

## 非線形性を考慮した水面波の屈折に関する研究

STUDIES ON THE DIFFRACTION OF WATER WAVES IN  
CONSIDERATION OF NONLINEARITY

山 田 正\*・渡 辺 一 浩\*\*・小 森 宏\*\*\*

By Tadashi YAMADA, Kazuhiro WATANABE and Hiroshi KOMORI

## 1. 緒 言

海岸において沖からやってくる波が、どの方向から、どれだけの強さをもっているのかを正確に見積ることは港湾や防波堤などの計画・設計において非常に重要な作業の一つになっている。この問題に関しては従来、レンズを通過する光線の追跡方法と同様に各場所場所での屈折率を計算し、波向を算定するいわゆる屈折図法が用いられてきた。そしてこの方法を用いるかぎり暗礁や浅瀬のようなところを通過した波の波向線は交差することが知られている。しかしこのような場合でも実験的には波向線が交差することはなく、この波向線交差の問題は物理学的にも、また海岸工学的にも解決がせまられる問題として長い間考えられてきた<sup>1)</sup>。本研究はこのような事情を考慮し、水面波の屈折問題、特に波向線交差の問題について Whitham の導いた非線形幾何光学<sup>2)</sup>に基づいて理論的考察を行ったものであり、水面波の非線形性を考慮した屈折計算の新しい手法を提案するものである。なお本研究で扱った波はいわゆる規則波であり、不規則波の場合は一切扱っていない。

## 2. 従来の研究

上に述べた波向線交差というパラドックス的な問題に対して伊藤、谷本らは数値波動解析法を提案し、この従来の懸案事項を見事に解決した<sup>3)~7)</sup>。彼らの方法は運動方程式を線形化し、水表面での流速成分に関する連立方程式を基礎式とするものであり、任意水深の場では線流量(流速を海底から平均水面まで積分したもの)に関する次の三元連立偏微分方程式が基礎方程式となっている。

$$(\partial Q_x / \partial t) = -C^2 (\partial \eta / \partial x) \dots\dots\dots (1)$$

$$(\partial Q_y / \partial t) = -C^2 (\partial \eta / \partial y) \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

$$Q_x = \int_{-h}^0 u dx, \quad Q_y = \int_{-h}^0 v dx, \quad C = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh}$$

であり、 $\eta$  は水位、 $z$  は鉛直方向座標、 $h$  は水深、 $u, v$  は水平方向の水粒子速度、 $k$  は波数である。彼らの方法が波向線交差による波高無限大という結果を回避できたのは、波は波高の大きいところから小さいところへ回り込むという回折の効果を理論の中に取り込むことができた点にあると思われる。上記の理論の適用範囲とその精度は実験により確かめられている。このように伊藤・谷本の提案した“数値波動解析法”は従来の波の屈折計算における最大の難関を克服できたのみならず、回折計算も統一して理論の枠内で行えるなどの多くの利点を有している。ところで上記の伊藤・谷本らの理論とは異なった理論が、同時期に外国において提案されている。そのうちの一つは Berkhoff による理論<sup>8)</sup>であり、式(4)で与えられるものである。

$$\nabla \cdot (C_p \cdot C_g \nabla \phi) + \frac{\omega^2 C_g}{C_p} \phi = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ここに  $\phi$  は二次元速度ポテンシャルであり、 $\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y)$ 、 $C_p, C_g$  はそれぞれ水面波の位相速度、群速度を表わしている。 $\omega$  は角振動数である。この方程式は波長に比べて水深が十分に大きいときには深海波の回折を表わす式となり、一方水深に比べて波長が十分長い場合には線形化された浅水波の方程式となる。彼は式(4)を用いて屈折および回折のいくつかの問題を解いている。しかし上記式(4)は本質的に楕円型の方程式であり、閉じた境界線上で境界条件が明確に与えられる場合のみ解をもつという性質を有しているが、海岸工学の問題としては一般にはこのような場合はまれであろう。このような点を考慮して上記の方程式を楕円型から放物型(熱伝

\* 正会員 工博 防衛大学校講師 土木工学教室

\*\* 防衛施設庁札幌防衛施設局技官

\*\*\* 防衛大学校理工学研究科学生

導型あるいは拡散型)に近似して書き改めることが Radder<sup>9)</sup>によってなされており、さらに橋本<sup>52)</sup>によってその数値計算上の工夫と精度の問題が論じられている(放物型の方程式は前進形で解が求まり、閉じた境界線上での条件は必要としない)。このような放物型の方程式は波動の回折の効果を方程式中にもつ拡散項によって近似的に表現していると考えられる。事実波動現象を扱った多くの文献の中で方程式を放物型で近似するときには上記のような意味で使われる場合が多いようである<sup>9)~11)</sup>。

ところで上記のような水面波の屈折・回折の問題とは異なった観点から水面波の回折の効果をもった方程式が得られている。それは Lighthill<sup>12)</sup>, Benjamin<sup>16), 17)</sup>らによって初めて提唱された水面波の変調不安定(modulation instability)の問題において、ソ連の Zakarov<sup>16), 22)</sup>によって導かれ、今日、Zakarov 方程式とよばれているものであり(後に Saffman<sup>23)</sup>によって多少の修正がなされているが)、式(5)で表わされるものである。

$$i\left(A_x + \frac{\sigma_0}{2k_0} A_x\right) - \frac{\sigma_0}{8k_0^2} A_{xx} + \frac{\sigma_0}{4k_0^2} A_{yy} - \frac{1}{2} \sigma_0 k_0^2 |A|^2 A = 0 \dots \dots \dots (5)$$

ここに  $i = \sqrt{-1}$ ,  $x, y$  はそれぞれ波の進行方向およびそれと直角方向の座標,  $k_0, \sigma_0$  はもとの波(基本波)の波数および角振動数である。 $A$  は波の包絡線(複素数)である。式(5)は非線形シュレディンガー方程式の形式をもっており、数多くの研究者<sup>24)~26)</sup>によってそれぞれ異なった方法を用いて導かれている。式(5)では左辺第4項の非線形項により波の振幅は大きくなるが左辺第2, 第3項により過大な値をとる前に周囲に拡散させている。この拡散項が回折の効果を近似的に表現しているわけである。式(5)は深海波の場合に対して導かれたものであるが、以後表面張力や海底地形の変化の効果を考慮した場合への拡張が Djordjevic and Redekopp<sup>27)</sup> や Ablowitz and Seguer<sup>28)</sup>らによってなされており、彼らの式では海底地形の変化は式(5)右辺に強制外力項の形で入っている。波の屈折・回折計算において上記の著者らの方法を用いることが考えられるが、得られる解は水位の包絡線  $A$  であり、波向線は得られない。また流れのある場では使用できない。式(5)は波動のもつ変調不安定性や非線形光学あるいは結晶光学等の分野で現われる波の自己集束(あるいは発散)の効果を調べる目的で導かれたものであるが、そのような現象はもともと Whitham に始まる非線形幾何光学理論<sup>2), 29)~32)</sup>を用いて Lighthill<sup>12)~15)</sup>によって見出されたものであり、事実 Karpman and Kruskal<sup>33), 34)</sup>らはいわゆる Whitham の保存方程式を用いて式(5)と同様の方程式を導いている(なお水面波に話を限定すれば上記の Whitham,

Lighthill らの理論とはまったく異なった理論が Benjamin and Feir<sup>16), 17)</sup>によって提唱され、以後水面波の不安定性は Benjamin・Feir 不安定とよばれるようになったことは周知のことである)。

このように Whitham の提案した非線形幾何光学は波動のもつ非線形性(たとえば波が突立つ)と回折効果(波動の集中を抑える効果)を理論の中に内包している。本研究で扱うような海岸付近の波では浅水変形以外の波高の増大は波のもつ非線形性にも起因するが、海底地形の起伏による波向線の集中が主要な原因となろう。一方波高の減少は海底地形によるものや海底における摩擦によるもののほかに波のもつ回折効果に起因するものがある(伊藤・谷本はこれを“屈折における回折効果”とよんでいる<sup>3)</sup>)。このような事情を考慮して本研究は Whitham の提案した非線形幾何光学の理論に基づいて水面波の屈折計算を行ったものである。

なお本研究で言及している波の非線形性は分散関係式の非線形性に埋め込まれているが、波のエネルギーフラックスにおける非線形性の効果を議論したもとして岩垣・塩田<sup>47)</sup>の研究がある。さらに屈折計算手法の開発においては、岩垣・酒井<sup>43)~46)</sup>らの寄与がある。彼らは Arther の導いた波向の変化を支配する基礎方程式<sup>48)</sup>を改良し、さらに海底地形の変化と流れが存在する場での規則波、さらに不規則波の屈折および波高変化を求める理論を提示している。本研究で行った計算のうち線形理論の範囲は上記の著者らのものと部分的に一致したものとなっている注1)。

### 3. 波動理論の基礎方程式

本研究では、海底地形の起伏と流れのある場での波の変形を扱い、海底摩擦の効果は一切考えていない。このとき幾何光学としての基本式は次のように与えられる<sup>2), 15)</sup>。

$$\frac{\partial k_x}{\partial t} + (V_x + C_{gx}) \frac{\partial k_x}{\partial x} + (V_y + C_{gy}) \frac{\partial k_x}{\partial y} = - \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{k \neq \text{固定}} \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{\partial k_y}{\partial t} + (V_x + C_{gx}) \frac{\partial k_y}{\partial x} + (V_y + C_{gy}) \frac{\partial k_y}{\partial y} = - \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{k \neq \text{固定}} \dots \dots \dots (7)$$

ここに  $k_x, k_y$  は水平方向の波数 ( $2\pi/L$ ,  $L$  は波長),  $V_x, V_y$  はそれぞれ  $x, y$  方向の流れの速度,  $C_{gx}, C_{gy}$  はそれぞれ  $x, y$  方向の波の群速度,  $\omega$  は角振動数 (2

注 1) 本論文の脱稿後、著者らは査読者の一人より Pergrine らの最近の論文<sup>52)</sup>の存在を教えられた。そこでも有限振幅波の浅水変形、屈折の問題が本研究で用いた基本式とは異なった基本式により解析されている。

$\pi/T$ ,  $T$  は周期) を表わす. ここで注意しなければならないのは式 (6), (7) の右辺の項である. 式 (6), (7) は本来波数の保存式, 式 (8) から導かれたものである.

$$(\partial k_i / \partial t) + (\partial \omega / \partial x_i) = 0 \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) は一般の保存方程式の形をしているわけであるが, このときの  $\omega$  は単に角振動数の意味のみならず, ある断面を単位時間に通過する波の峰の数, すなわち波の峰のフラックスになっている. さらに本研究の場合のように  $\omega = \omega(t, x_1, x_2, k_1, k_2)$  の場合には, たとえ現象が定常であっても式 (6), (7) の右辺は 0 にはならないことである. それは式 (8) の  $\partial \omega / \partial x_i$  において,  $\omega$  が場所の関数 (分散関係式が水深の関数) のときは合成関数の微分則から

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \Big|_{k \text{ を固定}} + \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \cdot \frac{\partial k_j}{\partial x_i} \dots\dots\dots (9)$$

$$= \left. \begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \Big|_{k \text{ を固定}} + \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \cdot \frac{\partial k_j}{\partial x_i} \\ & \left( \because \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = \frac{\partial k_i}{\partial x_j} \text{ より} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

となり, 式 (6), (7) 右辺の  $\partial \omega / \partial x$  は式 (9) あるいは (10) の  $\approx \approx$  で示す項であり (本来  $k$  は変化するにもかかわらず),  $k$  を局所的に固定したときの  $\omega$  の変化率になっているからである. さらに流れがあるときの  $\omega$  は次のように表わされる.

$$\omega = \omega_r + k_i V_i \dots\dots\dots (11)$$

ここに  $V_i$  は流れの速度,  $\omega_r$  は流れの速度で動く系から測定される角振動数である.

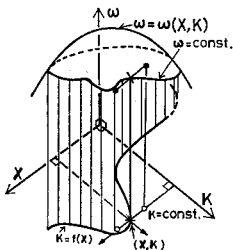
ところで式 (9), (10) で  $\partial \omega_r / \partial k_j = C_{gj}$  を考慮すると式 (6), (7) は次のように書くこともできる.

$$\frac{dk_i}{dt} = - \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \dots\dots\dots (12)$$

ここに  $d/dt = \partial / \partial t + (V_i + C_{gi}) \partial / \partial x_i$  である. 上式右辺の  $\partial \omega / \partial x_i$  は式 (9), (10) の右辺第 1 項である. 次に群速度の定義から次式が成立する.

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i} (= V_i + C_{gi}) \dots\dots\dots (13)$$

ここに  $x_i$  ( $i=1, 2, x, y$  に相当) は波群 (束) の中心



(簡単のためここでは  $\omega = \omega(x, k)$  の場合を示す. 図中の軌跡  $k = f(x)$  に沿えば  $\omega = \text{const.}$  であるが式 (6), (7) 右辺の  $\partial \omega / \partial x$  等は  $k$  を固定したときの  $\omega$  の変化率であり, 図では黒丸で示す微分である)

図一  $\partial \omega / \partial x$  の意味

位置を示す. 式 (12), (13) の  $\omega$  は式 (11) で与えられるものである. なお式 (12), (13) は  $k_i$  を一般化運動量,  $x_i$  を一般化座標,  $\omega$  をハミルトニアンと読み変えれば, 解析力学の中のハミルトンの正準方程式の形式とまったく一致する<sup>2), 15), 35)</sup>. 波動に関しても質点系の力学と同形式の基本式が得られることは Hamilton 自身によって導き出されていたようである<sup>12)</sup>. 以下式 (12), (13) が波束の軌跡を追跡する基本式となる.

ところで流れがある場での波動の保存量としては, Bretherton and Garret<sup>36)</sup> によって示され, 後に Hay<sup>37)</sup> や McIntyre<sup>38)~40)</sup> らによってより一般的に求められた wave action があり, 次式で与えられる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E}{\omega_r} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (V_j + C_{gj}) \frac{E}{\omega_r} \right\} = 0 \dots\dots (14)$$

ここに  $\omega_r$  は式 (11) の  $\omega_r$  と同じのものであり,  $E$  は波動の単位面積当たりのエネルギーである. 式中の  $E/\omega_r$  が wave action とよばれているものである. 水面波の屈折に関して wave action の保存式を最初に用いたのは Skovgaard・Jonsson ら<sup>56)</sup> であり, 不規則波の屈折計算においては酒井・岩垣<sup>16)</sup> らも用いているが, ここでも wave action の保存式である式 (14) を用いて波のエネルギー  $E$  (あるいは波高) を求める.

4. 線形幾何光学に基づく屈折理論

先に示したように屈折計算の基本式は式 (11), (12), (13), (14) であるが, 式 (11) 中の  $\omega_r$ , あるいは流れがないときの  $\omega$  として次に記す微小振幅波の分散関係式を用いる. 後に示すようにこの場合が線形幾何光学あるいは従来の屈折図法に相当している.

$$\omega_r = \sqrt{gk \tanh kh} \dots\dots\dots (15)$$

ここに  $g$  は重力加速度,  $h$  は水深である. このとき  $\partial \omega_r / \partial x_i$  は次式となる.

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial x_i} \Big|_k = \frac{\partial \omega_r}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{gk^2 \text{sech}^2 kh}{2\sqrt{gk \tanh kh}} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} \dots\dots\dots (16)$$

まとめると波向線を追跡する基本式 (線形の場合) は以下ようになる.

$$\frac{dk_x}{dt} = - \frac{gk^2 \text{sech}^2 kh}{2\sqrt{gk \tanh kh}} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - k_x \frac{\partial V_x}{\partial x} - k_y \frac{\partial V_y}{\partial x} \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{dk_y}{dt} = - \frac{gk^2 \text{sech}^2 kh}{2\sqrt{gk \tanh kh}} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} - k_x \frac{\partial V_x}{\partial y} - k_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \dots\dots\dots (18)$$

$$dx/dt = C_{gx} + V_x \dots\dots\dots (19)$$

$$dy/dt = C_{gy} + V_y \dots\dots\dots (20)$$

$$C_{\theta x} = \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \times \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \right\} \frac{k_x}{k}$$

$$C_{\theta y} = \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \times \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \right\} \frac{k_y}{k}$$

.....(21)

上に記した式 (17), (18), (19), (20) は 4 元連立の常微分方程式を構成しており, 本研究ではこれを Runge-Kutta-Gill 法によって数値的に解いている. 計算では海底地形 (水深) のデータをあらかじめ定めた格子点上に記憶しておき, 任意地点の水深は線形補間によって計算している. また本計算では一本一本の波向線につきそれぞれ Runge-Kutta-Gill 法によって追跡するので, それぞれの波向線についてその初期位置 (解  $x, y$  の初期条件) を与えておく. 解  $k_x, k_y$  の初期条件はすべての波向線について共通の値を与えておく. このようにして必要な数の波向線を追跡し終えたなら, 各地点での波高を計算する. このときの基本式は式 (14) で与えられるが, ここでは式 (14) そのものは使わず, 従来のエネルギーフラックス一定条件と同様に 2 本の波向線間を通過する wave action フラックスは一定であるという条件, 式 (22) により求める.

$$\frac{H^2}{\omega_r} \times B \times (V + C_\theta) = \text{const.} \dots\dots\dots(22)$$

ここに  $H$  は微小振幅波の波高 ( $E \propto H^2$  より),  $B$  は任意の地点で波向線間隔,

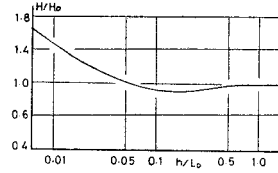
$$V + C_\theta = \sqrt{(V_x + C_{\theta x})^2 + (V_y + C_{\theta y})^2}$$

である. 以下にいくつかのタイプの波動場での計算結果を示す.

(i) 汀線が直線の場合で, かつ汀線に平行な方向には水深の変化はなく, 流れもない場合

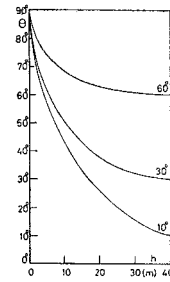
図-2 はこのときの計算結果であるが, 従来の微小振幅波を用いた浅水変形理論とまったく一致しており計算プログラムの妥当性はこれによってチェックした. 図-3, 4 は  $k=0.07(1/m)$  の沖波が 図-2 と同じ海岸に斜めに入射したときの各水深での波向の変化と波高比の変化を示したものである. 図-5 は上と同じ海岸で汀線に直角方向に流れがある場合の波高比の変化を示している.

以上の計算結果は従来用いられている屈折図法等の理論や計算手法による結果とまったく同一の結果となっている. 図-6 は直線分布をした横流れのある場 (水深は一定で 40 m) での波向線の形状を示したものである. この計算では現実にとり得ない大きな流速の場合をも扱っているが, これは流速分布をもった流れ場における波の変形を調べる目的であえて計算したものである. この計算では波はどこまでも砕波しないとして計算しているが, 流速分布をもつ流れ場では沖波の入射角によって波高が無限大になる. 図中, 波向線の極大値を示す点が波高無限大の点に相当している (よってそれ以後の計算に

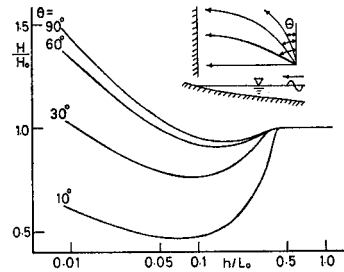


流れはなく, 汀線は直線, 等深線は汀線に平行して走っている. 沖波の入射角は汀線に直角. 図中の  $L_0, H_0$  はそれぞれ沖波に関する波長, 波高である

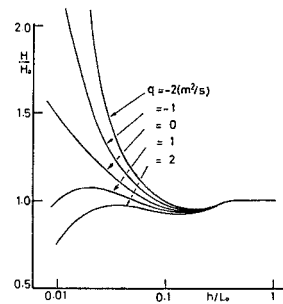
図-2 波の浅水変形



(図中の  $\theta$  は各場所での波向である.  $k_0=0.071/m$ )  
図-3 汀線に斜めに入射した波の波向の変化



(図中の  $\theta$  は沖波での入射角を示す)  
図-4 汀線に斜めに入射した波の波高の変化



(図中の  $q$  は単位体積流量 ( $m^2/s$ ))  
図-5 汀線に直角方向に流れがある場合の波高比の変化

意味があるかどうかはわからない).

(ii) 水深の変化と流れが共存する場合—河口のモデル

これは以前に岩垣, 酒井<sup>13)</sup>らが計算に用いた河口付近における波の屈折計算の例と同様の場合である. 図-7 は図中に示す海底地形と流れ場をもつ河口付近における波向線を描いたものである. この図より岩垣・酒井らの

結果と同様、河口中央部への波の集中がみられる。図-8はこのときの河口中央部を通る波向線に沿った波高比の変化を図中の3つの河口モデルにつき示したものである。いずれにしろ河口付近では波高の増大は著しいことがわかる。

(iii) 球面浅瀬を通過する波の屈折

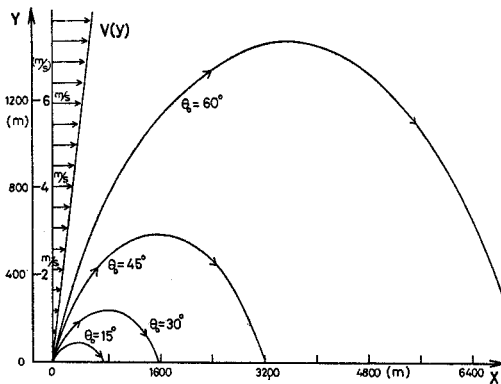
図-9は図に示す等深線をもつ球面浅瀬を通過する波の波向線を示している。この場合には波向線が交差しているが、これはその点で波高が無限になることを意味している。この場合が線形幾何光学的屈折理論の限界であるものと思われる。本研究の主要目的はまさにこの波向線交差の問題の解明にある。ところで線形幾何光学的屈折理論がなぜ現実には現れない波向線交差を生じさせるのかという点につき、著者らは次のように考える。海底地形の影響により波向線の間隔が狭まると波高は増大する。このとき実際の水面波では非線形効果により波高の高い部分の位相速度あるいは群速度は波高の低い部分より大きくなる。すなわち同位相線あるいは波峰線は波高の高いところが低いところより速く進む。さらに後に示すように波高に空間的な分布があると、非線形効果により、 $k_x, k_y$ は修正を受ける(実際にはこの効果の方が大きい)。このような理由から波峰線に直交する波向線

は交差を免れる。しかし線形幾何光学的屈折理論では波高が高くて低くても位相速度や群速度には何らの影響も与えず、 $k_x, k_y$ も何ら修正を受けないことから波向線の交差が生じてしまうと。このような波高の大きいところが低いところに回り込むことを“波の非線形性に基づく回折効果”とよぶと、これは先に述べた伊藤・谷本らのいう“屈折における回折の効果<sup>5)</sup>”に相当していよう。ただし彼らの理論は著者らの用いているいわゆるRay methodとは異なっているため、その効果が線形理論の枠内で表現できるのに対し、Ray methodを用いる限り回折の効果は波動のもつ非線形性に起因していると考えられる。

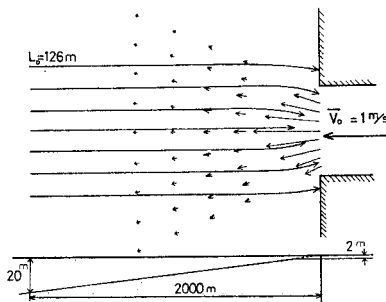
5. 非線形幾何光学に基づく屈折理論

(i) 近似理論に基づいた定性的考察

ここでは波の非線形性のもつ回折効果を明らかにする目的で以下の理論的考察を行った。なおこの理論はあくまで近似理論であり、より精度の高い屈折理論は次節において述べる。ここで対象とした海底地形は一定水深の海底に波長に比べて起伏の非常に緩やかな球面浅瀬(浅

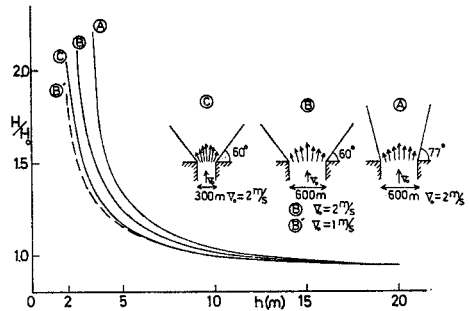


( $L_0 = 209 \text{ m}$ ,  $h = 40 \text{ m}$ ,  $\theta_0$  は沖波の入射角)  
図-6 流速分布が直線をしている流れ場における波向線

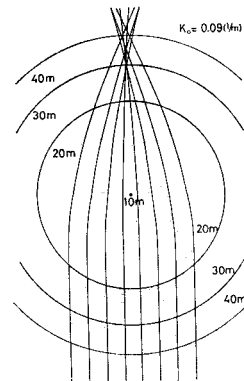


( $L_0 = 126 \text{ m}$ , 河口幅 = 600 m, 図中の小さい矢印は流速ベクトルを示す)

図-7 河口付近における波の屈折



( $L_0 = 125.7 \text{ m}$ )  
図-8 河口中央部を通る波向線に沿った波高比の変化



(図中の数字は等深線の示す深さ、最浅部の水深 = 10 m, 球面浅瀬の半径 = 2.250 m, 一様部の水深 = 40 m)

図-9 球面浅瀬を通過する波の波向線

瀬の最浅部の水深と周囲の一樣水深との差も非常に小さい) を考える。このとき波向線に交差が生じないとすれば、考えられ得る波向線は図-10に示すようなものとなる。このとき次のような近似が考えられる。

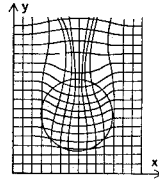


図-10 球面浅瀬で考えられる波向線の形状(概念図)および座標系

$$k_y \approx k = \text{const.} \quad (\text{進行方向の波長の変化は小さい}),$$

$$C_{gy} \approx C_g$$

$k_x \ll k_y \approx k$  (横方向の波長は海底地形に起因する振動成分と考える)

次に水面波の非線形性は非線形分散関係式により導入する。すなわち式(6)、(7)右辺の  $\omega$  としてストークス波の三次まで考え次式を用いる<sup>4)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 \{ 1 + F(kh)(ak)^2 + O((ak)^4) \} \\ F(kh) &= 1 + 1/\sinh^2 kh + 9/8 \cdot 1/\sinh^4 kh \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここに  $\omega_0$  は微小振幅波の角振動数,  $a$  は微小振幅波の半波高である。ここで上記の仮定より  $k, h$  の変化は小さいことから  $F(kh) \approx \text{一定値}$  とすることができる(以後,  $F(kh) = 1$  とする)。このとき式(23)は次式のように近似される。

$$\omega = \omega_0 (1 + \beta a^2), \quad \beta = 0.5 k^2 = \text{const.} \dots\dots\dots (24)$$

このとき式(6)は定常状態のとき、次式となる。

$$C_g \frac{\partial k_x}{\partial y} = -(1 + \beta a^2) \frac{\partial \omega_0}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - \beta \omega_0 \frac{\partial a^2}{\partial x} \dots\dots\dots (25)$$

すなわち,  $k_x$  は波高分布の影響によって線形理論に対して修正を受けている(非線形性に基づく回折の効果)。式(14)の wave action の保存式は、この問題では流れは考えていないことから通常のエネルギー保存式となり、

$$\frac{\partial \left( C_g \cdot \frac{k_x}{k} \cdot a^2 \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( C_g \cdot \frac{k_y}{k} \cdot a^2 \right)}{\partial y} = 0 \dots\dots (26)$$

となるが,  $C_g, k \approx \text{const.}, k_y \approx k = \text{const.}$  の仮定より、上式は、

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\partial (k_x a^2)}{\partial x} + \frac{\partial a^2}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (27)$$

となる。次に式(25)、(27)から  $k_x$  を消去して  $a^2$  に関する方程式を導く。ここでは以下に示す線形化を行っている。すなわち,  $E = a^2$  と書き,  $E = E_0 + E_1$  ( $E_0 = a_0^2 \gg E_1, a_0$  は沖波の半波高) とする。  $E_0 \gg E_1$  の仮定は必ずしも現象に忠実ではないが、定性的議論の範囲ならば許されよう。このように波のエネルギーを一定値  $E_0$  と海底地形に起因する振動部分  $E_1$  に分離すると、式(25)、(27)から多少の演算の後、 $E_1$  に関する式(28)を得る。

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial y^2} - \left( \beta E_0 \cdot \frac{C_p}{C_g} \right) \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} = \frac{E_0}{k C_g} \cdot \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \dots (28)$$

ここに  $C_p$  は位相速度を意味している。式(28)右辺の  $\partial^2 \omega_0 / \partial x^2$  は、

$$\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial h^2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \omega_0}{\partial h} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \dots\dots\dots (29)$$

より海底地形の  $x$  方向(横断方向)の変化に起因する影響を表わしている。式(28)は  $\sqrt{\beta E_0 C_p / C_g}$  を伝播速度とし、海底地形の起伏の効果を外力項にもつ波動方程式の型をしている。すなわち海底地形の変化に起因して波高に変化が現われ、それは  $(x, y)$  平面上で波動的に伝わることを意味している。式(28)は線形波動方程式なので解を具体的に求めなくても解の挙動の大略は知ることができる。たとえば弦を伝わる

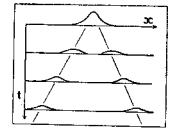


図-11 弦を伝わる変位の伝播

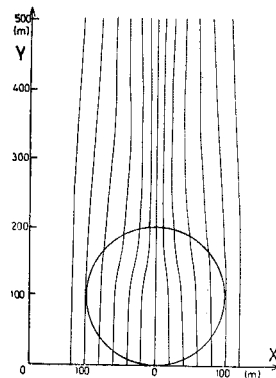
変位は外力項をもたない式(28)の形をした波動方程式で与えられるが(このときの  $y$  は時間の意味になるが)、そのとき弦の一方所を 図-11に示すように変位させたのち放つと、以後の変位は2つのコブとなって左右に伝播する。これは式(28)右辺の効果で球面浅瀬通過直後に大きくなった波高が、球面浅瀬から遠ざかるにつれて2つのコブになって広がっていくことを意味している。本研究では数値計算の差分法により式(28)から  $a^2$  を求め、これを式(25)に代入して  $k_x$  を求めた。次に式(13)を用いると、

$$\frac{dx}{dt} = C_{gx} = C_g \cdot \frac{k_x}{k}, \quad \frac{dy}{dt} = C_{gy} \approx C_g \dots\dots (30)$$

となり、さらに式(30)から

$$\frac{dx}{dy} = \frac{k_x}{k_y} \approx \frac{k_x}{k} \dots\dots\dots (31)$$

を得る。先に求めた  $k_x$  の値を式(31)に代入し、これに Runge-Kutta-Gill 法を用いて波向線  $(x, y)$  の軌跡



(球面の半径=100m, 最浅部の水深=5m, 一樣部の水深=15m, 波長=20m, 波高=1m)

図-12(a) 近似理論によって求められた球面浅瀬を通過する波の波向線

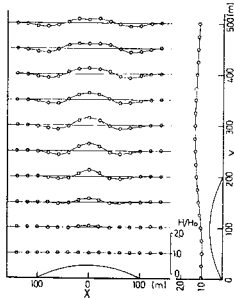


図-12 (b) 図-12 (a) のときの波高比の分布

を求めた。図-12 (a) はこのようにして求めた波向線の一列であり、図-12 (b) はこのときの波高比の分布を示している。図-12 (a) より明らかなように球面浅瀬を通過する直後まで波向線は収束し続けるが、その後は交差することなく横方向に広がっている。このように分散関係式に非線形性を導入することにより（幾何光学理論の枠内では）初めて波向線は交差しなくなり、より実際の現象に近い解を得ることができるようになった。さらに図-12 (a) に示す波向線の形は本理論とはまったく異なった基礎方程式から得られる放物形方程式を用いた Radder<sup>9)</sup> の結果と定性的に一致している。

(ii) 非線形幾何光学的屈折計算

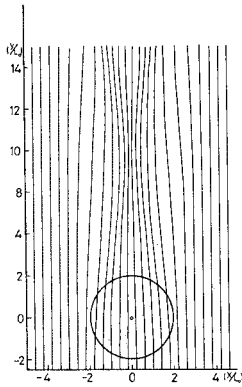
ここでは上記の近似理論ではなく、基礎方程式をそのまま数値計算してみた。このときの基礎方程式は線形幾何光学的屈折理論と同様に、式 (12)、(13) および (22) であるが、線形理論との違いは、分散関係式として式 (23) で与えられる非線形分散関係式を用いる点にある。このとき式 (12) の右辺の  $\omega$  に式 (23) の非線形分散関係式を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dk_x}{dt} = & - \left( 1 + \frac{1}{2} F(kh) (ak)^2 \right) \frac{gk^2}{2\omega_0 \cosh^3 kh} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \\ & - \omega_0 k^2 \frac{1}{2} F(kh) \frac{\partial a^2}{\partial x} + \omega_0 k^3 a^2 \left( \frac{\cosh kh}{\sinh^3 kh} \right. \\ & \left. + \frac{9}{4} \frac{\cosh kh}{\sinh^5 kh} \right) \frac{\partial h}{\partial x} - k_x \frac{\partial V_x}{\partial x} - k_y \frac{\partial V_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (32)$$

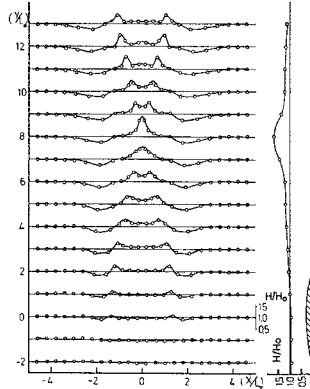
$$\begin{aligned} \frac{dk_y}{dt} = & - \left( 1 + \frac{1}{2} F(kh) (ak)^2 \right) \frac{gk^2}{2\omega_0 \cosh^3 kh} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \\ & - \omega_0 k^2 \frac{1}{2} F(kh) \frac{\partial a^2}{\partial y} + \omega_0 k^3 a^2 \left( \frac{\cosh kh}{\sinh^3 kh} \right. \\ & \left. + \frac{9}{4} \frac{\cosh kh}{\sinh^5 kh} \right) \frac{\partial h}{\partial y} - k_y \frac{\partial V_y}{\partial y} - k_x \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (33)$$

このように波数に関しては波高分布の効果を考慮している。式 (13) 中の群速度は非線形の場合、波高が大きいといわゆる分岐を起こし<sup>2), 15)</sup>、その定義そのものが難しい（これは波向線とは何かという新たな問題を生じさせ

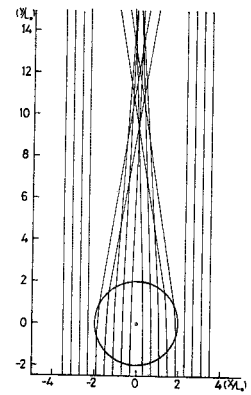
る）が、ここでは  $C_g = C_{g0} \left[ 1 + \frac{1}{2} F(kh) (ak)^2 \right]$  の形で有限振幅性を取り入れて使用した。式 (32)、(33) では線形理論と異なり波高分布の影響が波数の変化として入っている。すなわち、 $\partial a^2 / \partial x$  や  $\partial a^2 / \partial y$  の前の符号が負であることから、波が局所的に突っ立ちすぎるとそれを回避するように  $k_x, k_y$  を調整している。これが非線形理論の特徴であり、“非線形性に起因する回折効果”とでもいえよう。これらの式は式中  $\partial a^2 / \partial x, \partial a^2 / \partial y$  の項が現われ、常微分方程式でなくなってしまっている。このときは式 (6)、(7) と式 (14) を基本式として差分化して解いてもいいが、ここでは幾何光学理論の利点（波向線と波高がほぼ同時に求まる）を生かして式 (12)、(13) および (22) を基本式としたまま、次に示す手法に基づいて解く。まずいくつかの計算すべき波向線の数とその出発点での初期値を与える。次にそれぞれの波高線について Runge-Kutta-Gill 法により  $0 \sim n \cdot \Delta t$  間計算する。これにより各波向線の間隔が求まるので、式 (22) に基づいて各波向線の波高の分布（あるいは  $a^2$  の分布）を知る（上で述べたように非線形の場合（ストークス波なら 3 次以上）、波向線をよぎるエネルギーフラックスも存在し得るが、ここでは線形理論の延長上で考え、式 (22) をそのまま使用する）。このとき得られた  $(n-1) \Delta t \sim n \Delta t$  間の  $a^2$  の値を用いて  $\partial a^2 / \partial x$  を計算し、同時に  $(n-2) \Delta t \sim n \Delta t$  間の  $a^2$  を用いて  $\partial a^2 / \partial y$  を計算する。ここで得た  $\partial a^2 / \partial x, \partial a^2 / \partial y$  の値は Runge-Kutta-Gill 法を使った次の  $n$  ステップの計算の間は定数として扱い、新たに各波向線の軌跡と  $a^2$  の値を算出する。これを何度も繰り返し、最終的にすべての波向線の軌跡と  $a^2$  の分布を知る。以上が本研究で用いた非線形幾何光学に基づいた水面波の屈折理論の数値計算手法である。以下に本手法を用いて計算した球面浅瀬を通過する波の波向線、波高（比）の分布を示す。図-13 (c) は前節で述べた線形理論による屈折図であり、波向線の交差がみられる。図-13 (a) は本節で示した非線形計算の結果である。両者の計算条件は同じである。この図より、非線形理論を用いた場合の波向線は球面浅瀬通過直後までは線形理論解と同様に収束する傾向をもっているが、その後は交差することなく再び広がっている。図-13 (b) はこのときの波高比  $(H/H_0, H$  はその地点での波高、 $H_0$  は沖波波高) である。図-13 (b) に示す波高比分布は非常に興味深い結果となっている。すなわち、球面浅瀬に接近した波は、まず球面浅瀬の端から変化が生じ、浅瀬通過直後において、波高の最大値が現われる。この単峰形をした波高分布はその後 2 つの山に分かれ、かつ山の間隔は広がりつつ浅瀬から遠ざかっている。図-14 は図-13 に対し、波高が 2 倍になっている



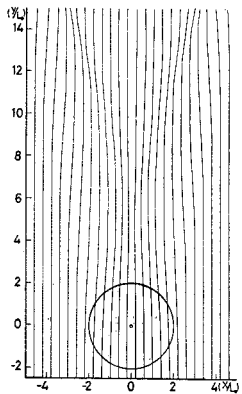
(非線形理論による解)  
 $(L_0=30\text{ m}, H_0=1.4\text{ m}, \text{球面の半径 } 80\text{ m},$   
 最浅部の水深=7.5 m, 一様部の水深=15 m)  
 図-13 (a) 球面浅瀬を通過する波の屈折



(右側の図は浅瀬中心線上の波高比を示している, 非線形理論による解)  
 図-13 (b) 球面浅瀬を通過する波の波高比の分布



(線形理論による解, 条件は 図-13 (a) と同じ)  
 図-13 (c) 球面浅瀬を通過する波の波向線



(図-13 (a) に比べて沖波波高が2倍の 2.8 m) になっている. 他の諸量は 図-13 と同じ  
 図-14 (a) 球面浅瀬を通過する波の波向線

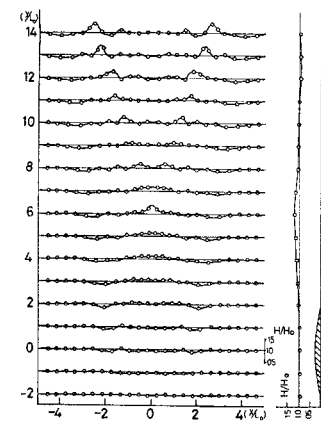
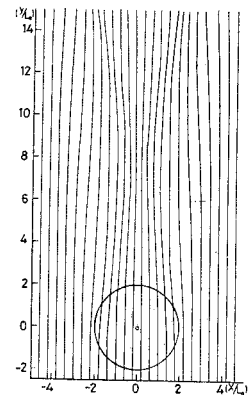


図-14 (b) 図-14 (a) における波高比の分布



(図-14 に比べて, 波長が長くなり,  $L_0=40\text{ m}$ ) の場合, 他の諸量は 図-14 と同じ  
 図-15 (a) 球面浅瀬を通過する波の波向線

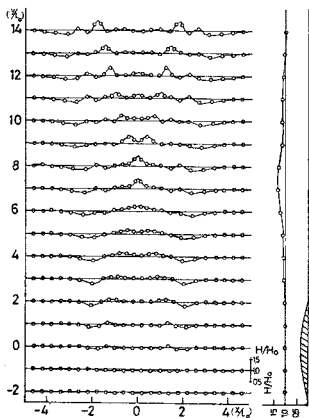


図-15 (b) 図-15 (a) における波高比の分布

場合であるが, このときの2つの山は 図-13 (b) の場合に比べてより大きい角度で広がっているようである. 図-15 は 図-14 に対して波長が長くなった場合である. 図-14 に比べて2つの山の広がり角度は波長の長い 図-15 の方が小さいようである. 以上の結果から球面浅瀬を通過する波は, 線形理論から得られる波向線の交差点に向かって波高を増大させ, 単峰のコブができた後は2つの山に分かれて, 互いに広がりつつ球面浅瀬から去っている. このような2山は個々の波の波高ではなく波高の包絡線の形状であることから, 2次元包絡ソリトンになっているのではないと思われる. しかし本計算で得られた2つのコブが包絡ソリトンであるか否かは今後の研究の進展の中で明らかにする予定である. 図-13 から 15 に示す計算結果と実験との比較は十分には行っていないが, 波高比の最大値を伊藤・谷本の実験<sup>5)</sup> と



比較すると本計算の結果は多少小さい値をとっているようである。また波高の最大値が現われる位置に関しては、本計算結果の方が彼らの実験の場合より球面浅瀬の最浅部より、より遠くで現われており、かつ波高の横断方向（ $x$ 方向の分布）は実験よりもより滑らかな形状になっている。結局海底地形の波動に与える効果に関して本計算の結果は実験に比べて多少鈍感なものになっているといえよう。

## 6. 結 び

本研究で得られた結論は以下のようである。

(1) 幾何光学的波動理論を水面波の屈折計算に適用した。このとき用いた基本式は波数と波束の位置に関する4元連立常微分方程式であり、Runge-Kutta-Gill法を用いた比較的簡便な電算機プログラムを作成することができた。

(2) 本研究で用いた線形幾何光学に基づく水面波の屈折計算法は従来の海岸工学の教科書に書いてある意味での線形屈折理論（屈折図法）とまったく同一のものであり、計算結果も従来の理論によるものとまったく同じであった。ただし、複雑な海底地形や流れのある場合における屈折計算も容易に行うことができるなどの利点を有している。

(3) 線形理論の枠内では、球面浅瀬を通過する波の波向線は浅瀬通過後交差し、波高は無限大になるという現実に生じない計算結果となる。この問題点を克服するために、Whithamの提唱する非線形幾何光学を本研究の水面波の屈折計算に適用した。このとき用いた基本式は上記の線形幾何光学に基づく屈折計算手法と同じものである。ただし分散関係式に波高の効果を加えた非線形分散関係を用いている。

(4) 非線形幾何光学理論に基づいた屈折計算により幾何光学の範囲では初めて波向線の交差の問題を克服した。

(5) 球面浅瀬を通過する波では浅瀬を通過した後には波高のコブができ、これが2つに分裂して互いに離れつつ浅瀬から遠ざかっていく。この現象が波向線の交差を回避させている。

以上が本研究で得られた主要な結論である。

最後に本研究の数値計算の一部は当時防衛大学校4年生であった徳永浩敏君の卒業研究の一部として行われたものであったことを付記する。

謝 辞：末尾になりましたが本原稿をまとめるに際して中央大学理工学部土木工学科 服部昌太郎教授、水口 優助教授より、いくつかの貴重な助言（特に非線

形理論における波向線の意味について）をいただいている。著者らは両先生に対してここに深甚なる感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) 合田良実：工学における研究テーマの選択・波浪の問題を例として，土木学会誌，Vol. 58, pp. 21~25, 1982.
- 2) Whitham, G.B.: Linear and nonlinear waves, John Wiley & Sons, 1974.
- 3) 伊藤喜行・谷本勝利：新しい方法による波動の数値計算—防波堤周辺の波高分布への適用—，運輸省港湾技術研究所報告，第10巻，第2号，pp. 97~111, 1971.
- 4) 伊藤喜行・谷本勝利：数値波動解析法とその応用—構造物周辺の波—，第18回海岸工学講演会論文集，pp. 67~70, 1971.
- 5) 伊藤喜行・谷本勝利：波向線交差領域での波の屈折—数値波動解析法の応用(2)—，第19回海岸工学講演会論文集，pp. 325~329, 1972.
- 6) Ito, Y. and K. Tanimoto: A method of numerical analysis of wave propagation—Application to wave diffraction and refraction, Proc. 13th Coastal Engineering Conference, Vancouver, A.S.C.E. 1, pp. 503~522, 1973.
- 7) 谷本勝利・小舟浩治：数値波動解析法による港内波高分布の計算，第22回海岸工学講演論文集，pp. 249~253, 1975.
- 8) Berkhoff, J.C.W.: Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Coastal Engineering Conference, Vancouver, A.S.C.E. 1, pp. 471~490, 1973.
- 9) Radder, A.C.: On the parabolic equation method for water-wave propagation, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 95, Part 1, pp. 159~176, 1979.
- 10) Candel, S.M.: Numerical solution of wave scattering problems in the parabolic application, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 90, Part 3, pp. 465~507, 1979.
- 11) Lozano, C. and Liu, P.L.-E.: Refraction-diffraction model for linear surface water waves, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 101, Part 4, pp. 705~720, 1980.
- 12) Lighthill, M.J.: Group velocity, Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, Vol. 1, pp. 1~28, 1964.
- 13) Lighthill, M.J.: Contributions to the theory of waves in nonlinear dispersive systems, Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, Vol. 1, pp. 269~306, 1965.
- 14) Lighthill, M.J.: Some special cases treated by the Whitham theory, Proceedings of the Royal Society Ser. A, 299, pp. 1~145, 1967.
- 15) Lighthill, M.J.: Waves in fluid, Cambridge University Press, 1978.
- 16) Benjamin, B. and J.E. Feir: The disintegration of wave trains on deep water, part 1. Theory, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 27, Part 3, pp. 417~430, 1967.
- 17) Benjamin, B. and J.E. Feir: Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems, Proceedings of the Royal Society, Ser. A 299, pp. 59~75, 1967.
- 18) Zakharov, V.E.: Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, J. Appl. Mech. Tech. Phys. No. 2, pp. 190~194, 1968.
- 19) Zakharov, V.E. and A.M. Rubenchik: Instability of

- waveguides and solitons in nonlinear media : Sov. Phys. JETP, Vol. 38, No. 3, pp. 494~500, 1974.
- 20) Zakharov, V.E. and A.B. Shabat : Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulating waves in nonlinear media, Sov. Phys. JETP, Vol. 34, No. 1, pp. 62~69, 1972.
  - 21) Zakharov, V.E. and V.S. Synakh : The nature of the self-focusing singularity, Sov. Phys. JETP, Vol. 41, No. 3, pp. 465~468, 1975.
  - 22) Zakharov, V.E. and S.V. Manakov : Asymptotic behavior of non-linear wave systems integrated by the inverse scattering method, Sov. Phys. JETP, Vol. 44, No. 1, pp. 106~112, 1975.
  - 23) Saffman, P.G. and H.C. Yuen : A new type of three-dimensional deep-water wave of permanent form, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 101, Part 4, pp. 797~808, 1980.
  - 24) Benny, D.J. and A.C. Newell : The propagation of nonlinear wave envelopes, Journal of Mathematical Physics, Vol. 46, pp. 133~139, 1967.
  - 25) Chu, V.H. and C.C. Mei : On slowly-varying Stokes waves, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 41, pp. 873~887, 1970.
  - 26) Hashimoto, H. and H. Ono : Nonlinear modulation of gravity waves, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 33, No. 3, pp. 805~811, 1972.
  - 27) Djordjevic, V.D. and L.G. Redekopp : On two-dimensional packets of capillary-gravity waves, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 79, Part 4, pp. 703~714, 1977.
  - 28) Ablowitz, M.J. and H. Segur : On the evolution of packets of water waves, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 92, Part 4, pp. 691~715, 1979.
  - 29) Whitham, G.B. : A note on group velocity : Journal of Fluid Mechanics, Vol. 9, pp. 347~352, 1960.
  - 30) Whitham, G.B. : Mass, momentum and energy flux in water waves, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 12, pp. 135~147, 1962.
  - 31) Whitham, G.B. : A general approach to linear and non-linear dispersive wave using a Lagrangian, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 22, pp. 273~283, 1965.
  - 32) Whitham, G.B. : Non-linear dispersion of water waves, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 27, pp. 399~412, 1967.
  - 33) Karpman, V.I. and E.M. Kruskal : Modulated waves in nonlinear dispersive media, Sov. Phys. JETP, Vol. 28, No. 2, pp. 277~281, 1969.
  - 34) Karpman, V.I. : Non-linear waves in dispersive media, translated by F.F. Cap, Pergamon Press, 1975.
  - 35) ランダウ=リフシッツ : 流体力学2, 竹内均訳, pp. 295, 東京図書(株), 1971.
  - 36) Bretherton, F.P. and C.J.R. Garrett : Wavetrains in inhomogeneous moving media, Proceedings of the Royal Society, Ser. A 302, pp. 529~554, 1968.
  - 37) Hays, W.D. : Conservation of action and modal wave action, Proceedings of the Royal Society, Ser. A 320, pp. 187~208, 1970.
  - 38) Andrews, D.G. and M.E. McIntyre : An exact theory of nonlinear waves on a Lagrangian-mean flow, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 89, Part 4, pp. 609~646, 1978.
  - 39) Andrews, D.G. and M.E. McIntyre : On wave-action and its relatives, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 89, Part 4, pp. 647~664, 1978.
  - 40) McIntyre, M.E. : On the 'wave momentum' myth, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 106, pp. 331~347, 1981.
  - 41) 富永政英 : 海洋波動, 共立出版, 1976.
  - 42) 谷内俊弥・西原巧修 : 非線型波動, 岩波書店, 1977.
  - 43) 岩垣雄一・酒井哲郎・津田俊雄 : 水深変化と流れが同時に存在する場合の波の屈折計算, 土木学会年次学術講演会講演概要集第2部, pp. 7~9, 1975.
  - 44) 酒井哲郎 : 沿岸の海の変形, 1976年度(第12回)水工学に関する夏期研修会講義集Bコース, 土木学会水理委員会, pp. B-2-1~25, 1976.
  - 45) 岩垣雄一・酒井哲郎・岡 幸夫 : 流れによる波の屈折と波高変化, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 25~29, 1977.
  - 46) 酒井哲郎・小関仁彦・岩垣雄一 : 流れによる不規則波の屈折の数値計算 : 第28回海岸工学講演会論文集, pp. 118~122, 1981.
  - 47) 岩垣雄一・塩田啓介・土居宏行 : 有限振幅波の浅水変形と屈折係数, 第28回海岸工学講演会論文集, pp. 99~103, 1981.
  - 48) Arther, R.S. : Refraction of shallow water waves : The combined effect of current and underwater topography, Transaction of American Geographic Union, Vol. 31, No. 4, pp. 549~552, 1950.
  - 49) Keller, J.B. : Surface waves on water of non-uniform depth, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 4, pp. 607~614, 1958.
  - 50) Chao, Y.-Y. : An asymptotic evaluation of the wave field near a smooth caustic, Journal of Geophysical Research, Vol. 76, No. 30, pp. 7401~7408, 1971.
  - 51) Chao, Y.-Y. and W.J. Pierson : Experimental studies of the refraction of uniform wave trains and transient wave groups near a straight caustic, Journal of Geophysical Research, Vol. 77, No. 24, pp. 4545~4554, 1972.
  - 52) 橋本 宏 : 放物型方程式による屈折・回折の数値計算, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 115~119, 1982.
  - 53) Meyer, R.E. : Theory of water-wave refraction, Advances in Applied Mechanics, Vol. 19, pp. 53~141, 1979.
  - 54) Pergrene, D.H. : Interaction of water waves and currents, Advances in Applied Mechanics, Vol. 16, pp. 10~117, 1976.
  - 55) Ryrie, S. and D.H. Pergrene : Refraction of finite-amplitude water waves obliquely incident on a uniform beach, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 115, pp. 91~104, 1982.
  - 56) Skovgaard, O. and I.G. Jonsson : Current depth refraction using finite element, Proc. 15th Conf. on Coastal Engg., ASCE, pp. 721~737, 1976.