

【ノ ー ト】

局所荷重を受けるコンクリートディープスラブの 曲げ引張応力とひびわれ発生荷重の算定

ESTIMATION OF BENDING TENSILE STRESS AND CRACKING LOAD FOR
CONCRETE DEEP SLABS UNDER A LOCALLY DISTRIBUTED LOAD

園田 恵一郎*・堀川 都志雄**

By Keiichiro SONODA and Toshio HORIKAWA

1. 序 論

RC または PC スラブのひびわれ発生荷重の正確な算定はしばしば設計上の重要な問題になる。一般に、設計計算に用いるスラブの応力解析法は、弾性薄板理論に基づくことが多い。この理論はスラブの中央面を基準にした 2 次元理論であり、スラブの厚みがスパンに比して十分に小さいことが前提になっている。しかしながら、コンクリート構造物ではスラブの厚みはかなりの大きさになり、スパンに比して必ずしも小さいとはいえない場合が多い。版厚/スパン比が小さくないスラブ、いわゆるディープスラブ（構造力学では厚板とよぶ）では、ベルヌーイの仮定が成立せず、断面内応力分布は非線形になる。このような非線形性は単に版厚/スパン比のみならず、荷重の分布特性にも関係する。たとえば、後に示す図-2 にみられるように、同じ版厚/スパン比でも荷重作用面が小さくなればなるほど非線形性は大きくなり、集中荷重のような極端な場合には、薄板理論による荷重点直下の引張応力は無限大になるのに対して、版厚方向の応力の影響を考慮した 3 次元理論（厚板理論）では、この引張応力は有限値にとどまるという顕著な相違が現われる。

本ノートは、局所的に作用した鉛直分布荷重を受けるディープスラブの応力解析を 3 次元弾性理論に基づいて行い、スラブ下面の引張応力の最大値に着目した数値表を作成し、コンクリートディープスラブのひびわれ発生荷重の算定に役立てようと試みたものである。

2. 解 析 法

ここでは、図-1 に示すような長方形スラブに局所的

に作用した鉛直等分布荷重を対象とする。荷重作用面の中心のスラブ下面に発生する引張応力 σ_{ct} （薄板理論による曲げ引張応力に対応する）に着目すれば、

$$\sigma_{ct} = \sigma_{ct0} - \sigma_{ct1} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 σ_{ct0} は薄板理論による曲げ引張応力、 σ_{ct1} は 3 次元理論による補正項である。

一般に、荷重作用面より版厚程度以上離れた位置ではサンブナンの原理により、3 次元的効果がほとんど現われなくなると考えられるので、 σ_{ct1} は版厚/スパン比 (h/a) と荷重面の寸法比 ($u/a, v/a$) にも支配され、 h/a が特に大きく（たとえば、 $h/a > 0.5$ ）ない限り、辺長比や周辺の支持条件には大きな影響を受けないものと思われる。

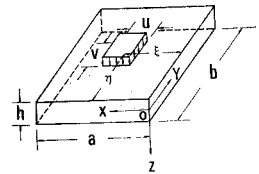


図-1 スラブの形状と座標系

さて、式 (1) の σ_{ct0} は薄板理論による荷重作用面中央の曲げモーメント (M_{max}) を用いて次式で与えられる。

$$\sigma_{ct0} = \frac{6}{h^2} M_{max} \dots\dots\dots (2)$$

M_{max} の算定については、すでに多くの計算式や数値表^{1),2)}などが利用できる。したがって、ここではおもに σ_{ct1} の算定に限定する。

3 次元弾性理論による直交座標 (x, y, z) に関する変位成分は次式で与えられる³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta W_z &= 0, \Delta \theta_z = 0, \\ 2\mu u &= -\frac{\partial^2 W_z}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial \theta_z}{\partial y}, \\ 2\mu v &= -\frac{\partial^2 W_z}{\partial y \partial z} - 2\frac{\partial \theta_z}{\partial x}, \\ 2\mu w &= 2(1-\nu)\Delta W_z - \frac{\partial^2 W_z}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ 、 ν はポアソン比、 μ はせん断弾性係数である。

* 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科
** 正会員 工修 大阪市立大学助手 工学部土木工学科

いま、図-1 に示すように座標系をとれば、 $x=0, a, y=0, b$ で単純支持された板に対しては、式 (3) の変位関数は以下のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} W_z &= \sum_m \sum_n [C_1 \text{sh } rz + C_2 \text{ch } rz + C_3 rz \text{ch } rz \\ &\quad + C_4 rz \text{sh } rz] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ \theta_z &= \sum_m \sum_n [C_5 \text{sh } rz + C_6 \text{ch } rz] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\alpha_m = m\pi/a, \beta_n = n\pi/b, r^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2, a, b$ は x, y 方向のスパン、 $\text{sh } rz = \sinh rz, \text{ch } rz = \cosh rz$ 。

式 (4) の中の C_1, \dots, C_6 は積分定数でスラブの上、下面 ($z = \pm h/2$) の境界条件より決定される。いま、下面が自由で、上面の部分等分布荷重を受ける場合には、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z|_{z=-h/2} &= -\frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx dy, \\ \sigma_z|_{z=h/2} = \tau_{zx}|_{z=h/2} = \tau_{zy}|_{z=h/2} &= 0, \\ \tau_{zx}|_{z=-h/2} = \tau_{zy}|_{z=-h/2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

を用いて積分定数が決定でき、式 (3) の変位成分よりひずみを求めた後にフックの法則により応力が決定できる。曲げ引張応力に着目し、スラブ下面の応力のみを示せば次式のようになる。

$$\sigma_x = \sum_m \sum_n \bar{q}_{mn} \frac{4 \alpha_m^2 h}{r} \left(1 + \nu \frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} \right) \cdot \frac{e^{-r^2 h} (1 - e^{-2r^2 h})}{(1 - e^{-2r^2 h})^2 - 4 r^2 h^2 e^{-2r^2 h}} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$\bar{q}_{mn} = \frac{16 P}{ab \alpha_m \beta_n uv} \sin \frac{\alpha_m u}{2} \sin \alpha_m \xi \cdot \sin \frac{\beta_n v}{2} \sin \beta_n \eta, P (= quv) \text{ は作用荷重}$$

一方、薄板理論による単純支持版の下面の曲げ引張応力はナビエ (Navier) の解と式 (2) により、

$$\sigma_{x0} = \sum_m \sum_n \bar{q}_{mn} \frac{6 \alpha_m^2}{r^4 h^2} \left(1 + \nu \frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} \right) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \dots\dots\dots (7)$$

したがって、式 (6) と式 (7) の差によって式 (1) の σ_{ct1} が以下のように評価できる。

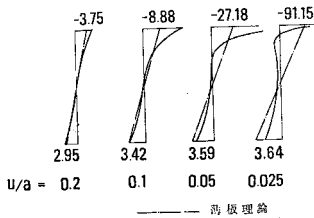


図-2 荷重用面の大きさと断面内応力分布 ($\sigma_{ct1} \alpha^2 / P$) の関係 ($h/a=0.2, u/a=v/b, a=b$ の場合)

$$\sigma_{ct1} = 4 \sum_m \sum_n \bar{q}_{mn} \frac{\alpha_m^2 h}{r} \left(1 + \nu \frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} \right) \cdot \left[\frac{3}{2 r^3 h^3} - \frac{e^{-r^2 h} (1 - e^{-2r^2 h})}{(1 - e^{-2r^2 h})^2 - 4 r^2 h^2 e^{-2r^2 h}} \right] \cdot \sin \alpha_m \xi \sin \beta_n \eta \dots\dots\dots (8)$$

3. 補正項 σ_{ct1} に関する数値表

式 (8) は周辺単純支持版に対するものであるが、先に述べたように荷重分布が局所的で版厚/スパン比が特に大きくない限り、3次元理論による補正項は辺長比や周辺の支持条件 (たとえば、固定や弾性桁支持) の影響をほとんど受けないものと考えられるので、式 (8) は任意の辺長比や支持条件をもつ版に対しても補正項として利用できる。

表-1~3 は正方形版の各種の版厚比 (h/a)、荷重用面の寸法比 ($u/a, v/a$) に対する式 (8) による σ_{ct1} の値を示したものである。これらの数値はポアソン比 (ν) を 0.17 として求めたものである。表中の負符号の数値は、荷重面の中心のスラブ下面の引張応力が薄板理論より3次元理論の方が大きくなる場合であり、荷重用面が比較的大きくなる場合に現われる。

表-1 3次元理論による補正値 $\sigma_{ct1} \alpha^2 / P$ ($u/a=v/a$ の場合)

$h/a \setminus u/a$	0.025	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3	0.5
0.05	72.97	-5.82	-10.67	-5.24	-2.94	-1.29	-0.47
0.1	50.03	16.74	-1.37	-3.54	-2.70	-1.31	-0.47
0.15	31.69	15.27	3.13	-0.62	-1.50	-1.20	-0.47
0.2	21.72	12.13	4.21	0.97	-0.35	-0.86	-0.47
0.3	12.13	7.75	3.83	1.87	-0.78	-0.15	-0.36
0.4	7.82	5.34	3.04	1.81	1.05	0.24	-0.20
0.5	5.50	3.90	2.41	1.58	1.04	0.41	-0.06

表-2 3次元理論による補正値 $\sigma_{ct1} \alpha^2 / P$ ($1.5 u/a=v/a$ の場合)

$h/a \setminus u/a$	0.025	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3	0.5
0.05	50.51	-9.42	-8.63	-4.10	-2.31	-1.02	-0.36
0.1	42.16	11.88	-2.29	-3.04	-2.17	-1.02	-0.36
0.15	27.95	12.40	1.67	-1.02	-1.42	-0.96	-0.36
0.2	19.57	10.35	2.99	3.28	-0.58	-0.78	-0.36
0.3	11.16	6.90	3.11	1.33	0.42	-0.25	-0.30
0.4	7.27	4.84	2.59	1.43	0.75	0.08	-0.19
0.5	5.15	3.58	2.11	1.31	0.81	0.27	-0.08

表-3 3次元理論による補正値 $\sigma_{ct1} \alpha^2 / P$ ($2 u/a=v/a$ の場合)

$h/a \setminus u/a$	0.025	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3	0.5
0.05	35.80	-9.94	-7.13	-3.37	-1.89	-0.83	-0.28
0.1	35.80	8.36	-2.45	-2.59	-1.79	-0.83	-0.28
0.15	24.81	10.02	0.79	-1.09	-1.24	-0.79	-0.28
0.2	17.74	8.80	2.10	-0.01	-0.61	-0.64	-0.28
0.3	10.32	6.14	2.51	0.93	0.20	-0.27	-0.24
0.4	6.79	4.40	2.20	1.12	0.53	0.01	-0.16
0.5	4.84	3.29	1.84	1.08	0.62	0.16	-0.07

4. 周辺単純支持 コンクリートディープスラブのひびわれ発生荷重

プレーンコンクリートの曲げひびわれの発生規準の提案には応力によるものとひずみによるものがある。応力による規準は、弾性計算引張応力がある基準値 (f_t) に達したときにひびわれが発生すると仮定したもので、一般的に次式で与えられている。

$$\sigma_{ct} = f_t = \alpha f_c^{1/n} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 f_c は圧縮強度であり、 α と n は単純引張強度と応力勾配に関する定数であり、たとえば、曲げを受けるはりでは、 f_c の単位を kg/cm^2 にとった場合、 $\alpha = 2.0$, $n = 2$ が採用されている⁴⁾。

一方、ひずみによる規準はプレーンコンクリートの引張領域での非弾性ひずみを考慮したものであり、曲げひびわれが発生する限界ひずみとして圧縮強度と引張塑性係数に関係した式が提案されている³⁾。

本研究は弾性理論に基づいており、ひずみによる規準を採用することは困難であるので、式 (9) の応力による規準を用いることにする。すでに 図-2 に示したように、ディープスラブの断面内の応力分布は非線形になり、引張応力の勾配ははりの場合より緩慢になる。したがって、式 (9) の右辺のプレーンコンクリートの引張強度 (f_t) を割裂試験による引張強度になるように、式 (9) の α , n を選ぶのが合理的であるように思われる。

さて、周辺単純支持正方形コンクリートディープスラブに対して、 f_t は既知であると仮定し、式 (6) による最大引張応力 (σ_{ct}) が f_t に等しくなったときにひびわれが発生するとした場合のひびわれ発生荷重を計算し、版厚/スパン比、荷重作用面の寸法比とひびわれ発生荷重の関係を示したものが 図-3, 4 である。荷重作用面の寸法比 (u/a) が小さくなるにつれてひびわれ発生荷重は小さくなるが、 $u/a < 0.1$ になればその変化が緩慢になり、 $u/a \rightarrow 0$ の集中荷重の場合とあまり変わらないことがわかる。

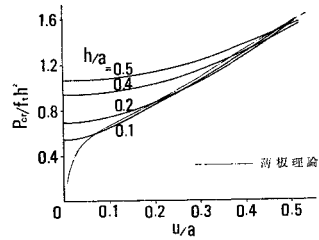


図-3 ひびわれ発生荷重 P_{cr} と荷重作用面の寸法比の関係 ($a=b$, $u=v$)

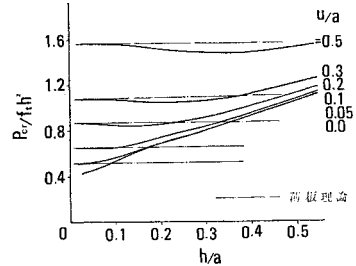


図-4 ひびわれ発生荷重 P_{cr} と版厚比の関係 ($a=b$, $u=v$)

以上は単純支持正方形スラブに対する結果であるが、式 (1) と 表-1~3 を用いることによって、任意の辺長比や支持条件のスラブに対するひびわれ発生荷重が同様に計算できる。

参考文献

- 1) Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and shells, 2nd ed., McGraw-Hill, 1959.
- 2) 土木学会：構造力学公式集, pp. 325~384, 1974.
- 3) 園田恵一郎・堀川都志雄：道路橋床版の輪荷重直下の応力の算定について, 土木学会論文集, No. 273, pp. 15~22, 1978年5月.
- 4) Kosaka, Y. and N. Imai : Minimum Weight Design of Reinforced Concrete Frames Using Optimization Technique, Transaction of the Japan Concrete Institute, Vol. 3, pp. 375~382, 1981.
- 5) 横道英雄・藤田嘉夫：鉄筋コンクリート工学, 共立出版, pp. 20~21, 1971.

(1983.2.21・受付)