdot i_{\bar{z}}^{(e)} = 0$, および $(i_{\bar{y}}^A \times i_{\bar{z}}^{(e)}) \cdot i_{\bar{y}}^{(e)} = 0$ の条件より

$$\begin{Bmatrix} T_{(\bar{y}X)} \\ T_{(\bar{y}Y)} \\ T_{(\bar{y}Z)} \end{Bmatrix}^{(e)} = \frac{1}{\sqrt{A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2}} \begin{Bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{Bmatrix} \dots (9 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} A_X &= \bar{Y}(T_{(\eta X)}^A \bar{Y} - T_{(\eta Y)}^A \bar{X}) \\ &\quad - \bar{Z}(T_{(\eta Z)}^A \bar{X} - T_{(\eta X)}^A \bar{Z}) \\ A_Y &= \bar{Z}(T_{(\eta Y)}^A \bar{Z} - T_{(\eta Z)}^A \bar{Y}) \\ &\quad - \bar{X}(T_{(\eta X)}^A \bar{Y} - T_{(\eta Y)}^A \bar{X}) \\ A_Z &= \bar{X}(T_{(\eta Z)}^A \bar{X} - T_{(\eta X)}^A \bar{Z}) \\ &\quad - \bar{Y}(T_{(\eta Y)}^A \bar{Z} - T_{(\eta Z)}^A \bar{Y}) \dots (12 \cdot a \sim c) \end{aligned}$$

であり、第1行成分は、 $i_{\bar{x}}^{(e)} = i_{\bar{y}}^{(e)} \times i_{\bar{z}}^{(e)}$ の関係より

$$\begin{Bmatrix} T_{(\bar{x}X)} \\ T_{(\bar{x}Y)} \\ T_{(\bar{x}Z)} \end{Bmatrix}^{(e)} = \frac{\bar{l}}{\sqrt{A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2}} \begin{Bmatrix} T_{(\eta Y)}^A \bar{Z} - T_{(\eta Z)}^A \bar{Y} \\ T_{(\eta Z)}^A \bar{X} - T_{(\eta X)}^A \bar{Z} \\ T_{(\eta X)}^A \bar{Y} - T_{(\eta Y)}^A \bar{X} \end{Bmatrix} \dots (9 \cdot c)$$

として定まる。端面Aで考えて、 $\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}^A$ の要素座標方向 $\{i_{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})}\}^{(e)}$ に対する回転位置

$$\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}^A = [T_{(e)}^A]\{i_{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})}\}^{(e)} \dots (13)$$

を規定する直交マトリックス $[T_{(e)}^A]$ の各成分は、前述の式(6),(8)の $[T^A]$ と $[T^{(e)}]$ を用いて

$$[T_{(e)}^A] = [T^A][T^{(e)}]^T \dots (14)$$

として、端面Bでも同様に表わすことができるが、一方、変形に含まれる $\{\theta_{\xi}, \theta_{\eta}^A\} (\theta_{\zeta}^A \equiv 0)$, $\{\theta_{\xi}, \theta_{\eta}, \theta_{\zeta}\}^B$ は $\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}^{A,B}$ の $\{i_{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})}\}^{(e)}$ に対する Euler 角であり、 $[T_{(e)}^A]$ と $[T_{(e)}^B]$ はこれらを用いて表わすこともでき、対応する成分を等しいとおくことにより、これらの Euler 角を $[T^{A,B}]$ と $[T^{(e)}]$ の成分に関して、したがって式(1)の要素位置のパラメーターに関して求めることができ、それらは

$$\begin{aligned} \theta_{\xi}^A &= \arcsin(T_{(e)}^A{}_{(\eta\bar{z})}) \\ \theta_{\eta}^A &= \arcsin(T_{(e)}^A{}_{(\zeta\bar{x})}) \\ \theta_{\xi}^B &= \arcsin(-T_{(e)}^B{}_{(\zeta\bar{y})} / \sqrt{1 - (T_{(e)}^B{}_{(\zeta\bar{x})})^2}) \\ \theta_{\eta}^B &= \arcsin(T_{(e)}^B{}_{(\zeta\bar{x})}) \\ \theta_{\zeta}^B &= \arcsin(-T_{(e)}^B{}_{(\eta\bar{x})} / \sqrt{1 - (T_{(e)}^B{}_{(\zeta\bar{x})})^2}) \dots (10 \cdot b \sim f) \end{aligned}$$

と表わすことができる。また、式(4)に含まれるパラメーター $\tau^{A,B}$ は、式(1)に含まれるねじれ率である。

要素(e)の両端面に作用する一般力の中の式(4)の変形パラメーターに対応する成分、すなわち $e_{(e)}$ からの微小変形増分 $\delta e_{(e)}$ との内積が要素の微小実内力仕事となるような成分の組として変形力 $f_{(e)}$ を定義すれば、各成分は次のように考えて定まる。端面Bで \bar{x} -方向に作用する力を H として ϵ に対応する変形力成分は明らかに Hl であり、 l_{τ}^A, l_{τ}^B に対しては $M_W^A/l, M_W^B/l$ が対応する。端面Bで考えて、Bに作用する直交単位ベクトル $\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}^B$ まわりのモーメント成分を $\{M_{(\xi\eta\zeta)}\}^B$ として、要素座標方向 $\{i_{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})}\}^{(e)}$ からの Euler 角 $\{\theta_{\xi}, \theta_{\eta}, \theta_{\zeta}\}^B$ に対応するモーメントの共変成分 $\{M_{(\xi\eta\zeta)}^*\}^B$ は²⁾、式(2)の変換と同様に考えて、

$$\{M_{(\xi\eta\zeta)}\}^B = [Z_{(e)}{}^B(\theta_{(\xi\eta\zeta)})]\{M_{(\xi\eta\zeta)}\}^B \dots\dots (15 \cdot a)$$

$$[Z_{(e)}{}^B] = \begin{bmatrix} \cos \theta_\eta \cos \theta_\zeta & -\cos \theta_\eta \sin \theta_\zeta & \sin \theta_\eta \\ \sin \theta_\zeta & \cos \theta_\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^B \dots\dots (15 \cdot b)$$

と表わされる。端面 A でも、 $\theta_\zeta^A \equiv 0$ として同様である。以上のもとに、式 (4) の変形パラメーターに対する変形力成分は、

$$\mathbf{f}_{(e)} = \{HI, M_\xi^{*A}, M_\xi^{*B}, M_\eta^{*A}, M_\eta^{*B}, M_\zeta^{*A}, M_W^A/l, M_W^B/l\} \dots\dots (16)$$

として定まることになる。

4. 要素力-変形力関係と反傾関係

変形 $\mathbf{e}_{(e)}$ が要素位置 $\{X\}_{(e)}$ より剛体変位成分を除いて、すなわち要素節点に関する静定支持のもとでの残りの節点自由度として定まることに対応して、変形力 $\mathbf{f}_{(e)}$ より要素力 $\{F\}_{(e)}$ は、要素の剛体的つり合い条件(すなわち静定支持での反力)と剛体回転を考慮して求め

ることができる。

式 (15) の逆関係は、 $[Z_{(e)}{}^B]$ の逆行列、

$$[Z_{(e)}{}^B]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_\zeta}{\cos \theta_\eta} \sin \theta_\zeta & -\cos \theta_\zeta \tan \theta_\eta \\ -\frac{\sin \theta_\zeta}{\cos \theta_\eta} \cos \theta_\zeta & \sin \theta_\zeta \tan \theta_\eta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^B \dots\dots (17)$$

を求めて定まり、A 端でも $\theta_\zeta^A \equiv 0$ として同様であるが、要素座標に関する成分 $\{M_{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})}\}^{A,B} = [T_{(e)}{}^{A,B}]^T [Z_{(e)}{}^{A,B}]^{-1} \{M_{(\xi\eta\zeta)}\}^{A,B}$ での \bar{x} -軸まわりつり合い条件 $M_{\bar{x}}^A + M_{\bar{x}}^B = 0$ より $M_\zeta^{*A} (\equiv M_\zeta^A)$ を $\mathbf{f}_{(e)}$ のモーメント成分の反力として求めることができる。以上のもとに、端面 A, B での $\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}^{A,B}$ まわりでのモーメント成分を

$$\{M_{(\xi\eta\zeta)}\}^{A,B} = [S_M^{A,B}(e)] \mathbf{f}_{(e)} \dots\dots (18 \cdot a)$$

の形で表わすことができ、変換マトリックス $[S_M^{A,B}]$ は

$$[S_M^A] = \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta_\eta^A & -\frac{\sin \theta_\eta^A}{\cos \theta_\xi^A} \cdot \cos \theta_\xi^B \tan \theta_\eta^B & \sin \theta_\eta^A \tan \theta_\xi^A & \frac{\sin \theta_\eta^A}{\cos \theta_\xi^A} \cdot \sin \theta_\xi^B & \frac{\sin \theta_\eta^A}{\cos \theta_\xi^A} \cdot \frac{\cos \theta_\xi^B}{\cos \theta_\eta^B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_\eta^A & \frac{\cos \theta_\eta^A}{\cos \theta_\xi^A} \cdot \cos \theta_\xi^B \tan \theta_\eta^B & -\cos \theta_\eta^A \tan \theta_\xi^A & -\frac{\cos \theta_\eta^A}{\cos \theta_\xi^A} \cdot \sin \theta_\xi^B & -\frac{\cos \theta_\eta^A}{\cos \theta_\xi^A} \cdot \frac{\cos \theta_\xi^B}{\cos \theta_\eta^B} & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots (19 \cdot a)$$

$$[S_M^B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\cos \theta_\zeta^B}{\cos \theta_\eta^B} & 0 & \sin \theta_\zeta^B & -\cos \theta_\zeta^B \tan \theta_\eta^B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sin \theta_\zeta^B}{\cos \theta_\eta^B} & 0 & \cos \theta_\zeta^B & \sin \theta_\zeta^B \tan \theta_\eta^B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots (19 \cdot b)$$

のように定まる。また、要素両端に作用する力と \bar{x}, \bar{y} -軸まわりでのモーメントのつり合いは

$$\{F_{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})}\}^A + \{F_{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})}\}^B = \{0, 0, 0\} \\ \{M_{\bar{x}}, M_{\bar{y}}\}^A + \{M_{\bar{x}}, M_{\bar{y}}\}^B + \{-F_{\bar{y}}, F_{\bar{x}}\}^B l = \{0, 0\} \dots\dots (20 \cdot a, b)$$

であり、式 (18・a) の結果の $[T_{(e)}{}^{A,B}]^T$ による変換と $F_{\bar{x}}^B = H$ を前式に代入して展開すれば、両端に作用する力 $\{F_{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})}\}^{A,B}$ が定まるが、変換マトリックス $[T_{(e)}{}^{A,B}]$ を用いて $\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}^{A,B}$ 方向成分で

$$\{F_{(\xi\eta\zeta)}\}^{A,B} = [S_F^{A,B}(e)] \mathbf{f}_{(e)} \dots\dots (18 \cdot b)$$

の形で表わすものとすれば、 $[S_F^{A,B}]$ の各成分は

$$[S_F^A] = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_\xi^A \sin \theta_\eta^A}{l} & -\frac{\sin \theta_\xi^A \sin \theta_\eta^A}{l} & \frac{1}{l} \left\{ \cos \theta_\eta^A (-\tan \theta_\xi^A \cos \theta_\xi^B + \sin \theta_\xi^B) \right. \\ & & \left. \cdot \tan \theta_\eta^B - \sin \theta_\xi^A \sin \theta_\eta^A \right\} \\ -\frac{\sin \theta_\xi^A}{l} & -\frac{\cos \theta_\xi^A}{l} & -\frac{\cos \theta_\xi^A}{l} \\ \frac{\cos \theta_\eta^A \cos \theta_\xi^A}{l} & \frac{\sin \theta_\eta^A \cos \theta_\xi^A}{l} & \frac{1}{l} \left\{ \sin \theta_\eta^A (-\tan \theta_\xi^A \cos \theta_\xi^B + \sin \theta_\xi^B) \right. \\ & & \left. \cdot \tan \theta_\eta^B + \sin \theta_\xi^A \cos \theta_\eta^A \right\} \\ \frac{\cos \theta_\eta^A}{l \cos \theta_\xi^A} & \frac{\cos \theta_\eta^A \cos(\theta_\xi^B - \theta_\xi^A)}{l \cos \theta_\xi^A} & \frac{\cos \theta_\eta^A \sin(\theta_\xi^A - \theta_\xi^B)}{l \cos \theta_\eta^B \cos \theta_\xi^A} & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sin \theta_\eta^A}{l \cos \theta_\xi^A} & \frac{\sin \theta_\eta^A \cos(\theta_\xi^B - \theta_\xi^A)}{l \cos \theta_\xi^A} & \frac{\sin \theta_\eta^A \sin(\theta_\xi^A - \theta_\xi^B)}{l \cos \theta_\eta^B \cos \theta_\xi^A} & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots (19 \cdot c)$$

$$[S_F^B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} \begin{pmatrix} -\cos \theta_\xi^B \sin \theta_\eta^B \cos \theta_\zeta^B \\ + \sin \theta_\xi^B \sin \theta_\zeta^B \end{pmatrix} & \frac{1}{l} \begin{pmatrix} \sin \theta_\xi^B \sin \theta_\eta^B \cos \theta_\zeta^B \\ + \cos \theta_\xi^B \sin \theta_\zeta^B \end{pmatrix} & \frac{1}{l} \begin{pmatrix} \tan \theta_\xi^A \cos \theta_\xi^B \sin \theta_\eta^B \cos \theta_\zeta^B \\ + \cos \theta_\xi^B \sin \theta_\zeta^B \end{pmatrix} \\ \frac{1}{l} \begin{pmatrix} \cos \theta_\xi^B \sin \theta_\eta^B \sin \theta_\zeta^B \\ + \sin \theta_\xi^B \cos \theta_\zeta^B \end{pmatrix} & \frac{1}{l} \begin{pmatrix} -\sin \theta_\xi^B \sin \theta_\eta^B \sin \theta_\zeta^B \\ + \cos \theta_\xi^B \cos \theta_\zeta^B \end{pmatrix} & \frac{1}{l} \begin{pmatrix} -\tan \theta_\xi^A \cos \theta_\xi^B \sin \theta_\eta^B \sin \theta_\zeta^B \\ + \cos \theta_\xi^B \cos \theta_\zeta^B \end{pmatrix} \\ \frac{1}{l} \cos \theta_\xi^B \cos \theta_\eta^B & -\frac{1}{l} \sin \theta_\xi^B \cos \theta_\eta^B & \left(\frac{\tan \theta_\xi^A \cos \theta_\xi^B (\sin \theta_\eta^B)^2 - \sin \theta_\xi^B}{l \cos \theta_\eta^B} \right) \end{bmatrix} \\ * \begin{bmatrix} \frac{-\cos \theta_\eta^B \cos \theta_\zeta^B}{l \cos \theta_\xi^A} & \frac{-\cos(\theta_\xi^B - \theta_\xi^A) \cos \theta_\eta^B \cos \theta_\zeta^B}{l \cos \theta_\xi^A} & \frac{\sin(\theta_\xi^B - \theta_\xi^A) \cos \theta_\zeta^B}{l \cos \theta_\xi^A} & 0 & 0 \\ \frac{\cos \theta_\eta^B \sin \theta_\zeta^B}{l \cos \theta_\xi^A} & \frac{\cos(\theta_\xi^B - \theta_\xi^A) \cos \theta_\eta^B \sin \theta_\zeta^B}{l \cos \theta_\xi^A} & \frac{\sin(\theta_\xi^A - \theta_\xi^B) \sin \theta_\zeta^B}{l \cos \theta_\xi^A} & 0 & 0 \\ \frac{-\sin \theta_\eta^B}{l \cos \theta_\xi^A} & \frac{-\cos(\theta_\xi^B - \theta_\xi^A) \sin \theta_\eta^B}{l \cos \theta_\xi^A} & \frac{\sin(\theta_\xi^B - \theta_\xi^A) \tan \theta_\eta^B}{l \cos \theta_\xi^A} & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (19 \cdot d)$$

として定まる。式 (3) で定めた要素力は、力に関して空間座標成分、モーメントに関しては Euler 角 $\{\phi_{(xyz)}\}^{I,J}$ の共変成分の組であり、式 (19・a~d) の結果に $[T_I^A]^T, [T_J^B]^T, [T^I]^T, [T^J]^T$ の変換を考えて

$$\{F\}_{(e)} = [Q_{F(e)}(\{X\})] f_{(e)} \dots (21 \cdot a)$$

$$[Q_{F(e)}] = \begin{bmatrix} [T^I]^T [T_I^A]^T [S_F^A] \\ [Z^I] [T_I^A]^T [S_M^A] \\ \langle 0, \dots, 0, l, 0 \rangle \\ [T^J]^T [T_J^B]^T [S_F^B] \\ [Z^J] [T_J^B]^T [S_M^B] \\ \langle 0, \dots, 0, 0, l \rangle \end{bmatrix} \dots (21 \cdot b)$$

と表わされることになる。

要素力と変形力は、それぞれ要素位置と変形に対して 2., 3. で述べた意味で、すなわち、 $\{X\}_{(e)}$ での $\delta\{X\}_{(e)}$ と $\{F\}_{(e)}$ および $e_{(e)}$ での $\delta e_{(e)}$ と $f_{(e)}$ の内積がそれぞれ要素の微小実外力仕事と微小実内力仕事を表わすという意味で、対応する成分表示であり、仮想仕事の式、

$$\{F\}_{(e)}^T \delta\{X\}_{(e)} = f_{(e)}^T \delta e_{(e)} \dots (22)$$

が成立するが、3. で展開した要素変形-要素位置関係の微分関係、

$$\delta e_{(e)} = [Q_{X(e)}(\{X\})] \delta\{X\}_{(e)} \dots (23)$$

を前式に代入して、式 (21・a) の要素力-変形力関係を考えれば、これら 2 つの関係式の間には

$$[Q_{X(e)}(\{X\})] = [Q_{F(e)}(\{X\})]^T \dots (24)$$

の反傾関係があることがいえる。

5. 変形力-変形関係

$f_{(e)}$ と $e_{(e)}$ の関係は薄肉はりの変形の問題を何らかの手段で解いて得られるが、ここでは文献 3) の有限変位薄肉はり要素の基礎方程式を以下に述べるように変換した後、文献 1) と同様の摂動法を適用して近似解を得ている。

本節では、前節までとは無関係に空間直交デカルト座標を $\{x, y, z\}$ 、その基ベクトルを $\{i_{(xyz)}\}$ と表わす。文献 3) の基本未知量は重心線の空間座標 $\{x_C(\zeta), y_C(\zeta), z_C(\zeta)\}$ と断面のねじれ回転のパラメーター $\varphi(\zeta)$

であるが (ζ は初期状態の重心線の実長に沿う物体固定座標)、ここでは、断面各点での $\{i_{(\xi\eta\zeta)}(\zeta)\}$ の $\{i_{(xyz)}\}$ への Euler 角 $\{\alpha(\zeta), \beta(\zeta), \tau(\zeta)\}$ と重心線伸び率 $\epsilon_C(\zeta)$ を基本未知量として考える。

Euler 角 $\{\alpha(\zeta), \beta(\zeta), \tau(\zeta)\}$ を用いて、 $\{i_{(\xi\eta\zeta)}(\zeta)\}$ の $\{i_{(xyz)}\}$ に対する回転位置は

$$\{i_{(\xi\eta\zeta)}(\zeta)\} = [\hat{T}(\alpha, \beta, \tau)] \{i_{(xyz)}\} \dots (25 \cdot a)$$

$$[\hat{T}(\zeta)] = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \tau & \sin \alpha \sin \beta \cos \tau \\ & + \cos \alpha \sin \tau \\ -\cos \beta \sin \tau & -\sin \alpha \sin \beta \sin \tau \\ & + \cos \alpha \cos \tau \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \tau \\ & + \sin \alpha \sin \tau \\ * \cos \alpha \sin \beta \sin \tau \\ & + \sin \alpha \cos \tau \\ \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \dots (25 \cdot b)$$

となる。直交単位ベクトル $\{i_{(\xi\eta\zeta)}(\zeta)\}$ の ζ に関する微係数を

$$\frac{d}{d\zeta} \{i_{(\xi\eta\zeta)}(\zeta)\} = [\hat{\phi}(\zeta)] \{i_{(\xi\eta\zeta)}(\zeta)\} \dots (26 \cdot a)$$

の形で表わせば、 $[\hat{\phi}(\zeta)]$ の成分は、一般に、

$$[\hat{\phi}(\zeta)] = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\xi & -\kappa_\zeta \\ -\kappa_\zeta & 0 & -\kappa_\eta \\ \kappa_\xi & \kappa_\eta & 0 \end{bmatrix} \dots (26 \cdot b)$$

の反対称となり、 κ_ξ, κ_η および κ_ζ をそれぞれ ζ -座標に関する $\{\xi, \eta\}$ -方向の曲率およびねじれ率とよぶものとすれば、式 (25) の関係式を実際に展開してこれらの各規格量は

$$\left. \begin{aligned} \kappa_\xi &= -\alpha' \cos \beta \sin \tau + \beta' \cos \tau \\ \kappa_\eta &= -\alpha' \cos \beta \cos \tau - \beta' \sin \tau \\ \kappa_\zeta &= \alpha' \sin \beta + \tau' \end{aligned} \right\} \dots (27 \cdot a \sim c)$$

として求まる。3. で述べた要素座標 $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}_{(e)}$ を本節での $\{x, y, z\}$ 座標に一致させて固定して定まる静定支持のもとに (Fig. 2), 要素の変形を考えるものとする。ここでは式展開の簡単のために、分布外力の作用しない 2 軸対称断面の直線薄肉はり要素を考えるものと

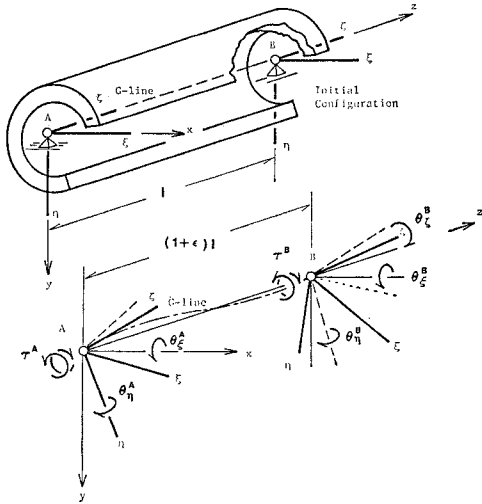


Fig. 2 Deformation Parameters.

すれば、基礎方程式³⁾は前述の変換のもとに次のように表わされる。

つり合い式：

$$\frac{d}{d\zeta} \left([\hat{T}(\zeta)]^T \begin{Bmatrix} M_{(\eta)} \\ -M_{(\xi)} \\ T \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} \hat{T}_{(\zeta y)} F_z - \hat{T}_{(\zeta z)} F_y \\ \hat{T}_{(\zeta z)} F_x - \hat{T}_{(\zeta x)} F_z \\ \hat{T}_{(\zeta x)} F_y - \hat{T}_{(\zeta y)} F_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$N = \hat{T}_{(\zeta x)} F_x + \hat{T}_{(\zeta y)} F_y + \hat{T}_{(\zeta z)} F_z$$

$$T = T_S + M_W' + K\kappa_\zeta \dots (28 \cdot a \sim c)$$

合応力-ひずみ関係：

$$M_{(\xi)} = -EI_{\xi\xi}\kappa_\xi, M_{(\eta)} = -EI_{\eta\eta}\kappa_\eta, M_W = -EI_{WW}\kappa_\zeta'$$

$$T_S = GJ_S\kappa_\zeta, K = EI_C\epsilon_G + \frac{1}{2}EI_{GG}\kappa_\zeta^2$$

$$N = EA\epsilon_G + \frac{1}{2}EI_{GG}\kappa_\zeta^2 \dots (29 \cdot a \sim f)$$

幾何学的境界条件式：

$$x_G(l) = \int_0^l (1 + \epsilon_G) \hat{T}_{(\zeta x)} d\zeta = 0$$

$$y_G(l) = \int_0^l (1 + \epsilon_G) \hat{T}_{(\zeta y)} d\zeta = 0$$

$$z_G(l) = \int_0^l (1 + \epsilon_G) \hat{T}_{(\zeta z)} d\zeta = (1 + \epsilon)l$$

$$\alpha(0) = \theta_\xi^A, \alpha(l) = \theta_\xi^B$$

$$\beta(0) = \theta_\eta^A, \beta(l) = \theta_\eta^B$$

$$r(0) = 0, r(l) = \theta_\zeta^B$$

$$\kappa_\zeta(0) = \tau^A, \kappa_\zeta(l) = \tau^B \dots (30 \cdot a \sim k)$$

ただし、 $\{\hat{T}_{(\zeta x)}, \hat{T}_{(\zeta y)}, \hat{T}_{(\zeta z)}\}$ は式 (25・b) の $[\hat{T}]$ の第 3 行成分で表わされる $i_\zeta(\zeta)$ の方向余弦であり、 $\{F_x, F_y, F_z\}$ は断面に作用する力の $\{x, y, z\}$ 方向成分を表わす定数未知量である。また、 $\zeta=0$ での境界条

件 $x_G(0) = y_G(0) = z_G(0) = 0$ は、本節での $\{\alpha, \beta, \tau, \epsilon_G\}$ を未知量とした系では自明的に満たされる。ここで述べていない断面係数等の定義は文献 3) に準じている。

次に、後述する級数展開の性質上、B 端の条件式 (30・c) に代えて、対応する力学的条件

$$F_z = H \dots (30 \cdot c)'$$

を独立に与えて後に関数関係を変換するものとし、また、以上の式で最初に重心線の不伸長 $\epsilon_G(\zeta) \equiv 0$ を仮定して展開し、後に微小ひずみの範囲での伸びを付加項として考慮するものとする¹⁾。このとき $N(\zeta)$ は $\epsilon_G(\zeta)$ に代わる基本未知量となり、式 (29・f) を式 (29・e) に代入して

$$K = \frac{I_G}{A} N + \frac{1}{2} EI_{GG}^* \kappa_\zeta^2 \dots (29 \cdot e)'$$

$$\text{ただし、} I_{GG}^* = I_{GG} - \frac{I_G^2}{A} \dots (31)$$

を式 (29・e) に代えて用いる。

以上の要素両端の H および強制変位の経路として

$$\{ \bar{H}(\rho), \bar{\theta}_\xi^A(\rho), \bar{\theta}_\xi^B(\rho), \bar{\theta}_\eta^A(\rho), \bar{\theta}_\eta^B(\rho), \bar{\theta}_\zeta^B(\rho), \bar{\tau}^A(\rho), \bar{\tau}^B(\rho) \}$$

$$= \{ H, \theta_\xi^A, \theta_\xi^B, \theta_\eta^A, \theta_\eta^B, \theta_\zeta^B, \tau^A, \tau^B \} \rho, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \dots (32)$$

の線形経路を考えるものとするれば、すべての未知量は経路のパラメーター ρ のべき級数に展開することができ、それらを以下のように表わす。

$$\alpha(\rho, \zeta) = \sum_1^\infty \alpha_n(\zeta) \rho^n \quad \beta(\rho, \zeta) = \sum_1^\infty \beta_n(\zeta) \rho^n$$

$$r(\rho, \zeta) = \sum_1^\infty r_n(\zeta) \rho^n \quad N(\rho, \zeta) = \sum_1^\infty n_n(\zeta) \rho^n$$

$$M_{(\xi)}(\rho, \zeta) = \sum_1^\infty m_{(\xi)n}(\zeta) \rho^n$$

$$M_{(\eta)}(\rho, \zeta) = \sum_1^\infty m_{(\eta)n}(\zeta) \rho^n$$

$$T(\rho, \zeta) = \sum_1^\infty t_n(\zeta) \rho^n \quad M_W(\rho, \zeta) = \sum_1^\infty m_{Wn}(\zeta) \rho^n$$

$$K(\rho, \zeta) = \sum_1^\infty k_n(\zeta) \rho^n \quad T_S(\rho, \zeta) = \sum_1^\infty t_{Sn}(\zeta) \rho^n$$

$$x_G(\rho, \zeta) = \sum_1^\infty x_{Gn}(\zeta) \rho^n$$

$$y_G(\rho, \zeta) = \sum_1^\infty y_{Gn}(\rho, \zeta) \rho^n$$

$$z_G(\rho, \zeta) = \zeta + \sum_1^\infty z_{Gn}(\zeta) \rho^n \quad F_x(\rho) = \sum_1^\infty f_{xn} \rho^n$$

$$F_y(\rho) = \sum_1^\infty f_{yn} \rho^n \quad F_z(\rho) = \sum_1^\infty f_{zn} \rho^n$$

..... (33・a~p)

これらの表示式を、式 (25・b)、(27・a~c)、(28・a~c)、(29・a~d, e') および (30・a, b, c', d~k) に代入して、 ρ の次数に関して整理すればいわゆる振動方程式が求まるが、その 1 次と 2 次の系は以下のように表わすことができる。

[1 次の系]

$$\begin{aligned} m_{(\eta)1}' - f_{y1} &= 0 & -m_{(\xi)1}' + f_{x1} &= 0 \\ t_1' &= 0 & n_1 &= f_{z1} & t_1 &= t_{S1} + m_{W1}' \\ m_{(\xi)1} &= -EI_{\xi\xi}\beta_1' & m_{(\eta)1} &= EI_{\eta\eta}\alpha_1' \\ m_{W1} &= -EI_{WW}r_1'' & k_1 &= \frac{IG}{A}n_1 \\ t_{S1} &= GJ_S r_1' \dots\dots\dots (34 \cdot a \sim j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \alpha_1 d\zeta &= 0 & \int_0^l \beta_1 d\zeta &= 0 \\ f_{z1} &= H \\ \alpha_1(0) &= \theta_\xi^A & \alpha_1(l) &= \theta_\xi^B \\ \beta_1(0) &= \theta_\eta^A & \beta_1(l) &= \theta_\eta^B \\ r_1(0) &= 0 & r_1(l) &= \theta_\zeta^B \\ r_1'(0) &= \tau^A & r_1'(l) &= \tau^B \dots\dots\dots (35 \cdot a \sim k) \end{aligned}$$

[2 次の系]

$$\begin{aligned} (m_{(\eta)2} + \tau_1 m_{(\xi)1} + \beta_1 t_1)' + (-f_{y2} - \alpha_1 f_{z1}) &= 0 \\ (-m_{(\xi)2} + \tau_1 m_{(\eta)1} - \alpha_1 t_1)' + (f_{x2} - \beta_1 f_{z1}) &= 0 \\ (t_2 - \beta_1 m_{(\eta)1} - \alpha_1 m_{(\xi)1})' + (\beta_1 f_{y1} + \alpha_1 f_{x1}) &= 0 \\ n_2 &= f_{z2} + \beta_1 f_{x1} - \alpha_1 f_{y1} \\ t_2 &= t_{S2} + m_{W2}' + k_1 r_1' \\ m_{(\xi)2} &= -EI_{\xi\xi}(\beta_2' - \alpha_1' r_1), \quad m_{(\eta)2} = EI_{\eta\eta}(\alpha_2' + \beta_1' r_1) \\ m_{W2} &= -EI_{WW}(\tau_2' + \alpha_1' \beta_1), \quad k_2 = \frac{IG}{A}n_2 + \frac{EIGC^*}{2}(r_1')^2 \\ t_{S2} &= GJ_S(\tau_2' + \alpha_1' \beta_1) \dots\dots\dots (36 \cdot a \sim j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \alpha_2 d\zeta &= 0 & \int_0^l \beta_2 d\zeta &= 0 \\ f_{z2} &= 0 \\ \alpha_2(0) &= 0 & \alpha_2(l) &= 0 \\ \beta_2(0) &= 0 & \beta_2(l) &= 0 \\ \tau_2(0) &= 0 & \tau_2(l) &= 0 \\ (\tau_2' + \alpha_1' \beta_1)|_{\zeta=0} &= 0 & (\tau_2' + \alpha_1' \beta_1)|_{\zeta=l} &= 0 \\ \dots\dots\dots (37 \cdot a \sim k) \end{aligned}$$

この摂動方程式の系は $n=1, 2, \dots$ の順に解くことができるが、ここでは2次までの展開結果の $\rho=1, \zeta=0$, or l での値を次のように変換して変形パラメーターに関する2次近似の変形力-変形関係を求めた。断面に作用するモーメントの $\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}$ -軸まわりの成分 $\{M_{(\xi\eta\zeta)}\}$ は前述の系の $\{M_{(\eta)}, -M_{(\xi)}, T\}$ で表わされるが、はりの両端 A, B での Euler 角 $\{\theta_\xi, \theta_\eta, 0\}^A, \{\theta_\xi, \theta_\eta, \theta_\zeta\}^B$ に対するモーメントの共変成分 $\{M_\xi^*, M_\eta^*, M_\zeta^*\}^{A,B}$ は $\{i_{(\xi\eta\zeta)}\}$ -軸まわりの成分を式 (15 \cdot a, b) のように変換して得られ、その変換式を変形パラメーターの2次まで展開すると、次の関係が得られる。

$$\begin{Bmatrix} M_\xi^* \\ M_\eta^* \\ M_\zeta^* \end{Bmatrix}^B = \begin{Bmatrix} m_{(\eta)1} + m_{(\eta)2} + \theta_\zeta m_{(\xi)1} + \theta_\eta t_1 \\ -m_{(\xi)1} - m_{(\xi)2} + \theta_\zeta m_{(\eta)1} \\ t_1 + t_2 \end{Bmatrix}_{\zeta=l} \dots (38)$$

ただし、 $\theta_\zeta^A \equiv 0, \zeta=0$ としてA端でも同様である。以上の結果を整理して表わせば次のようになる。

$$\begin{aligned} M_\xi^{*A} &= \frac{EI_{\eta\eta}}{l} \langle 4, 2 \rangle \{\theta_\xi^A, \theta_\xi^B\} + \frac{E(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{l} [\langle \bar{d}_1^{(AA)}, \bar{d}_2^{(AA)}, \bar{d}_3^{(AA)} \rangle \theta_\xi^A \{\theta_\zeta^B, l\tau^A, l\tau^B\} \\ &+ \langle \bar{d}_1^{(AB)}, \bar{d}_2^{(AB)}, \bar{d}_3^{(AB)} \rangle \theta_\eta^B \{\theta_\zeta^B, l\tau^A, l\tau^B\}] + \frac{GJ_S}{2l} \langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_2 \rangle (-\theta_\eta^A + \theta_\eta^B) \{\theta_\zeta^B, l\tau^A, l\tau^B\} \\ &+ Hl \langle \frac{2}{15}, -\frac{1}{30} \rangle \{\theta_\xi^A, \theta_\xi^B\} \dots\dots\dots (39 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_\xi^{*B} &= \frac{EI_{\eta\eta}}{l} \langle 2, 4 \rangle \{\theta_\xi^A, \theta_\xi^B\} + \frac{E(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{l} [\langle \bar{d}_1^{(BA)}, \bar{d}_2^{(BA)}, \bar{d}_3^{(BA)} \rangle \theta_\eta^A \{\theta_\zeta^B, l\tau^A, l\tau^B\} \\ &+ \langle \bar{d}_1^{(BB)}, \bar{d}_2^{(BB)}, \bar{d}_3^{(BB)} \rangle \theta_\eta^B \{\theta_\zeta^B, l\tau^A, l\tau^B\}] + \frac{GJ_S}{2l} \langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, c_2 \rangle (-\theta_\eta^A + \theta_\eta^B) \{\theta_\zeta^B, l\tau^A, l\tau^B\} \\ &+ Hl \langle -\frac{1}{30}, \frac{2}{15} \rangle \{\theta_\xi^A, \theta_\xi^B\} \dots\dots\dots (39 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_\eta^{*A} &= \frac{EI_{\xi\xi}}{l} \langle 4, 2 \rangle \{\theta_\eta^A, \theta_\eta^B\} + \frac{E(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{l} [\langle \bar{d}_1^{(AA)}, \bar{d}_2^{(AA)}, \bar{d}_3^{(AA)} \rangle \theta_\xi^A \{\theta_\zeta^B, l\tau^A, l\tau^B\} \\ &+ \langle \bar{d}_1^{(AB)}, \bar{d}_2^{(AB)}, \bar{d}_3^{(AB)} \rangle \theta_\xi^B \{\theta_\zeta^B, l\tau^A, l\tau^B\}] + \frac{GJ_S}{2l} \langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_2 \rangle (-\theta_\xi^A - \theta_\xi^B) \{\theta_\zeta^B, l\tau^A, l\tau^B\} \\ &+ Hl \langle \frac{2}{15}, -\frac{1}{30} \rangle \{\theta_\eta^A, \theta_\eta^B\} \dots\dots\dots (39 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_\eta^{*B} &= \frac{EI_{\xi\xi}}{l} \langle 2, 4 \rangle \{\theta_\eta^A, \theta_\eta^B\} + \frac{E(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{l} [\langle \bar{d}_1^{(BA)}, \bar{d}_2^{(BA)}, \bar{d}_3^{(BA)} \rangle \theta_\xi^A \{\theta_\zeta^B, l\tau^A, l\tau^B\} \\ &+ \langle \bar{d}_1^{(BB)}, \bar{d}_2^{(BB)}, \bar{d}_3^{(BB)} \rangle \theta_\xi^B \{\theta_\zeta^B, l\tau^A, l\tau^B\}] + \frac{GJ_S}{2l} \langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_2 \rangle (\theta_\xi^A + \theta_\xi^B) \{\theta_\zeta^B, l\tau^A, l\tau^B\} \\ &+ Hl \langle -\frac{1}{30}, \frac{2}{15} \rangle \{\theta_\eta^A, \theta_\eta^B\} \dots\dots\dots (39 \cdot d) \end{aligned}$$

$$M_\zeta^{*B} = \frac{GJ_S}{l} \langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_2 \rangle \{\theta_\zeta^B, l\tau^A, l\tau^B\} + \frac{E(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{l} \langle \bar{d}_1^{(AA)}, \bar{d}_1^{(AB)}, \bar{d}_1^{(BA)}, \bar{d}_1^{(BB)} \rangle$$

$$\begin{aligned} & \cdot \{\theta_\xi^A \theta_\eta^A, \theta_\xi^A \theta_\eta^B, \theta_\xi^B \theta_\eta^A, \theta_\xi^B \theta_\eta^B\} + \frac{GJs}{2l} \langle -\bar{c}_1, \bar{c}_1, -\bar{c}_1, \bar{c}_1 \rangle \{\theta_\xi^A \theta_\eta^A, \theta_\xi^A \theta_\eta^B, \theta_\xi^B \theta_\eta^A, \theta_\xi^B \theta_\eta^B\} \\ & + \frac{I_G}{Al^2} \langle Hl \rangle \{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_2\} \{\theta_\xi^B, l\tau^A, l\tau^B\} \dots \dots \dots (39 \cdot e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_W^A/l &= \frac{GJs}{l} \langle \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4 \rangle \{\theta_\xi^B, l\tau^A, l\tau^B\} + \frac{E(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{l} \langle \bar{d}_2^{(AA)}, \bar{d}_2^{(AB)}, \bar{d}_2^{(BA)}, \bar{d}_2^{(BB)} \rangle \\ & \cdot \{\theta_\xi^A \theta_\eta^A, \theta_\xi^A \theta_\eta^B, \theta_\xi^B \theta_\eta^A, \theta_\xi^B \theta_\eta^B\} + \frac{GJs}{2l} \langle -\bar{c}_2, \bar{c}_2, -\bar{c}_2, \bar{c}_2 \rangle \{\theta_\xi^A \theta_\eta^A, \theta_\xi^A \theta_\eta^B, \theta_\xi^B \theta_\eta^A, \theta_\xi^B \theta_\eta^B\} \\ & + \frac{I_G}{Al^2} \langle Hl \rangle \{\bar{g}_2, \bar{g}_3, \bar{g}_4\} \{\theta_\xi^B, l\tau^A, l\tau^B\} \dots \dots \dots (39 \cdot f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_W^B/l &= \frac{GJs}{l} \langle \bar{c}_2, \bar{c}_4, \bar{c}_3 \rangle \{\theta_\xi^B, l\tau^A, l\tau^B\} + \frac{E(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{l} \langle \bar{d}_3^{(AA)}, \bar{d}_3^{(AB)}, \bar{d}_3^{(BA)}, \bar{d}_3^{(BB)} \rangle \\ & \cdot \{\theta_\xi^A \theta_\eta^A, \theta_\xi^A \theta_\eta^B, \theta_\xi^B \theta_\eta^A, \theta_\xi^B \theta_\eta^B\} \frac{GJs}{2l} \langle -\bar{c}_2, \bar{c}_2, -\bar{c}_2, \bar{c}_2 \rangle \{\theta_\xi^A \theta_\eta^A, \theta_\xi^A \theta_\eta^B, \theta_\xi^B \theta_\eta^A, \theta_\xi^B \theta_\eta^B\} \\ & + \frac{I_G}{Al^2} \langle Hl \rangle \{\bar{g}_2, \bar{g}_4, \bar{g}_3\} \{\theta_\xi^B, l\tau^A, l\tau^B\} \dots \dots \dots (39 \cdot g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hl &= EAl \left[\epsilon + \left\langle \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{30} \right\rangle \{(\theta_\xi^A)^2 + (\theta_\eta^A)^2, (\theta_\xi^B)^2 + (\theta_\eta^B)^2, \theta_\xi^A \theta_\xi^B + \theta_\eta^A \theta_\eta^B\} \right. \\ & \left. + \frac{I_G}{2Al^2} \langle \theta_\xi^B, l\tau^A, l\tau^B \rangle \begin{bmatrix} \bar{g}_1 & \bar{g}_2 & \bar{g}_2 \\ \bar{g}_2 & \bar{g}_3 & \bar{g}_4 \\ \bar{g}_2 & \bar{g}_4 & \bar{g}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_\xi^B \\ l\tau^A \\ l\tau^B \end{Bmatrix} \right] \dots \dots \dots (39 \cdot h) \end{aligned}$$

ただし、前式中に含まれる $\bar{c}_i, \bar{d}_j^{(AB)}, \bar{g}_k$ 等は、無次元量

$$\alpha = l\sqrt{\frac{GJs}{EI_{WW}}} \dots \dots \dots (40)$$

で定まる定数であり

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \frac{\exp \alpha}{\alpha(1 + \exp \alpha) + 2(1 - \exp \alpha)} \\ \bar{c}_1 &= \bar{c}\alpha \frac{\exp \alpha + 1}{\exp \alpha} \quad \bar{c}_2 = \bar{c} \frac{-\exp \alpha + 1}{\exp \alpha} \quad \bar{c}_3 = \bar{c} \frac{(\alpha - 1)\exp \alpha + (\alpha + 1)\exp(-\alpha)}{\alpha(\exp \alpha - 1)} \quad \bar{c}_4 = \bar{c} \frac{\exp \alpha - \exp(-\alpha) - 2\alpha}{\alpha(\exp \alpha - 1)} \\ & \dots \dots \dots (41 \cdot a \sim e) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{d}_1^{(AA)} &= \bar{c} \left\{ \left(\frac{24}{\alpha^2} - \frac{12}{\alpha} + 4 - \alpha \right) + \left(-\frac{24}{\alpha^2} - \frac{12}{\alpha} - 4 - \alpha \right) \exp(-\alpha) \right\} \\ \bar{d}_2^{(AA)} &= \frac{\bar{c}}{\alpha(\exp \alpha - 1)} \left\{ \left(-\frac{144}{\alpha^3} + \frac{144}{\alpha^2} - \frac{68}{\alpha} + 20 - 3\alpha \right) \exp \alpha + \left(\frac{288}{\alpha^3} - \frac{8}{\alpha} - 2\alpha \right) \right. \\ & \left. + \left(-\frac{144}{\alpha^3} - \frac{144}{\alpha^2} - \frac{68}{\alpha} - 20 - 3\alpha \right) \exp(-\alpha) \right\} \\ \bar{d}_3^{(AA)} &= \frac{\bar{c}}{\alpha(\exp \alpha - 1)} \left\{ \left(\frac{144}{\alpha^3} - \frac{144}{\alpha^2} + \frac{44}{\alpha} - 8 + \alpha \right) \exp \alpha + \left(-\frac{288}{\alpha^3} + \frac{56}{\alpha} + 6\alpha \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{144}{\alpha^3} + \frac{144}{\alpha^2} + \frac{44}{\alpha} + 8 + \alpha \right) \exp(-\alpha) \right\} \\ \bar{d}_1^{(AB)} &= \bar{c} \{(-\alpha + 2) + (-\alpha - 2)\exp(-\alpha)\} \\ \bar{d}_2^{(AB)} &= \frac{\bar{c}}{\alpha(\exp \alpha - 1)} \left\{ \left(-\frac{144}{\alpha^3} + \frac{144}{\alpha^2} - \frac{52}{\alpha} + 10 - \alpha \right) \exp \alpha + \left(\frac{288}{\alpha^3} - \frac{40}{\alpha} - 2\alpha \right) \right. \\ & \left. + \left(-\frac{144}{\alpha^3} - \frac{144}{\alpha^2} - \frac{52}{\alpha} - 10 - \alpha \right) \exp(-\alpha) \right\} \\ \bar{d}_3^{(AB)} &= \frac{\bar{c}}{\alpha(\exp \alpha - 1)} \left\{ \left(\frac{144}{\alpha^3} - \frac{144}{\alpha^2} + \frac{52}{\alpha} - 10 + \alpha \right) \exp \alpha + \left(-\frac{288}{\alpha^3} - \frac{40}{\alpha} + 2\alpha \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{144}{\alpha^3} + \frac{144}{\alpha^2} + \frac{52}{\alpha} + 10 + \alpha \right) \exp(-\alpha) \right\} \\ \bar{d}_1^{(BB)} &= \bar{c} \left\{ \left(-\frac{24}{\alpha^3} + \frac{12}{\alpha} + 4 - 3\alpha \right) + \left(\frac{24}{\alpha^2} + \frac{12}{\alpha} - 4 - 3\alpha \right) \exp(-\alpha) \right\} \\ \bar{d}_2^{(BB)} &= \frac{\bar{c}}{\alpha(\exp \alpha - 1)} \left\{ \left(-\frac{144}{\alpha^3} + \frac{144}{\alpha^2} - \frac{44}{\alpha} + 8 - \alpha \right) \exp \alpha + \left(\frac{288}{\alpha^3} - \frac{56}{\alpha} - 6\alpha \right) \right. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42 \cdot a \sim i)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(-\frac{144}{\alpha^3} - \frac{144}{\alpha^2} - \frac{44}{\alpha} - 8 - \alpha \right) \exp(-\alpha) \Big\} \\
 \bar{d}_3^{(BB)} = & \frac{\bar{c}}{\alpha(\exp \alpha - 1)} \left\{ \left(\frac{144}{\alpha^3} - \frac{144}{\alpha^2} + \frac{68}{\alpha} - 20 + 3\alpha \right) \exp \alpha + \left(-\frac{288}{\alpha^3} + \frac{8}{\alpha} + 2\alpha \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{144}{\alpha^3} + \frac{144}{\alpha^2} + \frac{68}{\alpha} + 20 + 3\alpha \right) \exp(-\alpha) \right\} \\
 \bar{g}_1 = & \bar{c}^2 \{ (\alpha^2 - 3\alpha) + 4\alpha^2 \exp(-\alpha) + (\alpha^2 + 3\alpha) \exp(-2\alpha) \} \\
 \bar{g}_2 = & \frac{\bar{c}^2}{\alpha(\exp \alpha - 1)} \left\{ \left(-\frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha \right) \exp \alpha + \left(-\alpha^3 + \frac{\alpha^2}{2} - 6\alpha \right) + \left(\alpha^3 + \frac{\alpha^2}{2} + 6\alpha \right) \exp(-\alpha) \right. \\
 & \left. + \left(-\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \right) \exp(-2\alpha) \right\} \\
 \bar{g}_3 = & \frac{\bar{c}^2}{\alpha^2(\exp \alpha - 1)^2} \left\{ \left(\frac{\alpha^3}{2} - 2\alpha^2 + \alpha \right) \exp 2\alpha + (2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 2\alpha) \exp \alpha + (-2\alpha^4) \right. \\
 & \left. + (-2\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha) \exp(-\alpha) + \left(-\frac{\alpha^3}{2} - 2\alpha^2 - \alpha \right) \exp(-2\alpha) \right\} \dots\dots\dots (43 \cdot a \sim d) \\
 \bar{g}_4 = & \frac{\bar{c}^2}{\alpha^2(\exp \alpha - 1)^2} \{ (-\alpha) \exp 2\alpha + (\alpha^4 - 3\alpha^3 + 6\alpha^2 + 2\alpha) \exp \alpha + (-12\alpha^3) \\
 & + (\alpha^4 + 3\alpha^3 + 6\alpha^2 - 2\alpha) \exp(-\alpha) + (\alpha) \exp(-2\alpha) \}
 \end{aligned}$$

と表わされる ($\bar{d}_j^{(AB)}$ は (A, B) に関して対称)。

式 (39・a~h) を変形成分に関して微分して得られる変形力-変形間の接線剛性は対称であり、 $\delta U_{(e)} = f_{(e)}(e) \cdot \delta e_{(e)}$ を積分して得られるひずみエネルギー関数は

$$\begin{aligned}
 U_{(e)}(\dot{e}) = & \frac{(Hl)^2}{2EA} + \frac{2EI_{\gamma\gamma}}{l} (\theta_{\xi}^A + \theta_{\xi}^B + \theta_{\xi}^A \theta_{\xi}^B) \\
 & + \frac{2EI_{\eta\eta}}{l} (\theta_{\eta}^A + \theta_{\eta}^B + \theta_{\eta}^A \theta_{\eta}^B) \\
 & + \frac{GJ_S}{2l} \langle \theta_{\xi}^B, l_{\tau}^A, l_{\tau}^B \rangle \begin{bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \\ \bar{c}_2 & \bar{c}_3 & \bar{c}_4 \\ \bar{c}_3 & \bar{c}_4 & \bar{c}_5 \end{bmatrix} \\
 & \cdot \left\{ \begin{array}{l} \theta_{\xi}^B \\ l_{\tau}^A \\ l_{\tau}^B \end{array} \right\} + \frac{E(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{l} \langle \theta_{\xi}^B, l_{\tau}^A, l_{\tau}^B \rangle \\
 & \cdot \begin{bmatrix} \bar{d}_1^{(AA)} & \bar{d}_1^{(AB)} & \bar{d}_1^{(BA)} & \bar{d}_1^{(BB)} \\ \bar{d}_2^{(AA)} & \bar{d}_2^{(AB)} & \bar{d}_2^{(BA)} & \bar{d}_2^{(BB)} \\ \bar{d}_3^{(AA)} & \bar{d}_3^{(AB)} & \bar{d}_3^{(BA)} & \bar{d}_3^{(BB)} \end{bmatrix} \\
 & \cdot \left\{ \begin{array}{l} \theta_{\xi}^A \theta_{\eta}^A \\ \theta_{\xi}^A \theta_{\eta}^B \\ \theta_{\xi}^B \theta_{\eta}^A \\ \theta_{\xi}^B \theta_{\eta}^B \end{array} \right\} + \frac{GJ_S}{2l} \langle -\theta_{\xi}^A \theta_{\eta}^A + \theta_{\xi}^A \theta_{\eta}^B \\
 & - \theta_{\xi}^B \theta_{\eta}^A + \theta_{\xi}^B \theta_{\eta}^B \rangle \{ \bar{c}_1 \theta_{\xi}^B + \bar{c}_2 (l_{\tau}^A + l_{\tau}^B) \} \\
 & \dots\dots\dots (44)
 \end{aligned}$$

として求まる。

6. 考 察

(1) 除去されない非線形項について

薄肉はりの幾何形状は、はり長さ l で代表される長手方向の次元、断面寸法の次元 h 、および薄肉肉厚 t の3種の次元よりなり、有限変位状態での各断面挙動成分の大きさをこれらの次元と断面の曲率、ねじれ率等の変形規格量に関して整理することができる³⁾。肉厚 t は元来

十分小さい量として考えるが、断面寸法が (はり長さに対しては十分小さいが) 肉厚 t に比較して十分大きい量であることが基礎方程式に組み込まれていることに注目することは、以下の意味で重要である。

微小ひずみの条件のもとに、伸び変形はそれ自体小さく、曲率と要素長の積で表わされる曲げ変形の大きさを表わす無次元量も要素長を小さく選んでいくらでも小さくすることができるが、ねじれ率に関する幾何学的非線形効果については次の2通りが考えられる。すなわち、**Fig. 3** に示すように、1つは

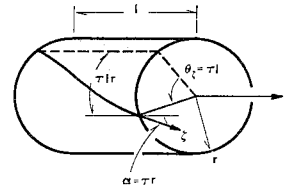


Fig. 3 Two Geometric Nonlinear Effects by Torsion.

ねじれ率 τ と要素長の積で表わされる断面のねじれ回転 θ_{ξ} であるが、他の1つは、ねじれ中心より外れた物質点の ζ -方向がねじれ率により軸線方向よりずれる角度 α に起因する非線形効果であり、その大きさを表わす無次元量はねじれ率と断面寸法の積で表わされる。したがって、後者の効果は要素長を小さくする操作だけで減少させることはできない。微小ひずみのもとであっても、開断面では、肉厚が断面寸法に比較して十分小さいという条件のもとに以上の非線形項が生じる。5. に示した基礎方程式中の K (式 (29・e)) に含まれる $1/2 \cdot EI_{G\zeta\zeta}^2$ および N (式 (29・f)) に含まれる $1/2 \cdot EI_{G\zeta\zeta}^2$ は、前述の効果に起因する項であり、開断面はりのねじれ座屈を説明するに重要な $1/2 \cdot EI_{G\zeta\zeta}^2$ の項は本文での2次までの展開に含まれているが、 $1/2 \cdot EI_{G\zeta\zeta}^2$ のねじれモーメント T への寄与 (式 (28・c) 中の $K\kappa_{\zeta}$) は3次より始まる項であり、変形力-変形関係の結果 (式 (39・a~h))

には含まれていない。

以上の薄肉はりのねじれ率に関する要素長を小さくすることのみでは減少させることのできない非線形項があることは、“要素の大きさを十分小さくすることにより要素座標内での幾何学的非線形性を小さくする”という剛体変位除去の手法の原則に基本的には低触するものではなく、はりの長手方向と同時に断面内での要素分割をも考えれば、すなわち2次元の広がりをもつ殻としての解析を考えれば、小さい要素分割によりその非線形性を減少させることができる。

7. ま と め

本論文は、既述のように、与えられた有限変位薄肉はり要素の基礎方程式のもとに、文献1)で述べられている要素の変位自由度を変形と剛体変位の自由度に分離して行う離散化の一般論に準じて薄肉はり要素に対する具体的な展開結果を示すものであり、3次元有限回転のパラメータにエネルギー(内積)の意味で対応するモーメント成分²⁾を採用することにより、その一般式および物理的意味に全く沿った式展開ができることを確かめた。また、接線剛性に関する展開結果は含めていないが、それらは本文結果の式を微分演算して求まるものであり、式(39・a~h)を変形パラメータに関して微分して求まる変形力-変形間の接線剛性は式(44)のひずみエネルギーの存在より対称であり、式(21・a)を要素位置に関して微分して得られる要素力-要素位置間の接線剛性も、式(24)の反傾関係と先の変形力-変形間の接線剛性の対称性より明らかに対称であり、文献1)の記述に準じる。

一方で、本文での展開は理論的曖昧さは含まないもののきわめて複雑であり、簡潔な展開範囲で必要とされる数値を効率よく求めるという工学的観点からの改善は、さらに考えられるべき重要事項と思われる。

参 考 文 献

- 1) 阿井正博・西野文雄：離散化系の幾何学的非線形問題での力学的関係と平面骨組への適用，土木学会論文報告集，No. 304, pp. 17~32, 1980-12.
- 2) Ai, M. and Nishino, F.: A Tensor Expansion of Finite Rotation and Moment, Proc. of JSCE, No. 311, pp. 113~118, Jul., 1981.
- 3) 阿井正博・西野文雄：薄肉はり要素の有限変位微小ひずみ問題としての一定式化，土木学会論文報告集，No. 318, pp. 7~20, 1982-2.
- 4) 阿井正博・伊東 賢：有限変位薄肉はり要素の離散化に関する一展開，土木学会第37回年次学術講演会概要集，第I部，1982.
- 5) Barsoum, R.S. and Gallagher, R.H.: Finite Element Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems, Int. J. Num. Meth. Engrg., Vol. 2, pp. 335~352, 1970.
- 6) Bathe, K.J. and Bolourchi, S.: Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures, Int. J. Num. Meth. Engrg., Vol. 14, pp. 961~986, 1979.
- 7) Chu, K.H. and Rampetsreiter, R.H.: Large Deflection Buckling of Space Frames, ASCE, Vol. 98, No. ST 12, Proc. Paper 9455, pp. 2701~2722, Dec., 1972.
- 8) Conner, J.J., Logcher, R.D. and Chan, S.C.: Non-linear Analysis of Elastic Framed Structures, ASCE, Vol. 94, No. ST 6, Proc. Paper 6011, pp. 1525~1547, Jun., 1968.
- 9) 後藤茂夫・羽根悟郎・田中達朗：接線剛性法による骨組構造物の大変形解析，土木学会論文報告集，Vol. 238, 1975-6.
- 10) 川井忠彦・村木豊彦：マトリックス法による船体構造解析に関する研究(IV)一骨組構造の振動および座屈問題の解析一，日本造船学会論文集，No. 126, 1969.
- 11) 前田幸雄・林 正：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，No. 253, pp. 13~27, 1976-9.
- 12) Oran, C.: Tangent Stiffness in Plane Frames, ASCE, Vol. 99, No. ST 6, Proc. Paper 9810, pp. 973~985, Jun., 1973.
- 13) Oran, C.: Tangent Stiffness in Space Frames, ASCE, Vol. 99, No. ST 6, Proc. Paper 9813, pp. 987~1001, Jun., 1973.
- 14) Powell, G.H.: Theory of Nonlinear Elastic Structures, ASCE, Vol. 95, No. ST 12, Proc. Paper 6943, pp. 2687~2701, Dec., 1969.
- 15) Tezcan, S.S. and Mahapatra, B.C.: Tangent Stiffness Matrix for Space Frame Members, ASCE, Vol. 95, No. ST 6, Proc. Paper 6627, pp. 1257~1270, Jun., 1969.
- 16) 結城皓曠・前田幸雄：薄肉断面構造の三次元挙動の解析，土木学会論文報告集，No. 224, pp. 67~78, 1974-4.

(1983.7.4・受付)