

## 矩形キャビティ内流れ問題の解析における 境界条件に関する一考察

### ON THE BOUNDARY CONDITIONS IN NUMERICAL ANALYSIS OF THE RECTANGULAR CAVITY FLOW

吉 田 裕\*・野 村 卓 史\*\*

By Yutaka YOSHIDA and Takashi NOMURA

#### 1. はじめに

矩形キャビティ内の非圧縮粘性流れの問題は、矩形領域を形成する 3 つの壁面を固定し、他の 1 つを一定速度で運動させることによって領域内に循環流が形成されるというものである (Fig. 1)。単純な境界形状を有する格好の非線形問題として、古くから Navier-Stokes 方程式の数値解法の解析対象と

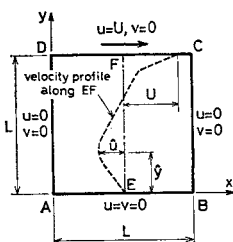


Fig. 1 Problem of Recirculating Flow in a Cavity.

されており<sup>1),2)</sup>、解析手法が向上されるたびに新たな計算結果が報告されてきた。その結果、この問題の解に関する報告例はきわめて多く、この問題は、新しい計算法の特性を相対的に評価するための代表的な解析対象として位置づけられる。ところで、この問題を対象とした実験結果は少

なく<sup>3),4)</sup>、数値解の評価基準として得るほどのものは得られていないが、これはこの問題が次の点で物理的に矛盾を含んでいることによる。

- 1) 領域が完全に閉じており、したがって圧力の規準が与えられていないこと。
- 2) 運動する壁面両端の隅角点が、一意でない流速値を取り得る特異点となっていること。

これらの物理的に明確でない要因を具体的な境界条件として設定すると、個々の解析で用いられている変数や離散化手法を反映した相互に異なる意味をもつ境界条件が与えられることになり、得られる解が違ってくる。特に流速と圧力を変数とする有限要素法に基づく解析の場合、他の流れ関数や渦度を変数とする解析以上にその影

響が顕著なようである。数多くの解析例を網羅し比較した研究に、Bozemann ら<sup>5)</sup>、Tuann ら<sup>6)</sup>の報告があるが、境界条件の設定の違いが解に与える影響については議論されていない。

本報告は、矩形キャビティ内流れの問題が取り上げられている数多くの文献を調査し、

- ① 前述の物理的に明確でない境界条件がそれぞれの解析過程でどのように取り扱われているかを比較検討し、
- ② 文献に与えられている種々の解析結果を、独自に設定した指標のもとで整理し、
- ③ 基本的に異なる 2 通りの境界条件の与え方を設定して実際に解析を行い、時間の経過に伴う渦の中心位置の移動など、これまでは議論の対象とされていなかった情報を加え、

④ 物理的な対応が明確な水路つきのキャビティ問題を設定して解析を行い、流速分布や圧力分布などの諸量の時間変化を示して閉じた領域内の流れとの特性の違いを明らかにし、

解法の違い、境界条件の与え方、要素分割の仕方などの諸条件の違いが解析結果に及ぼす影響について考察したものである。

#### 2. 矩形キャビティ内流れの問題解析における境界条件の処理の仕方について

矩形キャビティ内流れを特色づける基本的なパラメータは辺長比と Reynolds 数であるが、ここでは対象を正方形領域に限定する。このとき Reynolds 数は  $Re = \rho UL/\mu$  と定義される。ここに  $U$  は上辺で一様に与えられる流速、 $L$  は正方形の 1 辺の長さ、 $\rho$  は密度、 $\mu$  は粘性係数である。すでに述べたように、領域の全周 (Fig. 1) における A-B-C-D-A) において境界に対する法線方向 ( $n$ )、接線方向 ( $s$ ) ともに流速が規定されているこ

\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

と、上辺両端の隅角点 C, D において C-D 辺の接線方向流速成分がゼロから  $U$ ,  $U$  からゼロへステップ状に変化していることの2点が特に問題となるが、これらの点にどのように対処するかは、解析過程の違いによって異なったものとなる。

たとえば、差分法による解析では主として流れ関数  $\psi$  と渦度  $\omega$  を変数とする過程がとられるが、このときの基礎方程式と境界条件は次のように書くことができる。

$$\nabla^2 \psi = \omega \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \dots\dots (2)$$

$$\psi = 0 \quad \text{on A-B-C-D-A} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U \quad \text{on C-D} \dots\dots\dots (4. a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{on A-B} \dots\dots\dots (4. b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{on B-C and D-A} \dots\dots\dots (4. c)$$

式 (1) に相当する差分方程式を解く場合に与える境界条件は式 (3) である。これは全周の境界を1つの閉じた流線とする条件になっている。一方、渦度に関する方程式 (2) を解くときには、あらかじめ壁面における渦度の値を評価し、これを境界条件として与えることになる。壁面渦度の評価には、通常、壁面近傍において式 (1) を壁面直交方向に Taylor 展開したうえで差分化し、式 (4) のすべりなしの条件を代入するという手法がとられるため、隅角点 C, D において流速が一意でないことが影響しない。また隅角点 C, D における渦度の値は定義できないが、式 (2) を内点渦度に関して通常用いられる5点差分で離散化した場合には<sup>2), 5), 7), 8)</sup>, C, D における渦度の値は式 (2) の評価には無関係となる<sup>9)</sup>。内点渦度の評価精度を高めるために9点差分が使われる場合にも、たとえば隅角点を含むことになる場合には特別に C, D の渦度を含まない公式を適用して、特異性を避けることが行われる<sup>9)</sup>。流れ関数と渦度を変数とした有限要素法による解析過程も相当具体化されている<sup>10), 11)</sup> が、Fig. 1 に示したような閉じた矩形キャビティ内流れの解析を行った例はあまり報告されていない。これは、本来定義することができない隅角点 C, D における渦度の値を規定しなければならないこと、渦度の値の与え方によって領域内の渦度分布が影響を受けること、などの理由のためと思われる。一例ではあるが、Dhatt ら<sup>12)</sup> は点 C, D における節点渦度をゼロとして設定した解析例を報告している。

流れ関数のみを変数とする場合には4階の微係数を評価する必要があるため、差分法に基づく解析はあまりなされていない。有限要素法では、類似な問題である平板曲げ問題に関して、基礎となる変分原理およびそれを評価するための具体的な有限要素方程式の構成に関する蓄積が比較的豊富であるためいくつかみることができる。

正方形キャビティ内流れの解析例としては、Kawahara ら<sup>13)</sup> による3次の不完全多項式を補間関数とする3節点9自由度要素を用いたもの、Olson ら<sup>14)</sup> による5次の不完全多項式を補間関数とする3節点18自由度要素を用いたものなどがある。いずれも境界条件は全周上で  $\psi = 0$ 、隅角点 C, D に隣接して付加的な節点を設け、これら節点間の境界で  $\partial \psi / \partial n = U$  の条件を与えている (Fig. 2)。

これらの例では、上辺の境界上の接線方向流速成分は隅角点近傍において、付加された節点と隅角接点との間に用いられている要素の補間関数に従って変化していることになる。

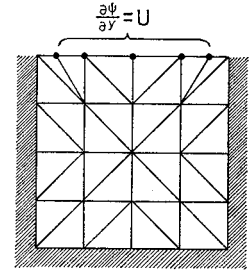


Fig. 2 Upper Wall Condition in Some Stream Function Finite Element Analysis.

流れ関数を基本変数の1つとする過程においては、計算の結果得られた流れ関数あるいは渦度の分布からあらためて圧力分布を評価することになる。圧力分布が示されている例は多くないが、おもな手法としては、Navier-Stokes 方程式を圧力に関して  $x$  方向、 $y$  方向に積分する方法<sup>1), 2)</sup>、および圧力に関するポアソン方程式を解く方法<sup>12)</sup> がある。いずれにおいても下辺中央の点を圧力の規準とする条件が与えられている。

### 3. 有限要素法による各種解析結果の比較検討

#### (1) 境界条件が流速分布に与える影響について

有限要素法に基づく解法では、Navier-Stokes 方程式本来の変数である流速と圧力を基本的な変数とする手法が多く提案されている。これらの変数によれば、流れ関数あるいは渦度の場合に比べて、現実的な流れと対応した境界条件を、より直接的に明確に設定することができる。これまでに報告されている解析例のほとんどは、上辺両端の点 C, D における条件を、

$$\langle u, v \rangle_{C, D} = \langle U, 0 \rangle \dots\dots\dots (5)$$

として与えて得られたものである。有限要素法における節点流速は要素内の流速分布を代表しているために、この条件は上辺に関する接線方向の流速成分だけでなく、側辺に関する法線方向の流速成分も規定している。したがって点 C, D にこの条件を与えるということは、対象領域に対する流出、流入のあるモデルを設定することに相当している (Fig. 3)。本節では、式 (5) の条件が解に与える影響と、その影響を低減させるためになされている対応策とその効果について、既往の文献より概観す

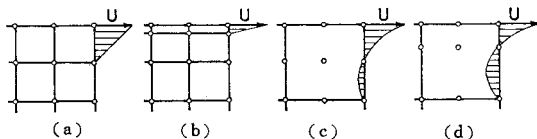


Fig. 3 Specified Corner Velocity in Some Primitive Variable Finite Element Analysis.

- (a) 4-node bilinear element
- (b) corner treatment by Hughes, et al.<sup>16)</sup>
- (c) 9-node biquadratic element
- (d) corner treatment by Heinrich, et al.<sup>20)</sup>

る。正方形キャビティ内流れの解析結果の報告では、ほとんどの場合、対象領域の中央線 E-F 上の  $x$  方向流速成分の分布が比較のために示されている。領域内を循環する総流量が変化すると、この流速分布への影響が顕著であることが知られている。そこでこの点に関して相対的な比較を行うための尺度として、流速分布のピーク値

( $\hat{u}$ ) とその位置 ( $\hat{y}$ ) [Fig. 1 参照] を考える。これらの値を、これまでに公表されている文献中与えられている図から読み取り、 $U$  および  $L$  で正規化した値を  $R_0=400$  と  $1000$  の場合について Table 1 に示した。また同じく Table 1 には、従来よりキャビティ内流れの解を比較するために用いられているパラメーターの中から後の議論に関連するものとして、一次渦の中心の座標  $\langle x_{vc}, y_{vc} \rangle$  および対応する圧力のピーク値を掲げた。これらの数値のうち、文献中に数値として報告されてなく、グラフ、流速図等から読み取ったものには ' 印をつけて区別している。mesh 分割の項目で、\* 印をつけたもの以外は、同じ大きさの要素で領域が等分割されている。なお Table 1 の中で ① は流れ関数と渦度を変数とする差分解<sup>2)</sup>, ②, ④ は流れ関数のみを変数とする有限要素法による解<sup>14)</sup>である。これらはいずれも傾

Table 1 Comparison of the Reported Solutions by Peak Values of Centerline Velocity Profile, et al.

$R_0=400$												
	investigators	ref.	method	finite element	mesh	$\hat{u}/U^\dagger$	$\hat{y}/L^\dagger$	$x_{vc}/L$	$y_{vc}/L$	$-\hat{p}_{vc}/\dagger$		
1	Burggraf	2	F.D. ( $\psi-\omega$ )	—	40×40	0.30'	0.30'	0.56'	0.61'	0.08965		
2	Olson & Tuann	14	F.E. ( $\psi$ )	18-dof triangular	8×8**	0.320'	0.292'	0.55	0.60	0.116		
3	Hughes, Taylor & Levy	15	F.E. (v-p) penalty	4-node bilinear	10×14*	0.235'	0.330'					
4	Hughes, Liu & Brooks	16			20×20	0.20'	0.34'					
5					20×21*	0.35'	0.32'	0.593'	0.617'			
6	Nakazawa, Pittman & Zienkiewicz	17			10×10	0.103'	0.394'					
7					20×20	0.206'	0.350'	0.694'	0.704'			
8	Reddy	18			10×10	~0.1045	~0.30					
9					20×20	~0.1996	~0.30					
10					20×20*	0.303'	0.325'					
11	Bercovier & Engelman	19			9-node biquadratic	5×5	0.167'	0.34'	0.61	0.62		
12						7×7	0.206'	0.32'	0.59	0.61		
13			10×10	0.235'		0.31'	0.58	0.61				
14			12×12	0.255'		0.29'	0.57	0.61	0.047			
15	Heinrich & Marshall	20	4-node bilinear	10×10			0.678	0.662				
16				20×20			0.591	0.612				
17			9-node biquadratic	5×5			0.603	0.634				
18				10×10	0.231'	0.303'	0.575	0.606				
19				10×12*	0.323'	0.308'						
20				(refined) 5×7*	0.308'	0.303'	0.560	0.605				
21	Gartling & Becker	21	F.E. (v-p)	8-node serendipity	5×7*	0.265'	0.314'					
22	Authors : B.C. (A)*			linear triangular	16×16*	0.225	0.301	0.590	0.625			
23					B.C. (B)*	16×16*	0.318	0.301	0.567	0.605	0.1202	

$R_0=1000$												
	investigators	ref.	method	finite element	mesh	$\hat{u}/U^\dagger$	$\hat{y}/L^\dagger$	$x_{vc}/L$	$y_{vc}/L$	$-\hat{p}_{vc}/\dagger$		
24	Olson & Tuann	14	F.E. ( $\psi$ )	18-dof triangular	8×8**	0.44'	0.167'	0.53	0.56	0.133		
25	Hughes, Taylor & Levy	15	F.E. (v-p) penalty	4-node bilinear	10×14*	0.255'	0.229					
26	Bercovier & Engelman	19			9-node biquadratic	5×5			0.59	0.57		
27						7×7			0.56	0.56		
28						10×10			0.55	0.56		
29			12×12	0.275'		0.197'	0.54	0.56	0.035			
30	Donea, et al.	22	F.E. (v-p)	4-node bilinear	20×20*			0.55	0.577			
31	Authors : B.C. (B)*			linear triangular	16×16*	0.3865	0.163	0.532	0.580	0.1279		

† see Fig. 1. ††  $\hat{p}=p/\rho U^2$ , \* non-uniform mesh, \*\* see Fig. 2, ' evaluated from the drawings in the literatures, \* see Fig. 6

域への流入がないとする条件が与えられた解析結果である。特に①は多くの研究において比較の対象とされている。ここではこれらを閉じた正方形キャビティ内流れの場合の解の比較の基準とした。

Hughes ら<sup>15)</sup>は Penalty function 法に基づいた解法を構成している。解析に用いた有限要素は、流速分布が双一次の4節点4角形要素である。この要素を用いた場合、隅角部の流速分布は Fig. 3(a) のような線形分布となる。中央線 E-F 上の流速分布は、①、② あるいは⑳で得られている分布と比べ  $\hat{u}$  の値は小さく、 $\hat{y}$  の値は大きくなっている [Table 1 ③, ㉔]。Hughes らはその後同一の解法を用いて、要素分割を  $20 \times 20$  の等間隔にした結果 [Table 1 ④] と、その要素分割の上に、さらに上辺に沿ってのみ Fig. 3(b) に示すような非常に薄い要素を付け加えた  $20 \times 21$  の要素分割による結果 [⑤] を比較している<sup>16)</sup>。⑤の結果では、Hughes らの意図したとおり流出入量をできる限り少なくすることにより、①や②の場合と対応する程度の  $\hat{u}$ ,  $\hat{y}$  の値が得られている。やはり Penalty function 法に基づき流速双一次分布の4角形要素を用いたものに、Nakazawa ら<sup>17)</sup>[Table 1 の ⑥, ⑦], Reddy<sup>18)</sup>[Table 1 の ⑧~⑩]がある。いずれも分割数を細かくするにつれ流出入量が減ることの影響が、 $\hat{u}$ ,  $\hat{y}$  の値の変化にみることができる。

Bercovier ら<sup>19)</sup>も Penalty function 法に基づく解法を構成しているが、用いている要素は9節点双二次4角形要素である。この要素の場合、側辺に沿った流速分布は Fig. 3(c) に示すような放物線で、流出と流入がともにあるような分布となっている。したがって、同じ節点間隔の要素分割ならば、流出入量は流速線形分布の4節点要素の場合よりも二次の9節点要素の場合の方が少ない。このことは Table 1 において Bercovier らの結果 [⑪~⑭, ㉕~㉗] における  $\hat{u}$ ,  $\hat{y}$  の値を線形4節点要素で同等の要素分割をした場合の他の結果における値と比較すると、 $\hat{u}$  が大きく  $\hat{y}$  が小さいという傾向が顕著であることから明白である。

Heinrich ら<sup>20)</sup>は Penalty function 法による解法で、双一次4節点要素と双二次9節点要素の2種類の要素を用いた結果を報告している。Heinrich らは流出入の影響を低減させるためには、線形の要素の場合には Hughes ら<sup>15)</sup>が行ったように上辺沿いの要素の寸法を小さくするよりないが、二次の要素の場合には、単に要素を小さくする以外に、Fig. 3(d) に示すように中間節点の位置を移動させて、流出入量の取支をちょうどゼロとするという手法を取り得ることを指摘している。この方法を用いると  $5 \times 7$  というかなり粗い要素分割でも流速分布が相当改善されることが報告されている [Table 1 ㉘]。

Gartling ら<sup>21)</sup>は、流速については2次分布の8節点要素、圧力については線形補間を用いる混合補間型の Galerkin 法による解法を構成した [Table 1 の ㉙]。要素分割がかなり粗いため、2次の流速分布を用いているものの  $\hat{u}$ ,  $\hat{y}$  の値はあまりよくない。

以上示してきたように、ほとんどの解析例で隅角点 C, D において式 (5) の条件が与えられている。この条件は単に領域からの流入のあるモデルを構成するのみならず、得られる流速分布に対して特に C, D を含む要素の種類と寸法が大きく影響するという結果をもたらすものである。キャビティ内流れで従来より設定されている閉じた流線の流れを得るためには、少なくとも点 C, D において流速ゼロの条件を与える必要があるが、そのような条件を与えている例は著者の知る限り Lee ら<sup>22)</sup>のみである。Lee らは4節点線形要素によるモデルの場合、上辺に沿って両端 C, D で流速ゼロ、その隣の節点で  $\langle U/2, 0 \rangle$ 、それより内側の節点流速はすべて  $\langle U, 0 \rangle$  という条件を与えている。ただし解法および解析結果の詳細は示されていない。

## (2) 一次渦の中心位置について

矩形キャビティ内流れの解を相対的に比較するための基本的なパラメーターの1つに一次渦の中心位置の座標  $\langle x_{vc}, y_{vc} \rangle$  がある。Bozeman ら<sup>5)</sup>は  $Re=0$  の Stokes 流れから  $Re=\infty$  の流れに向けて、渦の中心位置が Reynolds 数の変化に伴って移動していく状況を、流れ関数と渦度を変数とする差分法によって自ら求めた解と Burggraf<sup>23)</sup> による  $Re=400$  の解および  $Re=\infty$  のときの理論解とを合わせて示している (Fig. 4)。これによれば、渦の中心は  $Re=0$  のときに領域の中央線上上方にあり、Reynolds 数が高くなるに従って、作用流速の下流方向へ移動し、Reynolds 数がおおよそ 100 より高い領域では、正方形の中心に向けて移動するとされている。同図上に、これまで示してきた流速と圧力を変数とする有限要素法による  $Re=400$  および 1000 の場合の解のうち、 $\langle x_{vc}, y_{vc} \rangle$  の値が報告されているもの [Table 1 参照] について、その位置をプロットした。また、次章で詳述するが、著者らが計算した結果も合わせて示してある。

Fig. 4 の中で、Heinrich らの結果、あるいは Bercovier らの結果は、それぞれ同一の解法を用いて要素分割あるいは要素種類のみを変化させているものである。これらの結果を Table 1 に示した要素分割数と対応させると、隅角部からの流出入量が大きくなるような要素分割が与えられるに従って、渦の中心位置が上方および下流方向へ向けて変化する傾向があることがわかる。このような変化を生じる理由の1つは、領域からの流入

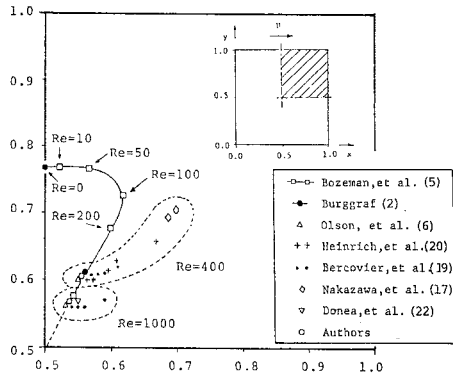


Fig. 4 Reported Locations of the Center of the Primary Vortex.

があることによって循環流の流量が減るために、上辺流速  $U$  で規定される Reynolds 数よりも実質的には低い Reynolds 数の流れが解析されているためであると考えられる。ただし渦の中心の位置が変化する方法は、Bozeman らが示した Reynolds 数が低くなることによる移動方向とはかなり差がある。これは Bozeman らの解では、正方形領域の境界が閉じた流線となっているのに対し、式 (5) の条件が課せられた解析では、上辺に沿って側辺 D-A から側辺 C-B へ貫通する流れが形成されるため、閉じた流線の形状が上下方向に圧縮された扁平なものとなっているためといえよう。すなわち、隅角部の要素分割が粗い場合には、単に実質的な Reynolds 数が低くなるだけでなく、隅角部の流出入域も大きくなるため、扁平の度合いが大きくなるということが Fig. 4 より指摘できる。

(3) 圧力の規準について

本章で言及したすべての解析例は、上辺両端近傍における境界条件の与え方に多少違いがあるにせよ、正方形領域の全境界上ですべての流速の自由度が規定されている。このような条件を設定すると、連続条件に関しては条件過多となり、圧力分布の規準は不定となる。Penalty function に基づく解法では、圧力分布を評価する際に圧力の規準を別途与えるということはないが、これは Penalty function 法によって得られる圧力分布が、領域全体に関する総和がゼロであるという条件の与えられた分布となることによる<sup>24)</sup>。Gartling ら<sup>21)</sup>あるいは Donea ら<sup>22)</sup>の解法のように、圧力も陽な変数であり、これを連続方程式によって直接求めようとする手法のときには、連続条件に関して条件過多ならば圧力は不定となる。そこで適当な位置の圧力変数（普通は下辺中央）を1つ選んで規準値を与え、その圧力変数と対応する連続条件を取り除いた方程式系を解くということが行われ

ている。圧力分布あるいはそのピーク値について報告されている例はあまり多くなく、等圧線とピーク値が両方も示されているのは Bercovier ら<sup>19)</sup>だけである。また、Hughes<sup>16)</sup>、Lee<sup>23)</sup>の結果では、圧力分布に checkerboard pattern とよばれる振動が生じ、等圧線として報告されているものは、適当な smoothing によって求めたためらかな分布の図である。

4. 境界条件の設定に関する解析例

以上示されてきたような状況をふまえ、境界条件の与え方が正方形キャビティ内流れの解にどのような影響を与えるのかを明確にする目的で、著者らが構成した解法<sup>25)</sup>を用いて解析を行った。解法の基礎とする有限要素方程式は、流速と圧力を変数とするもので、流速に関しては要素内線形分布の通常の3角形要素で離散化し、圧力に関してはこれを要素中心の変数として導入し構成したものである。用いた解法は、著者らが開発した直接時間積分法<sup>26)</sup>を基礎とする非定常解法である。正方形キャビティ内流れの解析を行うにあたって設定した初期条件は、上辺で規定する流速をも含めて、領域のすべてにおいて流速、圧力ともゼロとして与えた。この状態は運動方程式、連続方程式を満足することが明らかなものである。上辺の流速は Fig. 5 に示すように、流速ゼロの状態から 20 ステップで所定の速度  $U$  まで立ち上げたのち、これを一定に保ったまま、領域内の流れが定常状態になるまで計算を行った。

$Re=400$  の場合について、まず Fig. 6(a) に示すような境界条件 [B.C. (A)] を設定した。ここで  $f_x$  は圧力と粘性力の寄与からなる等価節点力の  $x$  方向成分で、 $x$  方向節点流速  $u$  の自由度に対応するものである。要素分割は境界近傍で流速勾配が大きいため Fig.

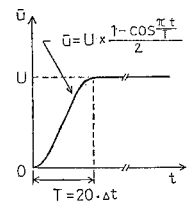


Fig. 5 Starting History of the Applied Velocity.

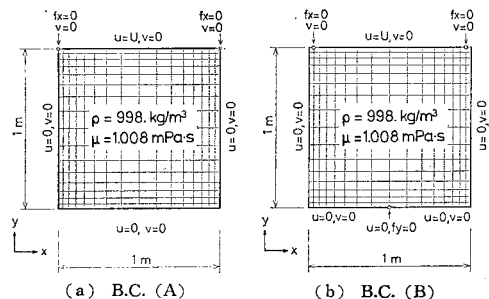


Fig. 6 Boundary Conditions Specified in this Study.

Table 2 Balance and Inbalance of Fluid Fluxes on Midplanes of Square Cavity.

$Re$	B.C.	$Q_0$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_1 - Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_3 - Q_4$
400	A	$6.1214 \times 10^{-6}$	$3.9801 \times 10^{-5}$	$3.3679 \times 10^{-5}$	$6.1217 \times 10^{-6}$	$3.2435 \times 10^{-5}$	$3.2435 \times 10^{-5}$	$-1.27 \times 10^{-10}$
400	B	—	$4.5770 \times 10^{-5}$	$4.5771 \times 10^{-5}$	$-1.97 \times 10^{-10}$	$4.3832 \times 10^{-5}$	$4.3832 \times 10^{-5}$	$5.53 \times 10^{-10}$
1000	B	—	$1.2571 \times 10^{-4}$	$1.2572 \times 10^{-4}$	$-5.50 \times 10^{-10}$	$1.2371 \times 10^{-4}$	$1.2371 \times 10^{-4}$	$-2.75 \times 10^{-10}$

( $m^3$ )

くにつれて細くなるような分割とした。境界に沿った要素幅は  $L/33$  である。その他の諸定数は図中に示してある。積分時間間隔は  $\Delta t = 250$  秒とした。計算の結果、両隅角点における未知流速の値は上辺に与えた値  $U$  と等しく求めた。しかし、前章で述べたように、この節点の流速は側辺上の流速をも代表するものであり、この解析モデルが領域に対して流出入のある場合に相当しているため、Fig. 7

に示すように鉛直中央線 E-F 上の流速分布は Burggraf<sup>2)</sup> の分布とかなり異なったものであり、そのピーク値  $\hat{u}$  も小さい (Table 1②)。流速が線形補間されていることに基づいて、中央断面 EF に関する流出入量を評価すると (Fig. 8, Table 2 参照)。

流出量と流入量 ( $Q_1$  と  $Q_2$ ) との間に不つり合いがあり、その差はちょうど隅角部での流出入量 ( $Q_0$ ) と等しくなっている。これに対し、領域を上下に分割する水平断面に関する流出入量 ( $Q_3$  と  $Q_4$ ) は差

引きゼロとなっており、Fig. 6 (a) の境界条件の場合、解が隅角部の要素の寸法に依存していることがわかる。

次に領域が完全に閉じたモデルとなるように、Fig. 6 (b) に示すように、両隅点において  $x, y$  両方向成分とも流速をゼロと規定する条件 [B. C. (B)] を設定した。これと隣接する上辺の節点では、 $x$  方向流速成分を未知とすることにより、隅角部での流速変化を緩和した。下辺中央の条件は、圧力の規準を与える目的で設定したものである。その位置は従来の差分解析などにおける圧力の規準点と一致させ、圧力分布が比較し得るようにした。この下辺中央の条件は、正方形領域からの流出入を許すものであるが、他に流出入が可能な境界がないため、解が連続条件を満足するならば、流速はゼロとな

り、結果として閉じた領域のモデルを期待したものである。このような境界条件を設定し、他の条件は前の計算例とまったく同一のまま  $Re=400$  の流れを計算した。十分定常となった状態における流速分布、圧力分布を Fig. 9 に示す。なお流速ベクトルは、節点位置のみでなく要素中心位置にもプロットしてある。全体として、安定した流速分布が得られている。また、下辺右隅角部に循環方向の異なる二次渦が形成されている。下辺中央の  $y$  方向流速成分は倍精度計算で  $U \times 10^{-12}$  のオーダーの値であり、ここで得られた解が連続条件を精度よく満足していることを示すとともに、当初期待したとおり、結果として閉じた流線の流れが評価されている。中央線 EF 上の流速分布を Fig. 7 に示す。閉じた領域の流れを対象とした Burggraf<sup>2)</sup> による差分解と比較すると、前述の境界条件 (A) の結果よりも近い分布が得られている。また、そのピーク値  $\hat{u}/U$  の値 [Table 1 の ②]

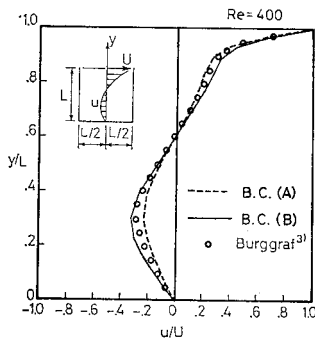


Fig. 7 Centerline Velocity Profile ( $Re=400$ ).

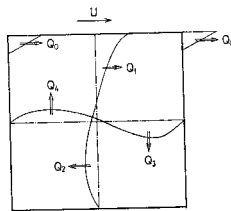
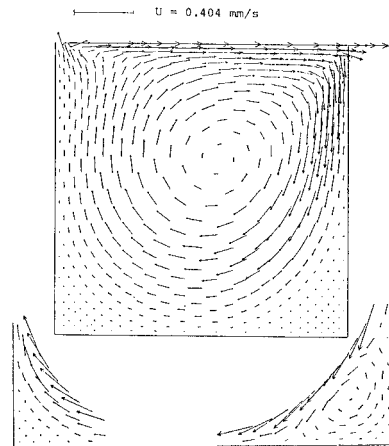


Fig. 8 Notation of Fluid Fluxes Examined in Table 2.



$(10^{-4} \text{ Pa})$									
2.28	1.9	1.6	1.3	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2.2	1.8	1.5	1.2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2.1	1.7	1.4	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2.0	1.6	1.3	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.9	1.5	1.2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.8	1.4	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.7	1.3	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.6	1.2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.5	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.4	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.3	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.8	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.7	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.4	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.3	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Fig. 9 Distribution of Velocity and Pressure at Time=100000 s ( $Re=400$ ).

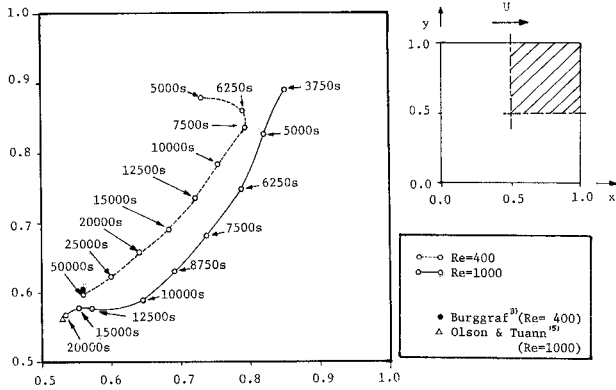


Fig. 10 Movement of the Center of the Primary Vortex.

も、閉じた正方形領域における他の結果①,②における値に近いものとなっている。Table 2 に示すように、鉛直・水平の各断面における流量の収支はつり合っており、領域からの流出入がなく、また連続条件を精度よく満足する解が得られている。定常状態における圧力分布 [Fig. 9] には、上辺下部に高い正圧、一次渦の領域にピークを有する負圧が認められる。Fig. 10 には、渦の中心位置  $\langle x_{vc}, y_{vc} \rangle$  の時間変化を示した。正方形領域の上方に形成された渦は、いったん下流側へ移動した後領域中央部へ向けて進み、定常状態にいたる。その最終的な位置は、他の解析結果と比較して、ほぼ妥当なものといえる (Fig. 4 および Fig. 10)。また、Fig. 11 には領域内のいくつかの位置における圧力の時間変化を上辺に作用させた流速の変化と合わせて示した。下流端隅部 (d) における圧力は作用流速の変化に対応して上昇している。また、その他の位置では、Fig. 10 に示したような渦の移動に伴って、圧力低下のあることが示されている。

なお、Fig. 6(b) の境界条件において、 $dt$  など他の条件はまったく同一なものを用い、単に  $U$  の値のみを大きくして  $Re=1000$  の場合の計算を行った。定常状態における流速分布、圧力分布を Fig. 12 に示す。  $Re=400$  の場合と比べて二次渦が発達している。鉛直中央線上の流速分布を Fig. 13 に、そのピーク値  $\hat{u}/U$  を Table 1 に示す。流れ関数で定

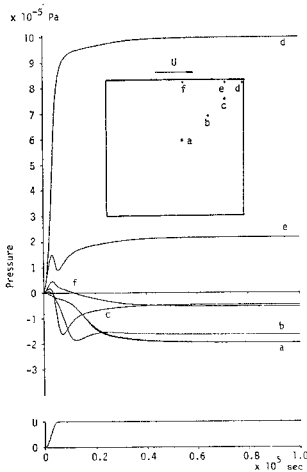


Fig. 11 Time History of the Pressure at Several Location in the Domain ( $Re=400$ ).

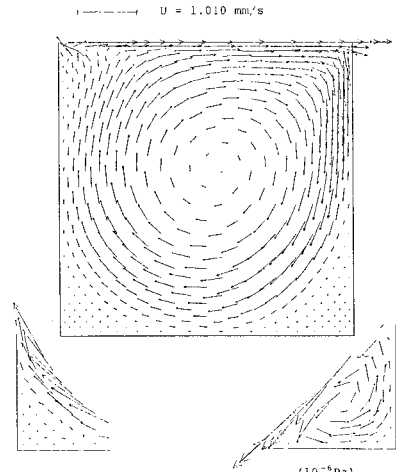


Fig. 12 Distribution of Velocity and Pressure at Time=100000s ( $Re=1000$ ).

式化された Olson ら<sup>14)</sup>の解とほぼ対応する分布である。あわせて示した Hughes ら<sup>15)</sup>の解は、隅角部からの流出入が顕著に影響しているものであることを Hughes 自身がコメントしている結果であり、閉じた領域の解との差が大きい。Fig. 10 に渦の中心位置の移動する状況を  $Re=400$  の場合と合わせて示した。実時間上で比較すると、渦の移動する速度は  $Re=1000$  の方が作用流速が大きいくに対応して急速である。圧力の時間変化を Fig. 14 に示す。圧力低下のピークの通過後、定常状態に至る過程で若干の緩慢な変動がみられるが、これは Fig. 10 に示したように、渦の中心がいったん  $y$  方

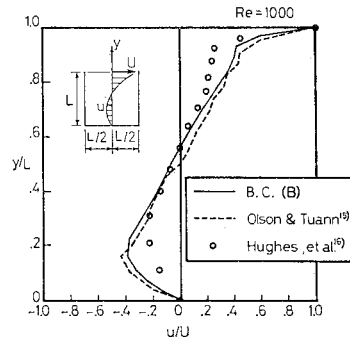


Fig. 13 Centerline Velocity Profile ( $Re=1000$ ).

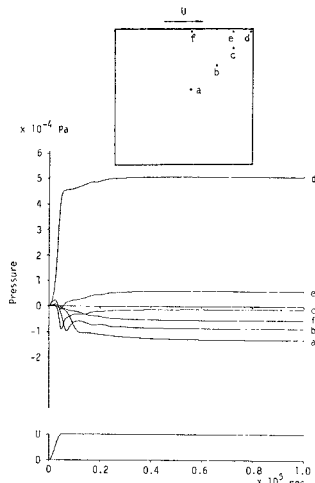


Fig. 14 Time History of the Pressure at Several Locations in the Domain ( $R_e=1000$ ).

向に移動し、再び領域の中心をめざす、という変化に対応したものである。計算の結果求めた負圧のピーク値を Table 1 ⑩ に示した。ほぼ妥当な値のようであるが、本解析で得られた圧力分布には、特に隅角部近傍でいわゆる checkerboard pattern が顕著であり、その傾向が領域全体に及んでいるため、ピーク値にもその変動分が若干含まれていることを考慮したうえで妥当性を判断すべきであろう。

### 5. 水路付きキャビティ内の流れ

本論文で対象としてきた矩形（正方形）キャビティ内の流れの問題では、閉じた境界と、流速が特異となる隅角部という、現実的ではない想定がされており、流速と圧力という物理的に明確な量を変数とする解法を適用する場合、そのような状況と対応する条件を設定することに種々の苦心がされてきたことは、これまでに述べたとおりである。ところで通常、キャビティ内の流れとして観察されたり、実験の対象とされたりするものは、管路あるいは水路の壁面に設けられた急転部内の流れである。そのような物理的な状況が明確な流れに対応する境界条件の1つは、Fig. 15 のようなものであろう。本章では、これまでに示してきた正方形キャビティ内の流れと対照させる目的で、あらためて Fig. 15 に示すような条件設定によって解析を行った。なお、初期条件は流速、圧力ともゼロとし、流入部の作用流速は、Fig. 5 のように立ち上げるものとする。作用流速は、Fig. 15 に示すようにキャビティの辺長  $L(=1\text{ m})$  に対して  $R_e=400$  となる値  $U$  の台形分布として与えたが、解析の結果、水路内の流速分布はキャビティ部に達する

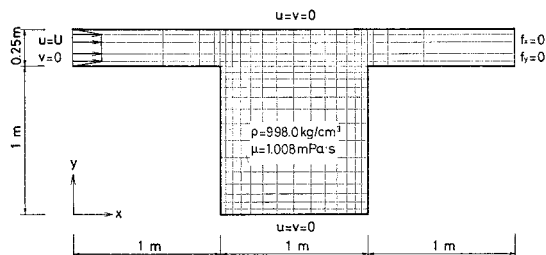


Fig. 15 Boundary Condition for Square Cavity Beside a Channel.

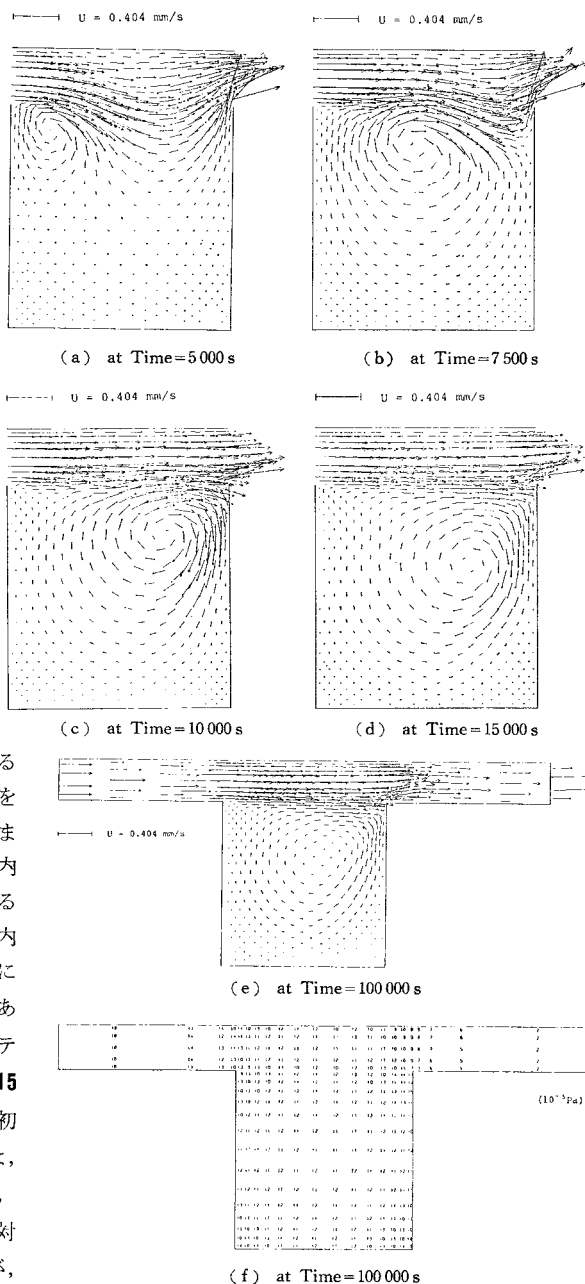


Fig. 16 Evolution of Velocity and Pressure.



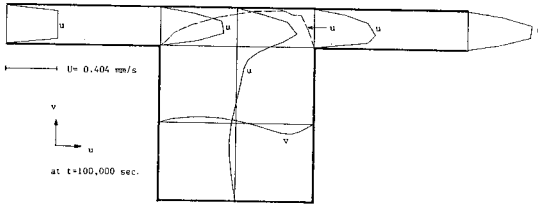


Fig. 17 Velocity Profiles on Several Sections.

以前に十分に放物線を近似した分布に変化し、2次元 Poiseuille 流れが得られている。このときの水路内の平均流速は  $0.85 U$  である。また積分時間間隔は 250 秒とした。

Fig. 16 には、キャビティ内の流速分布と圧力分布が時間的に変化していく状況を示す。上流側急転部に形成された渦が流下し、下流端に達した後に、キャビティの中央部に向けて移動していく様子が示されている。特に水路沿いに流下する過程で、渦が水路内に膨れ出している状況は、正方形キャビティの解析では得られない現象である。Fig. 16(e, f) には定常状態における流速および圧力の分布を全領域にわたって示した。キャビティ上部の水路内の流れは、キャビティ内に若干膨れ出したものとなっているが、ほとんど壁面に平行で、正方形キャビティ内の流れが、ほぼ形成されている。領域内のいくつかの断面における流速成分の分布を Fig. 17 に示す。正方形領域の上辺の  $x$  方向流速成分  $u$  の分布は破線で示してあるが、最大でも作用流速  $U$  の  $3/4$  程度で下流側にピークを有し、壁面に向けて減少する分布となっている。定常状態の圧力分布は水路に与えた圧力勾配

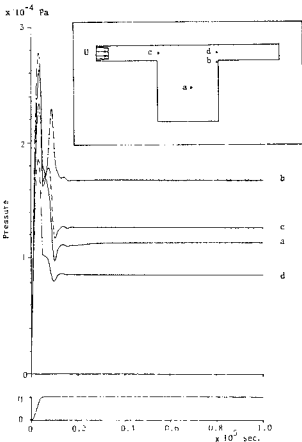


Fig. 18 Time History of the Pressure at Several Locations.

後、いくつかの位置で再び上昇し、以後緩慢に変動しながら定常状態にいたっている。

が顕著であり、キャビティ内の分布は、渦が移動していた段階に比べると明確ではない。

ここでも checkerboard pattern が若干認められる。Fig. 18 は、領域内のいくつかの位置における圧力の時間変化を示したものである。作用流速が増加している初期の期間では、圧力は作用流速の変化と対応するような変化を示している。作用流速を一定とした

## 6. おわりに

正方形キャビティ内を循環する非圧縮粘性流れの問題は、流体解析の分野における標準的な問題として、さまざまなタイプの数値解法によって解析されている。この問題の原点に位置づけられる解析は、流れ関数と渦度を変数とした差分法による解析結果である。この場合には結果として閉じた領域内の流れが対象となっており、物理的には矛盾を含んだものとなっている。一方、有限要素法は有限の領域を対象とした境界値問題の解析法であり、一般的には物理的に合理的な境界条件の設定が不可欠となる。特に近年、流速と圧力を変数とする手法が種種具体化されているが、物理的に無理のある条件下での差分法による解を比較の対象としようとするために、この問題の解析における条件設定に際しては、何らかの理想化が要求されることになる。したがって、これに伴う特異な条件に関しては、それぞれの研究者、解法によって異なる対応がなされている。多くの場合、その対応として設定されている境界条件が、領域に対する流出・流入のある流れを表現するものであり、したがって、閉じた領域内の流れというこの問題の原点における前提のもとに得られた結果とは、流速分布等に差が生じる。本論文では、独自の指標等を導入して、この点について整理することにより、隅角部付近の要素分割の細かさの程度や、用いた要素の種類が解に大きく影響することを具体的に確認した。領域からの流出入のある解を閉じた領域の解と比べるために、流速線形補間の要素を用いた場合では、Hughes ら<sup>16)</sup>をはじめ一般に Fig. 3(b) のような処置により、流出入量を減ずるという対応がされており、Heinrich ら<sup>20)</sup> はこのような方法が唯一であるとさえ述べている。しかし、本来有限要素法は要素分割、境界条件の設定の仕方に対して汎用性のある解法であり、境界条件の与え方によっては閉じた領域を表現することが可能である。本論文では閉じた領域に対応する境界条件のもとでの解析例を示した。また、矩形キャビティ内の流れとして実際に遭遇し得るような、物理的な条件の明確に与えられている水路付きキャビティの問題を設定し、その解と閉じた矩形キャビティ問題の解との比較を行い、与えられた条件が違うことに伴って、いくつかの異なる特性が得られることを示した。

## 参考文献

- 1) Kawaguti, M. : Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for the Flow in a Two-Dimensional Cavity, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 16, No. 12, pp. 2307 ~2315, 1961.
- 2) Burggraf, O.R. : Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows, J. Fluid

- Mech., Vol. 24, pp. 113~151, 1966.
- 3) Mills, R.D. : On the Closed Motion of a Fluid in a Square Cavity, *J. Roy. Aero. Soc.*, Vol. 69, pp. 116~120, 1965.
  - 4) Pan, F. and A. Acrivos : Steady Flows in Rectangular Cavities, *J. Fluid Mech.*, Vol. 28, pp. 643~655, 1967.
  - 5) Bozeman, J.D. and C. Dalton : Numerical Study of Viscous Flow in a Cavity, *J. Comp. Phys.*, Vol. 12, pp. 348~363, 1973.
  - 6) Tuann, S.-Y. and M.D. Olson : Review of Computing Methods for Recirculating Flows, *J. Comp. Phys.*, Vol. 29, pp. 1~19, 1978.
  - 7) Davis, G.V. and G.D. Mallinson : An Evaluation of Upwind and Central Difference Approximation by a Study of Recirculating Flow, *Comp. and Fluids*, Vol. 4, pp. 29~43, 1976.
  - 8) Gupta, M.M. and R.P. Manohar : Boundary Approximations and Accuracy in Viscous Computations, *J. Compt. Phys.*, Vol. 31, pp. 265~288, 1979.
  - 9) Shay, W.A. : Development of a Second Order Approximation for the Navier-Stokes Equations, *Comp. and Fluids*, Vol. 9, pp. 279~298, 1981.
  - 10) Smith, S.L. and C.A. Brebbia : Finite-Element Solution of Navier-Stokes Equations for Transient Two-Dimensional Incompressible Flow, *J. Comp. Phys.*, Vol. 17, pp. 235~245, 1975.
  - 11) Ikegawa, M. : A New Finite Element Technique for the Analysis of Steady Viscous Flow Problems, *Int. J. for Numer. Meth. in Engng.*, Vol. 14, pp. 103~113, 1979.
  - 12) Dhatt, G., B.K. Fomo and C. Bourque : A  $\phi$ - $\omega$  Finite Element Formulation for the Navier-Stokes Equations, *Int. J. for Numer. Meth. in Engng.*, Vol. 17, pp. 199~212, 1981.
  - 13) Kawahara, M and T. Okamoto : Finite Element Analysis of Steady Flow of Viscous Fluid Using Stream Function, *Proc. of JSCE*, No. 247, pp. 123~135, 1976.
  - 14) Olson, M.D. and S.-Y. Tuann : New Finite Element Results for the Square Cavity, *Comp. and Fluids*, Vol. 7, pp. 123~135, 1979.
  - 15) Hughes, T.J.R., R.L. Taylor and J.-F. Levy : High Reynolds Number, Steady, Incompressible Flows by a Finite Element Method, *Finite Elements in Fluids*, Vol. 3, Chap. 3, John Wiley and Sons, Edn. by R.H. Gallagher, et al., pp. 55~72, 1978.
  - 16) Hughes, T.J.R., W.K. Liu and A. Brooks : Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation, *J. Comp. Phys.*, Vol. 30, pp. 1~60, 1979.
  - 17) Nakazawa, S., J.F.T. Pittman and O.C. Zienkiewicz : Numerical Solution of Flow and Heat Transfer in Polymer Melt, *Finite Elements in Fluids*, Vol. 4, Chap. 13, John Wiley and Sons, Edn. by R.H. Gallagher, et al., pp. 251~283, 1982.
  - 18) Reddy, J.N. : Penalty-Finite-Element Analysis of 3-D Navier-Stokes Equations, *Comp. Meth. and Appl. Mech. in Engng.* Vol. 35, pp. 87~106, 1982.
  - 19) Bercovier, M. and M. Engelman : A Finite Element for the Numerical Solution of Viscous Incompressible Flows, *J. Comp. Phys.*, Vol. 30, pp. 181~201, 1979.
  - 20) Heinrich, J.C. and R.S. Marshall : Viscous Incompressible Flow by a Penalty Function Finite Element Method, *Comp. and Fluids*, Vol. 8, pp. 73~83, 1980.
  - 21) Gartling, D.K. and E.B. Becker : Finite Element Analysis of Viscous, Incompressible Fluid Flow, Part 1 and 2, *Comp. Meth. and Appl. Mech. in Engng.*, Vol. 8, pp. 51~60 and 127~138, 1976.
  - 22) Donea, J., S. Giuliani, H. Laval and L. Quatapella : Finite Element Solution of the Unsteady Navier-Stokes Equations by a Fractional Step Method, *Comp. Meth. and Appl. Mech. in Engng.*, Vol. 30, pp. 53~73, 1982.
  - 23) Lee, R.L., P.M. Gresho and R.L. Sani : Smoothing Techniques for Certain Primitive Variable Solutions of the Navier-Stokes Equations, *Int. J. for Numer. Meth. in Engng.*, Vol. 14, pp. 1785~1804, 1979.
  - 24) Sani, R.L., P.M. Gresho, R.L. Lee, D.F. Griffiths and M. Engelman : The Cause and Cure(!) of the Spurious Pressures Generated by Certain FEM Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations, Part 2, *Int. J. for Numer. Meth. in Fluids*, Vol. 1, pp. 171~204, 1981.
  - 25) 吉田 裕・野村卓史 : 高精度時間積分法に基づく Navier Stokes 方程式の解法, *土木学会論文報告集*, 第 326 号, pp. 29~40, 1982 年 10 月.
  - 26) 吉田 裕・藤原 亨・野村卓史 : 熱伝導型方程式の直接時間積分法と高精度化のアルゴリズム, *土木学会論文報告集*, 第 313 号, pp. 23~36, 1981 年 9 月.

(1983.6.29・受付)