

平坦固定床蛇行水路における3次元流況の解析

THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS ON THE FLOW IN RECTANGULAR MEANDERING CHANNELS

池谷 毅*・玉井 信行**

By Tsuyoshi IKEYA and Nobuyuki TAMAI

1. 序 論

自然河道の流路中心線が長い距離にわたって直線である例はまれであり、交互に向きを変える湾曲部が連結した、いわゆる、蛇行形状を示すことが多い。そのため、蛇行現象は河川工学上の多くの問題と密接な関係をもっている。しかしながら、河床形状の変形と流れとの相互関係より成る蛇行現象に対する理解は十分とはいえず、蛇行河道における流れのみに関してもまだ不明な点が多い。蛇行河道における流れは、河道法線の曲がりと河床の傾きのために3次元的な複雑なものとなる。

河川においては、水深と河幅との比、および河幅と最小曲率半径との比が1に比べて小さい。蛇行河道における流れを模擬するためには、これらの条件を満たすことが必要であり、これを満足するおもな実験には、以下に示すものがある。

Chasinski¹⁾ は、蛇行水路において生じる横断面内の流れ(2次流)のパターンについて実験的に研究し、2次流のパターンは上下流の境界条件により多様に変化することを示した。Yen²⁾、木下³⁾、玉井・池内・山崎⁴⁾は、平坦固定床蛇行水路における流速、流向、水位、水路床せん断応力などを測定し、3次元流況を実験的に調べている。Yen⁵⁾、Hooke⁶⁾ は、移動床蛇行水路における水路床形状、水路床せん断応力、流砂量などを測定し、水流と土砂の運動との関係を調べている。

一方、理論的に蛇行河道における流れを解析した研究としては、以下に示すものがよく知られている。

Engelund⁷⁾、森・岸⁸⁾ は、蛇行河道内の流れを解析し、これから平衡河床形状を求めた。池田・日野・吉川⁹⁾、Hasegawa・Yamaoka¹⁰⁾、池田・Parker・沢井¹¹⁾ は、蛇行の発達過程を論じている。池内・玉井¹²⁾は、こ

れらの理論の理論展開上の仮定や数学的な表現に不十分な点があることを指摘し、この点を修正し解を求めている。これらの理論は、水深方向に平均された水理量に対する理論であり、いわば「2次元理論」である。

Leschziner・Rodi¹³⁾ は、単湾曲部における3次元流況の解析を行っている。この解析では、乱流モデルとして $k-\epsilon$ モデルを用いており、3次元性は十分に考慮されているといえるが、モデルの係数の決定に不十分な点を残し、計算時間が長くかかるのも欠点の1つである。また、Gottlieb¹⁴⁾ は、平坦固定床蛇行流を線形化方程式に対して解き、3次元流況を求めている。

本研究においては、平坦固定床蛇行水路における3次元流況を乱流モデルを用いた大規模な数値計算を行うことなく、非線形性を一部残しつつできるだけ解析的な方法で見通しよく解を導く方法を開発することを試みる。

なお、本論文は第27回水理講演会に発表された論文¹⁵⁾に比較・考察を加えて充実させたものである。

2. 解析の対象と座標系

解析の対象とする平坦固定床蛇行水路と解析に用いる座標系を図-1に示す。

水路中心線は、Langbein・Leopold¹⁶⁾ が自然河川の蛇行流路曲線として提案した、式(1)で示される sine-generated-curve とする。

$$\theta = \theta_0 \cos \frac{2\pi s_a}{L} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 θ : 蛇行水路中心線が蛇行帯中心軸となす偏角、 θ_0 : 最大偏角、 s_a : 水路中心線と蛇行帯中心軸との交点から流下方向に水路中心線に沿って測った距離、 L : 蛇行流路長である。

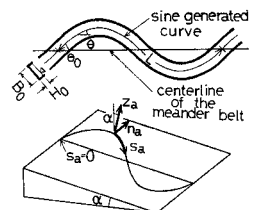


図-1 座標系・記号の定義

* 学生会員 工修 東京大学大学院土木工学専門課程

** 正会員 工博 東京大学工学部 土木工学科

水路床は、蛇行帯中心軸方向に最大勾配 ($\tan \alpha$) をもつ平斜面上にあるものとし、水路側壁はこの平斜面に垂直で、水路幅は一定であるとする。さらに、河川の幾何学的特徴から、平均水深と水路幅との比、および水路幅と最小曲率半径との比は 1 に比べて小さいものとする。

解析には直交曲線座標系 (s_a, n_a, z_a) を用いる。 n_a 軸は水路中心線を原点に、斜面内に s_a 軸に垂直にとった直線座標軸であり、 z_a は水路床を原点に、斜面に垂直にとった座標軸で上向きを正とする。 n_a 軸の向きは、座標系 (s_a, n_a, z_a) が右手系になるように定める。

3. 基礎方程式

(1) 連続式とレイノルズ方程式

基礎方程式は、連続式と 3 方向のレイノルズ方程式である。分子粘性応力はレイノルズ応力に比べ小さいとして無視すれば、基礎方程式は以下になる¹⁾。

$$\frac{\partial u_s}{\partial s_a} + \frac{\partial}{\partial n_a} \left\{ \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) u_n \right\} + \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z_a} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$u_s \frac{\partial u_s}{\partial s_a} + \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) u_n \frac{\partial u_s}{\partial n_a} + \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) u_z \frac{\partial u_s}{\partial z_a} - u_s u_n \frac{\partial \theta}{\partial s_a} - g \sin \alpha \cos \theta \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial s_a} - u_s' u_n' \frac{\partial \theta}{\partial s_a} + \frac{\partial}{\partial s_a} (u_s'^2) + \frac{\partial}{\partial n_a} \left[\left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) u_s' u_n' \right] + \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) \frac{\partial}{\partial z_a} (u_s' u_z') = 0 \dots\dots (3)$$

$$u_s \frac{\partial u_n}{\partial s_a} + \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) u_n \frac{\partial u_n}{\partial n_a} + \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) u_z \frac{\partial u_n}{\partial z_a} + u_s^2 \frac{\partial \theta}{\partial s_a} + g \sin \alpha \sin \theta \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) + \frac{1}{\rho} \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) \frac{\partial p_a}{\partial n_a} + u_s'^2 \frac{\partial \theta}{\partial s_a} + \frac{\partial}{\partial s_a} (u_s' u_n') + \frac{\partial}{\partial n_a} \left[\left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) u_n'^2 \right] + \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) \frac{\partial}{\partial z_a} (u_n' u_z') = 0 \dots\dots (4)$$

$$u_s \frac{\partial u_z}{\partial s_a} + \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) u_n \frac{\partial u_z}{\partial n_a} + \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) u_z \frac{\partial u_z}{\partial z_a} + \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) \left(g \cos \alpha + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial z_a} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial s_a} (u_s' u_z') + \frac{\partial}{\partial n_a} \left[\left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) \times u_n' u_z' \right] + \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) \frac{\partial}{\partial z_a} (u_z'^2) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 u_s, u_n, u_z : それぞれ平均流速の s_a, n_a, z_a 方向成分； u_s', u_n', u_z' : それぞれ乱れ速度の s_a, n_a, z_a 方向成分； g : 重力加速度； ρ : 水の密度； p_a : 圧力； $\bar{\quad}$: 平均操作を表わす。

式 (3), (4) 中の $\cos \theta, \sin \theta$ をフーリエ・ベッセル展開すると、次式を得る。

$$\begin{cases} \cos \theta = J_0(\theta_0) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\theta_0) \cos \left(\frac{4m\pi}{L} s_a \right) \\ \sin \theta = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(\theta_0) \cos \left[\frac{2(2m+1)\pi}{L} s_a \right] \end{cases} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 J_m : m 次のベッセル関数である。

(2) レイノルズ応力のモデル化

蛇行水路内の流れにおけるレイノルズ応力の分布については、不明な点が多い。しかし、本論文では解析的な形で解を得ようとするため、渦動粘性係数 ε_{za} を用いてこれを表わすこととする。さらに、平均水深・水路幅比が十分に小さい水路の水路中心線付近を解析対象にすることにして、種々のレイノルズ応力成分のうち $-u_s' u_z'$ と $-u_n' u_z'$ のみを考慮することとする。

$$\begin{cases} -u_s' u_z' = \varepsilon_{za} \frac{\partial u_s}{\partial z_a} \\ -u_n' u_z' = \varepsilon_{za} \frac{\partial u_n}{\partial z_a} \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

Engelund²⁾ は開水路における流速分布が底面付近で対数分布、表面付近で放物線分布によく一致することを示している。そこで、流速分布が 2 次元開水路に対してそれぞれ対数分布、放物線分布になるように ε_{za} の分布形を以下のように定める。

$$\varepsilon_{za} = \begin{cases} \kappa u_* z_a (1 - z_a/H_0) & 0 < z_a \leq H_0/2 \\ \kappa u_* H_0/4 & H_0/2 < z_a \leq H_0 \end{cases} \dots\dots (8)$$

ここに、 κ : カルマン定数 (=0.4)、 u_* : 摩擦速度 (= $\sqrt{g H_0 J_0(\theta_0) \sin \alpha}$)、 H_0 : 平均水深である。

(3) 境界条件

境界条件は、次のとおりとする。

$$\begin{cases} \text{水底} & z_a = \delta_a : u_s = u_n = u_z = 0 \\ \text{水面} & z_a = h_a : p_a = 0, \frac{\partial u_s}{\partial z_a} = \frac{\partial u_n}{\partial z_a} = 0, \\ & \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) u_z = u_s \frac{\partial h_a}{\partial s_a} \dots\dots (9) \\ & + \left(1 - n_a \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) u_n \frac{\partial h_a}{\partial n_a} \\ \text{側壁} & n_a = \pm B_0/2 : u_n = 0 \end{cases}$$

ここに、 δ_a : 仮想底の z_a 座標, h_a : 水深である. δ_a は相当粗度にあたり, 流速が0となる z_a 座標の値であり, 流水の抵抗則より決定され, H_0 に比べ十分に小さい値をとる. δ_a の決定方法については後述する.

また, 水深 h_a は s_a と n_a のみの関数であるから,

$$\frac{\partial h_a}{\partial z_a} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

を基礎方程式に加える.

(4) 基礎方程式と境界条件の無次元表示

次の無次元量を用いて, 方程式の書き直しを行う.

$$\begin{cases} u = u_s/V_0, v = u_n/V_0, w = u_z/V_0, p = p_a/\rho g H_0, \\ h = h_a/H_0, \epsilon_z = \epsilon_{za}/(V_0 H_0^2/R_0), \delta = \delta_a/H_0, \\ s = s_a/R_0, n = n_a/(B_0/2), z = z_a/H_0, \\ \epsilon = (B_0/2)/R_0, \lambda = H_0/(B_0/2), k = 2\pi R_0/L = 1/\theta, \\ F_r = V_0/\sqrt{gH_0} \end{cases} \dots\dots\dots (11)$$

ここで新しく導入された記号は, 以下のとおりである.
 V_0 : 断面平均流速, B_0 : 水路幅, R_0 : 最小曲率半径,
 ϵ : 水路幅・最小曲線半径比の 1/2, λ : 水深・水路幅比の 1/2, k : 無次元蛇行波数, F_r : フルード数

基礎方程式の無次元表示は次のようになる.

$$\epsilon\lambda \frac{\partial u}{\partial s} + \lambda \frac{\partial}{\partial n} \{ (1 + \epsilon n \sin ks)v \} + (1 + \epsilon n \sin ks) \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} \epsilon\lambda u \frac{\partial u}{\partial s} + \lambda(1 + \epsilon n \sin ks)v \frac{\partial u}{\partial n} + (1 + \epsilon n \sin ks)w \frac{\partial u}{\partial z} \\ + \epsilon\lambda uv \sin ks - \frac{1}{F_r^2} (1 + \epsilon n \sin ks) \sin \alpha \cos \theta \\ + \frac{\epsilon\lambda}{F_r^2} \frac{\partial p}{\partial s} - \epsilon\lambda(1 + \epsilon n \sin ks) \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ = 0 \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon\lambda u \frac{\partial v}{\partial s} + \lambda(1 + \epsilon n \sin ks)v \frac{\partial v}{\partial n} + (1 + \epsilon n \sin ks)w \frac{\partial v}{\partial z} \\ - \epsilon\lambda u^2 \sin ks + \frac{1}{F_r^2} (1 + \epsilon n \sin ks) \\ \times \left(\sin \alpha \sin \theta + \lambda \frac{\partial p}{\partial n} \right) - \epsilon\lambda(1 + \epsilon n \sin ks) \\ \times \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon\lambda u \frac{\partial w}{\partial s} + \lambda(1 + \epsilon n \sin ks)v \frac{\partial w}{\partial n} + (1 + \epsilon n \sin ks)w \\ \times \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{F_r^2} (1 + \epsilon n \sin ks) \left(\cos \alpha + \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ - \epsilon^2 \lambda^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \epsilon\lambda^2 \frac{\partial}{\partial n} \left\{ (1 + \epsilon n \sin ks) \right. \\ \left. \times \epsilon_z \frac{\partial v}{\partial z} \right\} = 0 \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

境界条件は無次元形で次のように与えられる.

$$z = \delta : u = v = w = 0 \dots\dots\dots (17)$$

$$z = h : p = 0, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon n \sin ks)w = \epsilon\lambda u \frac{\partial h}{\partial s} \\ + \lambda(1 + \epsilon n \sin ks)v \frac{\partial h}{\partial n} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$n = \pm 1 : v = 0 \dots\dots\dots (19)$$

(5) 簡単化の基本的考え方

基礎方程式 (12)~(16) を境界条件式 (17)~(19) のもとで直接解くことは, 非線形性のために困難である. そこで, 基礎方程式および境界条件式においてオーダーの小さい項を無視し, 方程式の簡略化を行う.

まず, u, v, w, p, h の各変数を, 単位湾曲内での横断および縦断方向に平均した結果得られる量 (添字 0 を付す) と 3次元性を含む偏差 (添字 1 を付す) とに分解する. 同時に各変数のオーダーを従来の実験結果より, 以下のように評価する (Yen²⁾ 参照).

$$\begin{cases} u(s, n, z) = U_0(z) + \lambda u_1(s, n, z) \\ v(s, n, z) = \epsilon\lambda v_1(s, n, z) \\ w(s, n, z) = \epsilon\lambda^2 w_1(s, n, z) \dots\dots\dots (20) \\ p(s, n, z) = P_0(z) + \lambda p_1(s, n, z) \\ h(s, n) = 1 + \lambda h_1(s, n) \end{cases}$$

次に式 (20) を基礎方程式 (12)~(16) および境界条件式 (17)~(19) に代入する. そして, 各式において添字 1 が付された 3次元的な偏差量の非線形項を無視すると, 基礎方程式と境界条件式は以下のように簡略化される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial s} + (1 + \epsilon n \sin ks) \frac{\partial v_1}{\partial n} + \epsilon \sin ks \cdot v_1 \\ + (1 + \epsilon n \sin ks) \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon\lambda^2 U_0 \frac{\partial u_1}{\partial s} + \epsilon\lambda^2 (1 + \epsilon n \sin ks) \frac{dU_0}{dz} w_1 \\ + \epsilon^2 \lambda^2 U_0 v_1 \sin ks - \frac{1}{F_r^2} (1 + \epsilon n \sin ks) \\ \times \sin \alpha \cos \theta + \frac{\epsilon\lambda^2}{F_r^2} \frac{\partial p_1}{\partial s} - \epsilon\lambda (1 + \epsilon n \sin ks) \\ \times \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \epsilon_z \frac{\partial}{\partial z} (U_0 + \lambda u_1) \right\} = 0 \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \lambda^2 U_0 \frac{\partial v_1}{\partial s} - \epsilon\lambda (U_0^2 + 2\lambda U_0 u_1) \sin ks \\ + \frac{1}{F_r^2} (1 + \epsilon n \sin ks) \left(\sin \alpha \sin \theta + \lambda^2 \frac{\partial p_1}{\partial n} \right) \\ - \epsilon^2 \lambda^2 (1 + \epsilon n \sin ks) \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) = 0 \dots\dots (23) \end{aligned}$$

$$\epsilon^2 \lambda^3 U_0 \frac{\partial w_1}{\partial s} + \frac{1}{F_r^2} (1 + \epsilon n \sin ks)$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial z} (P_0 + \lambda p_1) \right\} - \varepsilon^2 \lambda^3 \frac{\partial}{\partial s} \left(\varepsilon_z \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \\ & - \varepsilon^2 \lambda^3 \frac{\partial}{\partial n} \left\{ (1 + \varepsilon n \sin ks) \varepsilon_z \frac{\partial v_1}{\partial z} \right\} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$z = \delta : U_0 + \lambda u_1 = v_1 = w_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$z = 1 + \lambda h_1 : \begin{cases} P_0 + \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (U_0 + \lambda u_1) = \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0 \\ (1 + \varepsilon n \sin ks) w_1 = U_0 \frac{\partial h_1}{\partial s} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$n = \pm 1 : v_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

なお、オーダーの評価の際には、 $\lambda < \varepsilon$ を仮定した。

式 (24) において、左辺第 1, 3, 4 項は第 2 項に比べ $\varepsilon^2 \lambda^3$ のオーダーの項であるのでこれを無視する。すなわち、

$$\cos \alpha + \frac{\partial}{\partial z} (P_0 + \lambda p_1) = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

境界条件式 (27)₁ のもとで式 (29) を解けば、次式で示される静水圧分布を得る。

$$P_0 = \cos \alpha (1 - z), \quad p_1 = h_1 \cos \alpha \quad \dots\dots\dots (30)$$

この圧力分布を用いると基礎方程式に対する最終的な形は以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} L_1(u_1, v_1, w_1; s, n, z) \\ = \frac{\partial u_1}{\partial s} + (1 + \varepsilon n \sin ks) \frac{\partial v_1}{\partial n} + \varepsilon \sin ks \cdot v_1 \\ + (1 + \varepsilon n \sin ks) \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(U_0, u_1, v_1, w_1, h_1; s, n, z) \\ = \varepsilon \lambda^2 U_0 \frac{\partial u_1}{\partial s} + \varepsilon \lambda^2 (1 + \varepsilon n \sin ks) \frac{dU_0}{dz} w_1 \\ + \varepsilon^2 \lambda^2 U_0 v_1 \sin ks - \frac{1}{F_r^2} (1 + \varepsilon n \sin ks) \\ \times \sin \alpha \cos \theta + \frac{\varepsilon \lambda^2}{F_r^2} \cos \alpha \frac{\partial h_1}{\partial s} - \varepsilon \lambda \\ \times (1 + \varepsilon n \sin ks) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \varepsilon_z \frac{\partial}{\partial z} (U_0 + \lambda u_1) \right\} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$\begin{aligned} L_3(U_0, u_1, v_1, h_1; s, n, z) \\ = \varepsilon^2 \lambda^2 U_0 \frac{\partial v_1}{\partial s} - \varepsilon \lambda (U_0^2 + 2 \lambda U_0 u_1) \sin ks + \frac{1}{F_r^2} \\ \times (1 + \varepsilon n \sin ks) \left(\sin \alpha \sin \theta + \lambda^2 \cos \alpha \frac{\partial h_1}{\partial n} \right) \\ - \varepsilon^2 \lambda^2 (1 + \varepsilon n \sin ks) \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_z \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$L_4(h_1; s, n, z) = \frac{\partial h_1}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (34)$$

境界条件は、次のように示される。

$$z = \delta : B_1(U_0, u_1; s, n) = U_0 + \lambda u_1 = 0 \quad \dots\dots (35)$$

$$B_2(v_1; s, n) = v_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$B_3(w_1; s, n) = w_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$z = 1 : B_4(U_0, u_1; s, n) = \frac{\partial (U_0 + \lambda u_1)}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$B_5(v_1; s, n) = \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$\begin{aligned} B_6(U_0, w_1, h_1; s, n) \\ = (1 + \varepsilon n \sin ks) w_1 - U_0 \frac{\partial h_1}{\partial s} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$n = \pm 1 : B_7(v_1; s, n) = v_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (41)$$

なお、境界条件式 (38)~(40) は、正確には $z = 1 + \lambda h_1$ で成立する条件であるが水面変動は微小であると考え、境界条件を与える位置を $z = 1$ で近似する。

4. 重み付き残差法と数値積分法による解析

簡略化された基礎方程式 (31)~(34) および境界条件式 (35)~(41) を重み付き残差法と数値積分法を組み合わせた方法で解析を進める。

はじめに、試行関数として次の形を選ぶ。ここで、流れ方向、横断方向の関数形は完全直交系から選ぶこととし、フーリエ展開、ルジャンドル多項式を考慮した。

$$\left\{ \begin{aligned} U_0^T &= U_{00}(z) \\ u_1^T &= n \{ u_{1s}(z) \sin ks + u_{1c}(z) \cos ks \} \\ &\quad + (n^2 - 1/3) \{ u_{20}(z) + u_{2s}(z) \sin 2ks \\ &\quad + u_{2c}(z) \cos 2ks \} \\ v_1^T &= (1 - n^2) \{ v_{1s}(z) \sin ks + v_{1c}(z) \cos ks \} \\ &\quad + n(1 - n^2) \{ v_{20}(z) + v_{2s}(z) \sin 2ks \\ &\quad + v_{2c}(z) \cos 2ks \} \\ w_1^T &= n \{ w_{1s}(z) \sin ks + w_{1c}(z) \cos ks \} \\ &\quad + (n^2 - 1/3) \{ w_{20}(z) + w_{2s}(z) \sin 2ks \\ &\quad + w_{2c}(z) \cos 2ks \} \\ h_1^T &= n \{ h_{1s} \sin ks + h_{1c} \cos ks \} \\ &\quad + (n^2 - 1/3) \{ h_{20} + h_{2s} \sin 2ks \\ &\quad + h_{2c} \cos 2ks \} \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (42)$$

この試行関数は、境界条件式 (41) を自動的に満足する。

重み関数としては、式 (32), (35), (38) に対し、 $1, n \sin ks, n \cos ks, n^2 - 1/3, (n^2 - 1/3) \sin 2ks, (n^2 - 1/3) \cos 2ks$ を選び、

式 (31), (34), (37), (40) に対し、 $n \sin ks, n \cos ks, n^2 - 1/3, (n^2 - 1/3) \sin 2ks, (n^2 - 1/3) \cos 2ks$ を選び、

式 (33), (36), (39) に対し,

$$(1-n^2)\sin ks, (1-n^2)\cos ks, n(1-n^2), \\ n(1-n^2)\sin 2ks, n(1-n^2)\cos 2ks \text{ を選ぶ.}$$

これらの試行関数と重み関数を用いて、重み付き残差法の原理により残差を $s-n$ 平面内に分布させると、試行関数中の未定関数を決定する連立常微分方程式と境界条件式を得る。

式 (31) に関しては、 $L_1(u_1^T, v_1^T, w_1^T; s, n, z)$ に各重み関数を乗じて s に関して 0 から $2\pi/k$ まで、 n に関して -1 から 1 まで積分する。これより、

$$\begin{cases} -15ku_{1c} - 30v_{1s} - 18\varepsilon v_{20} + 9\varepsilon v_{2c} + 15w_{1s}' \\ + 4\varepsilon w_{20}' - 2\varepsilon w_{2c}' = 0 \\ 15ku_{1s} - 30v_{1c} - 9\varepsilon v_{2s} + 15w_{1c}' + 2\varepsilon w_{2c}' = 0 \\ -6v_{20} - 3\varepsilon v_{1s} + 2w_{20}' + \varepsilon w_{1s}' = 0 \\ -4ku_{2c} - 6v_{2s} - 3\varepsilon v_{1c} + 2w_{2s}' + \varepsilon w_{1c}' = 0 \\ 4ku_{2s} - 6v_{2c} + 3\varepsilon v_{1s} + 2w_{2c}' - \varepsilon w_{1s}' = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(43)$$

を得る。ここに ' は z に関する微分を表わす。以下、 L_2, L_3, L_4 (式 (32), (33), (34)) に対しても同様な操作を行う。

境界条件は次式となる。

$$z = \delta : U_{00} = u_{1s} = u_{1c} = u_{20} = u_{2s} = u_{2c} = 0 \dots\dots(44)$$

$$v_{1s} = v_{1c} = v_{20} = v_{2s} = v_{2c} = 0 \dots\dots\dots(45)$$

$$w_{1s} = w_{1c} = w_{20} = w_{2s} = w_{2c} = 0 \dots\dots\dots(46)$$

$$z = 1 : U_{00}' = u_{1s}' = u_{1c}' = u_{20}' = u_{2s}' = u_{2c}' = 0 \dots\dots\dots(47)$$

$$v_{1s}' = v_{1c}' = v_{20}' = v_{2s}' = v_{2c}' = 0 \dots\dots\dots(48)$$

$$\begin{cases} 15w_{1s} + 4\varepsilon w_{20} - 2\varepsilon w_{2c} + 15kU_{00}h_{1c} = 0 \\ 15w_{1c} + 2\varepsilon w_{2s} - 15kU_{00}h_{1s} = 0 \\ 2w_{20} + \varepsilon w_{1s} = 0 \\ 2w_{2s} + \varepsilon w_{1c} + 4kU_{00}h_{2c} = 0 \\ 2w_{2c} - \varepsilon w_{1s} - 4kU_{00}h_{2s} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(49)$$

式 (43) および同様に L_2, L_3, L_4 に対して得られる非線形連立常微分方程式を境界条件式 (44)~(49) のもとに、数値積分することによって未定関数を決定した。

その際、 δ の値を知ることが必要である。本解析においては、勾配、平均水深、平均流速を既知として解析を進めてきた。 δ の値はこれらの値から、次式により定める。

$$V_0 B_0 H_0 = \int_{\delta_a}^{H_0} \int_{-B_0/2}^{B_0/2} u_s dn_a dz_a \dots\dots\dots(50)$$

無次元形で示せば、次式となる。

$$1 = \int_{\delta}^1 \int_{-1}^1 u dn dz \dots\dots\dots(51)$$

5. で計算した例では $\delta \approx 10^{-3} \sim 10^{-4}$ となり、3.(3) で仮定したように、 δ_a は水深に比べ、十分小さな値をとる。

なお計算には東京大学大型計算機センター M200H あるいは M280H を用いた。計算時間は2分程度であった。

5. 解析結果と実験結果との比較

(1) 実験水路の幾何形状

得られた解の有効性・適用限界を調べるために、Yen²⁾、および玉井・池内・山崎⁴⁾の実験結果と計算結果とを比較する。これらの実験水路の中心線は、いずれも中心角 90° の円弧とその半径の 1/2 の長さの直線とから成っている (図-2, 7 参照)。これらの水路中心線は sine-generated curve に類似していることが示されており¹²⁾、これらの実験結果は、sine-generated curve を中心線にもつ水路に対して得られた理論解の検証データとして有効であると考えられる。

(2) Yen の実験結果との比較

Yen²⁾ の実験水路の概要を 図-2 に示す。Yen の実験水路は台形であるが、ここでは同じ水深と流水断面積をもつ矩形断面水路として計算した。計算は Yen の実験のケース 4 に対して行った。計算条件を表-1 に示す。

計算結果を 図-3~6 に示す。まず 図-3 に示した水面形に関しては、計算結果と実験結果とは良好に一致する。次に、 図-4 に示した主流流速分布に関しては、計算

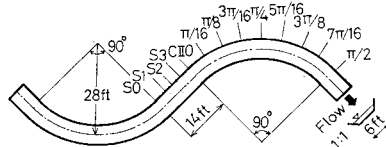


図-2 Yen の実験水路

表-1 Yen の水路に対する計算条件

H_0	15.6 cm	θ_0	$\pi/4$
B_0	198.6 cm	α	0.00084
L	3532.8 cm	V_0	69.1 cm/s

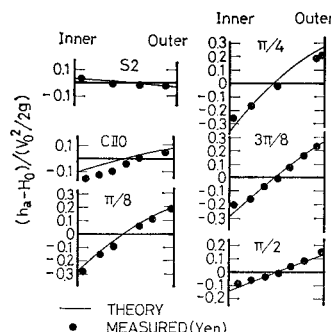


図-3 水面形

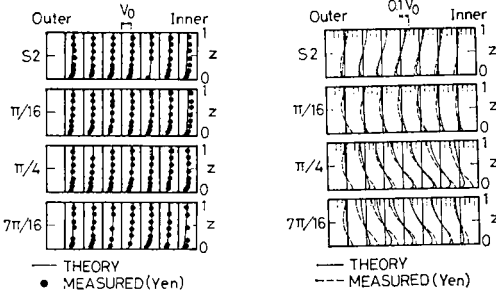
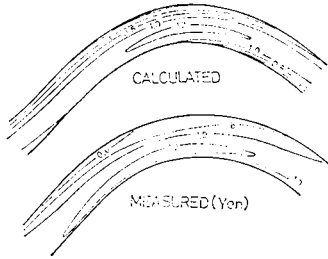


図-4 主流速分布

図-5 2次流速分布



(τ/τ_0 , τ : せん断応力, τ_0 : 平均せん断応力)

図-6 せん断応力分布

結果と実験結果とは、側壁付近を除いて、よく一致している。さらに図-5に示した2次流速分布に関しては、計算結果は実験結果に比べてやや小さめの値を与えるが、全体のパターンをよく表現している。また、図-6に示したせん断応力(τ)に関しても、パターンをよく表現している。このように、本解析方法による計算結果は、Yenの実験結果に対しては良好な一致を示す。

(3) 玉井・池内・山崎の実験結果との比較

図-7に示す水路で行われた玉井ら⁴⁾の実験に対して

表-2 玉井らの水路に対する計算条件

H_0	2.93 cm	θ_0	0.248
B_0	30.0 cm	α	0.001 2
L	248.5 cm	V_0	22.3 cm

は、表-2の条件で計算を行った。

計算結果を図-8~10に示す。まず、図-8に示した水面形状に関しては、解析結果と実験結果とはきわめてよい一致を示す。次に、図-9に示した主流速分布に関しては、各測線における値の平均的な大きさについては、解析結果はかなりよい予測値を与えるが分布形については十分でない。特に実験値については、流速の最大値が水深中央付近に出現する地点が多いが、計算結果ではこの分布形がみられない。さらに、図-10に示した2次流に関しては、パターンの変化の位相が実験結果と解析結果とではずれている。特に連続した湾曲の変曲点付近で河川での実測でもみられる¹⁸⁾2重のセルパターンを解析結果は一部を除き表現できない。以上のように、玉井らの実験結果に関しては、解析結果は水面形状に対しては良好な一致を示すが、流速分布に関しては必ずしも十分でない。

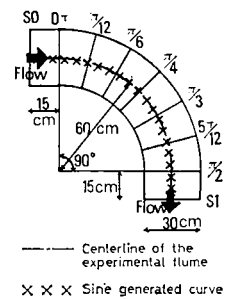


図-7 玉井らの実験水路

この不一致はおもに次の3つの原因によるものであると考える。1) 玉井らの実験水路は Yenの実験水路に比べて水深・水路幅比が大きい。そのため本解析では無視している側壁の存在が水路内の流況に、より大きな影響を与えている。2) 本解析に用いた試行関数の項数が十分ではない。3) 玉井らの実験のレイノルズ数は約

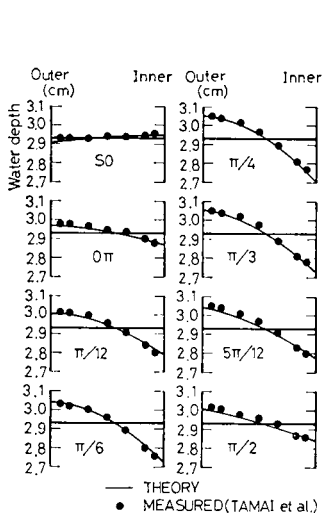


図-8 水面形

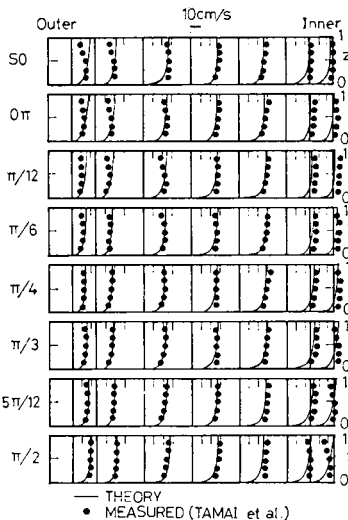


図-9 主流速分布

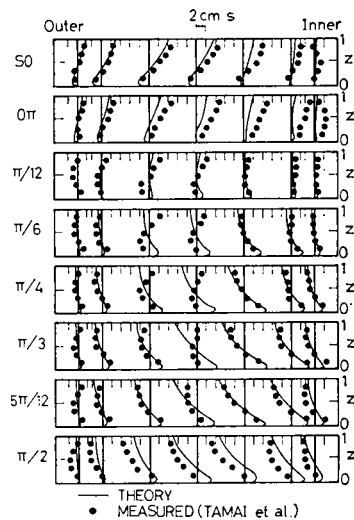


図-10 2次流速分布

6 000 であり、流れを完全発達した乱流と考えるには小さい。上述の原因により、本論文で用いた渦動粘性係数の分布が十分に当てはまらなかったり、無視されている要因が関与したものと思われる。

6. 結 論

本研究においては、平岡固定床蛇行水路における3次元流れの解析を行った。連続式と3方向のレイノルズ方程式を基礎方程式に、重み付き残差法と数値積分法を組み合わせた方法により解を得た。その結果、従来の実験や観測により報告されている3次元流況のいくつかの性質が理論的に示されると同時に、定量的にも比較的良好な精度をもった値を得ることができた。本研究における解析法は、水深・水路幅比の小さな流れの水路中心線付近の流れの予測には有効なものであることがわかった。

参 考 文 献

- 1) Chacinski, T.M.P.: Patterns of motion in open-channels bends, *Int. Assoc. Sci. Hydrol.*, Pub. No. 38, pp. 311~318, 1954.
- 2) Yen, B.C.: Characteristics of subcritical flow in a meandering channel, *Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa*, 77 p., 1965.
- 3) 木下良作: 緩流部河道の水流蛇行相似に関する検討業務報告書——三次元流に関する実験的研究——, 石狩川開発建設部, 164 p., 1981.
- 4) 玉井信行・池内幸司・山崎 晶: 連続わん曲水路における流れの実験的研究, *土木学会論文報告集*, 第331号, pp. 83~94, 1983.
- 5) Yen, C.L.: Bed topography effect on flow in a meander, *Proc. ASCE*, Vol. 96, HY 1, pp. 57~73, 1970.
- 6) Hooke, R.L.: Shear-stress and sediment distribution in a meander bend, *UNGI-report 30*, Dep. of Physical Geography, Univ. of Uppsala, 58 p., 1974.
- 7) Engelund, F.: Flow and bed topography in channel bends, *Proc. ASCE*, Vol. 100, HY 11, pp. 1631~1648, 1974.
- 8) 森 明巨・岸 力: 河道弯曲部の河床形に関する研究, 第26回水理講演会論文集, pp. 63~68, 1982.
- 9) 池田駿介・日野幹雄・吉川秀夫: 河川の自由蛇行に関する理論的研究, *土木学会論文報告集*, 第255号, pp. 63~73, 1976.
- 10) Hasegawa, K. and I. Yamaoka: The effect of plane and bed forms of channels upon the meander development, *Proc. JSCE*, No. 296, 143~152, 1980.
- 11) 池田駿介・G. Parker・沢井健二: 河川の蛇行に関する統一見解, 第24回水理講演会論文集, pp. 339~349, 1980.
- 12) 池内幸司・玉井信行: 蛇行水路における水深平均流れ場の遷移特性, *土木学会論文報告集*, 第334号, pp. 89~101, 1983.
- 13) Leschziner, M.A. and W. Rodi: Calculation of strongly curved open channel flow, *Proc. ASCE*, Vol. 105, HY 10, pp. 1297~1314, 1979.
- 14) Gottlieb, L.: Three-dimensional flow pattern and bed topography in meandering channels, *Series Paper 11*, Inst. of Hydrodynamics and Hydraulics Engineering, Technical Univ. of Denmark, 1976.
- 15) 玉井信行・池谷 毅: 蛇行河道内の流れの3次元解析, 第27回水理講演会論文集, pp. 91~96, 1983.
- 16) Langbein, W.B. and L.B. Leopold: River meanders—Theory of minimum variance—, *U.S.G.S. Prof. paper 422-H*, 15 p., 1966.
- 17) たとえば, 玉井信行: 連続体の力学, *土木工学体系 7*, 彰国社, pp. 71~74, 1979.
- 18) Thorne, C.R. and R.D. Hey: Direct measurements of secondary currents at a river inflection point, *Nature*, Vol. 280, 19, pp. 226~228, 1979.

(1983.6.28・受付)