

## 中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究

REGIME CRITERIA ON BARS AND BRAIDS IN ALLUVIAL  
STRAIGHT CHANNELS

黒木 幹 男\*・岸 力\*\*

By Mikio KUROKI and Tsutomu KISHI

## 1. はじめに

移動床流路では流れの水理学的条件や流路の幾何学的条件に応じて各種の河床波が形成されるが、中規模河床形態に属する河床波は直線流路においてさえ水流の蛇行を伴うという意味で、河川工学上の諸問題と密接な関連を有している。

流れの蛇行をもたらす中規模河床形態の形成は、河岸を侵食し流路そのものを蛇行させるひきがねとなる。流路の蛇行そのものは適当な人為的制御が可能な範囲では河川工学上のメリットも多く見出されるが、制御を失すれば直接災害に結びつき、河川工学上の観点からはその利害得失を十分に検討しなくてはならないであろう。その際、与えられた水理学的・幾何学的条件で中規模河床形態が形成されるか否か、換言すれば水流の蛇行が生じるか否かが重要な指標になる。

また中規模河床形態は単列砂洲河床と複列砂洲河床に大別される。単列砂洲河床の場合には、低水時の流れは低水路内を蛇行しつつも一本の流路を維持できる場合が多い。これに対して複列砂洲河床の場合は網流化し流路の維持が困難であり河川利用上の不便が多い。さらに単列砂洲河床の場合、出水時の挙動は比較的単純であり護岸・水制などの制御対策も立てやすいのに対し、複列砂洲河床の場合には、多くの急流河川にその例がみられるように制御が困難な場合が多い。したがって、利水・治水の両面から単列砂洲河床と複列砂洲河床の形成限界を明らかにすることが望まれている。

中規模河床形態の形成領域や単・複列砂洲河床の形成限界を明らかにしようとする試みはこれまでも多くの研究が行われてきたが、大別すれば2つの方法に分類できよう。1つは現象に関するパラメーターを次元解析

的に整理抽出し、現象論的に領域の区分をしようとする方法である。他の1つは、河床面に3次元の微小擾乱を与え現象の支配方程式を解析的に解くことによって擾乱の不安定領域を求め、河床の不安定問題として中規模河床形態の発生を論じようとする立場である。

この2つの立場からのアプローチは、相互にフィードバックし合って問題の解決に進むべきであるが、現状では必ずしも十分なフィードバックが行われているとはいいがたい。これは不安定解析の多くが、従属変量である擾乱の2つの波数を残した形式で不安定領域を論じていることが主要な原因であり、波数と水量・河道特性量との関係を明らかにすることが望まれてきた。

不安定解析に課せられた問題解決の手掛りは Englund および Skovgaard<sup>1)</sup> によって示された。彼らは擾乱の増幅率を比較することで、単・複列砂洲河床の形成限界が解析的に求められる可能性のあることを示唆した。しかし具体的な解析は行われていない。

著者ら<sup>2)~3)</sup>はこの指摘の可能性に着目して解析的な検討を行い、フルード数  $F_r$  と河幅・水深比  $B/H_0$  をパラメーターとして中規模河床形態の領域区分図を提案した。しかしこの解析では流れをポテンシャル流れで表現したため、河床と流砂量の間には存在する位相差を人為的に与えなくてはならず、問題点として残っていた。

Fredsoe<sup>4)</sup> は流れを2次元浅水流として解析を行い、無次元掃流力  $\tau_{*0}$ 、 $B/H_0$  および水深・粒径比  $H_0/d$  をパラメーターとして領域区分図を提案している。流れを2次元浅水流として表現した解析には、林・尾崎の一連の研究<sup>5)~7)</sup>を始めとして多くの例があるが、河床せん断力・流砂量の表現式を通じて、河床形状との間の位相差が基礎方程式から誘導することができて、位相差の物理的意味を明瞭にできる利点がある。Fredsoe の解析では流砂量を掃流砂と浮遊砂に分けて評価し、浮遊砂の効果が解析結果に顕著に反映されている点が特徴である。しかしその物理的機構は明確な形で示されていない。ま

\* 正会員 工修 北海道大学助手 工学部

\*\* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部

た区分図の両軸には  $\tau_{*0}$  と  $B/H$  がとられているが、第3の変量  $H/d$  が形成領域区分に与える影響については検討が行われていない。

本研究では流れを2次元浅水流で表わし、位相差を規定する河床せん断力・流砂量の表現式を吟味して理論的改良を計るとともに、不安定解析により中規模河床形態の領域区分の検討を行った。

まず基礎方程式の誘導にあたって、掃流砂が卓越する領域を対象とし、横断方向に傾いた平面上での砂粒運動を解析的に求め流砂および河床せん断力と流向との関係の評価するとともに、局所流砂量式に砂粒の移動距離の影響を導入し理論的改良をはかった。掃流砂を対象としたのは浅水流理論に浮遊砂を考慮しても理論的正確さが期待したいことと、測定資料の整っている水路実験の規模では浮遊砂の影響は無視し得ると考えたためである。

次に不安定解析により中規模河床形態の形成限界および単・複列砂洲の形成限界について検討を行った。形成限界は3つの無次元変量の組合せで表現できることを示し、この中の2つを区分図の両軸にとって形成限界を求めるとともに、第3の変量の影響についても検討を行った。

最後に基礎方程式に内在する河床形状・河床せん断力および流砂量間の位相差を解析的に求め、中規模河床形態の発生機構との関連を明らかにするとともに、林・尾崎および Fredsøe の理論と比較検討を行った。

2. 基礎方程式

(1) 基礎方程式とその無次元線形化

両側壁が鉛直で直線であるような移動床広矩形水路の流れを考える。河床材料は非粘着性で、河床のみが流れ

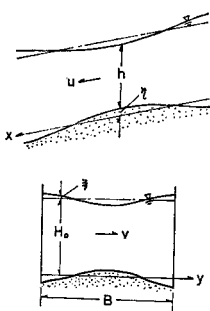


Fig. 1 System of coordinates.

によって変形を受けるものとする。河床の変形速度は、流れ自体の変形速度に比較して十分に遅いものとし、流れは擬似定常流として取り扱い得るものとする。

Fig. 1 のように座標系をとる。河幅に比較して水深は十分に浅いものとして、 $x, y$  方向の流れの運動方程式および流れと流砂の連続式はそれぞれ以下のように表わすことができる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = gI_0 - \frac{\tau_x}{\rho h} - g \frac{\partial}{\partial x} (h + \eta) \dots (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\tau_y}{\rho h} - g \frac{\partial}{\partial y} (h + \eta) \dots (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (uh) + \frac{\partial}{\partial y} (vh) = 0 \dots (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1-n} \left( \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{By}}{\partial y} \right) = 0 \dots (4)$$

ただし、 $u, v$  は  $x, y$  方向の平均流速、 $h$  は局所水深、 $\eta$  は河床の局所変位量、 $\tau_x, \tau_y$  は  $x, y$  方向の河床せん断力、 $q_{Bx}, q_{By}$  は  $x, y$  方向の流砂量、 $I_0$  は平均河床勾配、 $n$  は空隙率および  $g$  は重力加速度である。

次に、各変量を平坦河床上の等流（基本流）に対応する平均量と、河床の微小な擾乱に対応する変動量に分けて式 (5) のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} u &= U_0(1 + \tilde{u}), v = U_0 \cdot \tilde{v} \\ \tau_x &= \tau_{b0}(1 + \tilde{\tau}_x), \tau_y = \tau_{b0} \cdot \tilde{\tau}_y \\ h &= H_0(1 + \tilde{\xi} - \tilde{\eta}), \eta = H_0 \cdot \tilde{\eta}, \tilde{\xi} = H_0 \cdot \tilde{\xi} \\ q_{Bx} &= q_{B0}(1 + \tilde{q}_{Bx}), q_{By} = q_{B0} \cdot \tilde{q}_{By} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

ただし、平均量には添字 0 を付し、無次元変動量は記号の上に波型を付して区別した。また、 $\xi$  は水面変位量である。

式 (5) の関係を式 (1), (2), (3) および (4) に代入し線形化および無次元化を行うと次式を得る。

$$F_r^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{x}} + I_0(\tilde{\eta} - \tilde{\xi} + \tilde{\tau}_x) = 0 \dots (6)$$

$$F_r^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{y}} + I_0 \tilde{\tau}_y = 0 \dots (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} = 0 \dots (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} + A_s \left( \frac{\partial \tilde{q}_{Bx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{q}_{By}}{\partial \tilde{y}} \right) = 0 \dots (9)$$

ここに、 $\tilde{x} = x/H_0, \tilde{y} = y/H_0, \tilde{t} = tU_0/H_0,$

$$F_r^2 = U_0^2 / (gH_0), A_s = q_{B0} \{ (1-n)U_0H_0 \}.$$

式 (6), (7), (8) および (9) の中の未知量は  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\tau}_x, \tilde{\tau}_y, \tilde{q}_{Bx}, \tilde{q}_{By}$  の 8 個であり系を閉じるためにはこれらの量に関する関係式がさらに 4 本必要である。これらについては項を改めて以下に記す。

(2) 流れの抵抗則

第 1 の関係式は  $\tilde{\tau}_x$  に関するもので流れの抵抗則より導かれる。著者ら<sup>8)</sup> が単列砂洲河床について水路実験の資料を整理した結果では、平坦床の場合とほぼ同様の抵抗特性を示し形状抵抗に起因する顕著な抵抗増加は認められなかった。したがって流れの抵抗は主として水深粒径比に依存し、 $u/u_* = \varphi(h/d)$  と書ける。これを河床せん断力に関する表現式に変形し式 (5) の関係を代入すると

$$\frac{\tau_{b0}}{\rho} \sqrt{(1 + \tilde{\tau}_x)^2 + \tilde{\tau}_y^2} = \left\{ \frac{U_0 \sqrt{(1 + \tilde{u})^2 + \tilde{v}^2}}{\varphi \left( \frac{H_0}{d} [1 + \tilde{\xi} - \tilde{\eta}] \right)} \right\}^2$$

上式を線形化し、基本流では  $\tau_{b0}/\rho = [U_0/\varphi(H_0/d)]^2$  であることに注意すると次式を得る。

$$\tilde{\tau}_x = \alpha_1 \tilde{u} - \alpha_2 (\tilde{\xi} - \tilde{\eta}) \dots\dots\dots(10)$$

ここに、

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \frac{2H_0/d}{\varphi(H_0/d)} \cdot \frac{d\varphi}{dh} \Big|_{h=H_0}$$

本解析では平坦床の抵抗則として Manning-Strickler 型の表現を用いることにして、

$$\varphi = 6.9 \left( \frac{h}{d} \right)^{1/6} \dots\dots\dots(11)$$

と与えた。この場合には  $\alpha_2 = 1/3$  となる。

(3) 斜面上の砂粒運動

$\tilde{\tau}_y, \tilde{q}_{By}$  に関する2つの関係式が  $y$  方向に傾斜した一様斜面上の砂粒の定常運動を解析することにより導かれる。河床の傾きは場所的に変化するが砂洲を対象とするとその波長は砂粒の移動距離と比較して十分に長く、近似的には一様斜面とみなし得る。また側岸侵食機構に関連して一様斜面上の砂粒の非定常運動に取り扱った長谷川ら<sup>9)</sup>の研究によれば、運動開始とともに急速に定常状態に達することが示されている。これをふまえて本解析では砂粒運動を近似的に定常とし必要な関係式の誘導を行った。

斜面上では流れ、砂粒の運動および砂粒に作用する抗力の方向は一般的には一致しない。抗力、砂粒の運動がそれぞれ  $x$  軸となす角を  $\tau, \phi$  とすると、

$$\tan \tau = \frac{\tau_y}{\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}} \simeq \tilde{\tau}_y$$

$$\tan \phi = \frac{q_{By}}{\sqrt{q_{Bx}^2 + q_{By}^2}} \simeq \tilde{q}_{By}$$

なる関係がある。したがって斜面上の砂粒の運動式から  $\tau, \phi$  を決めればよい。繁雑さを避けるため詳細は付録に示すことにして結果のみ記すと次のようになる。

$$\tilde{\tau}_y = \tilde{v} + \alpha_3 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{y}}, \alpha_3 = \frac{3}{2} \frac{\phi(\tau_{*0})}{\mu \varphi(H_0/d) \cdot \sqrt{\tau_{*0}}} \dots\dots\dots(12)$$

$$\tilde{q}_{By} = \tilde{v} - \alpha_4 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{y}}, \alpha_4 = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_{*0}} \frac{\mu}{\mu_c}} \dots\dots\dots(13)$$

ここに、 $\mu_c, \mu$  はそれぞれ静止、動摩擦係数であり  $\mu_c = 0.8, \mu = 0.5$  とした。 $\tau_{*0} = \tau_{b0}/(\rho sgd)$  は無次元掃流力、 $\tau_{*c} = \tau_{*c}/(\rho sgd)$  は無次元限界掃流力で近似的に  $\tau_{*c} \simeq 0.05$  とした。 $s = (\rho_s - l)/\rho$  は砂粒の水中比重、 $\phi(\tau_{*0})$  は流砂関数であり、以後の解析では  $\phi = 8(\tau_{*0} - \tau_{*c})^{1.5}$  とした。

(4) 流砂量式と遅れ距離

第4の関係式が流砂量式より導かれる。一般に河床上の任意点の砂粒運動は砂粒が運動を開始した地点からそ

こに至る間の水理量に依存する。したがって流砂量もその地点の水理量だけでは決定されず、そこに至るまでの個々の砂粒運動の履歴を考慮して水理量と関係づけることが必要になる。しかし掃流運動に限っても、多様な運動形態や場の不均一性のため立式は容易でない。このため“遅れ距離”  $\delta$  の概念<sup>10)</sup>が導入され局所流砂量を次式のように表わす。

$$\frac{q_B(x)}{\sqrt{sgd^3}} = \phi\{\tau_{*}(x-\delta)\} \dots\dots\dots(14)$$

等流では水理量が場所的に変化しないから  $\delta$  の存在が表面には現われず、 $q_{B0}/\sqrt{sgd^3} = \phi(\tau_{*0})$  となるが本解析で対象とするような場所的に水理量に変化する場では  $\delta$  の役割を適切に評価する必要がある。式(14)に式(5)の関係を代入して整理すると次式を得る。

$$\tilde{q}_{Bx}(\tilde{x}) = \alpha_5 \tilde{\tau}_x(\tilde{x} - \tilde{\delta}) \dots\dots\dots(15)$$

ここに、 $\tilde{\delta} = \delta/H_0$  は無次元遅れ距離、

$$\alpha_5 = \frac{\tau_{*0}}{\phi(\tau_{*0})} \frac{d\phi}{d\tau_{*}} \Big|_{\tau_{*}=\tau_{*0}}$$

林・尾崎<sup>11)</sup>によれば本解析で対象とする流れ場では  $\delta$  は砂粒の平均移動距離に近似的に等しい。 $\delta$  と  $\lambda$  の関係について現状では必ずしも評価が定まっているとはいえないようであるが、ひとまず  $\delta \simeq \lambda$  とし解析を進めることにした。 $\lambda$  についても理論的検討もなされているが水理量の広い範囲にわたって適用できるものはないようである。ここではこれまでの実験値に比較的良好に適合する Einstein<sup>12)</sup> による半理論式

$$\lambda = 100 d \{1 - \exp(-0.391/\tau_{*0})\}^{-1}; \tau_{*0} > \tau_{*c} \dots\dots\dots(16)$$

を用いることにした。

3. 河床の不安定解析

河床に次式のような二重調和関数で表わされる微小な擾乱を与える。

$$\tilde{\eta} = \hat{\eta} \cdot \cos(l\tilde{y}) \cdot \exp\{ik(\tilde{x} - c\tilde{t})\} \dots\dots\dots(17)$$

ただし、 $\hat{\eta}$  は擾乱の振幅であり実数、 $c = C_r + iC_i$  は無次元複素移動速度、 $k, l$  は  $\tilde{x}, \tilde{y}$  方向の波数であり次式で定義される。

$$k = \frac{2\pi H_0}{2L}, l = \frac{m\pi H_0}{B} \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 $L$  は砂洲長、 $B$  は水路幅、 $m$  は  $\tilde{y}$  方向の分割数であり、 $m=1$  は単列砂洲河床、 $m \geq 2$  は複列砂洲河床に対応する。

式(17)の式形から明らかなように、擾乱の振幅は

$$kC_i \begin{cases} > 0 \text{ 時間とともに増大する (不安定)} \\ = 0 \text{ 時間とともに変化せず (中立)} \\ < 0 \text{ 時間とともに減衰する (安定)}. \end{cases}$$

式(17)のように河床の擾乱を与えると、それによっ

て誘起される変動量は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{\xi}, \tilde{u}, \tilde{\tau}_x, \tilde{q}_{Bx}) &= (\hat{\xi}, \hat{u}, \hat{\tau}_x, \hat{q}_{Bx}) \\ &\quad \cdot \cos(l\tilde{y}) \cdot \exp\{ik(\tilde{x}-c\tilde{t})\} \\ (\tilde{v}, \tilde{\tau}_y, \tilde{q}_{By}) &= (\hat{v}, \hat{\tau}_y, \hat{q}_{By}) \\ &\quad \cdot \sin(l\tilde{y}) \cdot \exp\{ik(\tilde{x}-c\tilde{t})\} \\ &\dots\dots\dots(19) \end{aligned} \right\}$$

変動の振幅は記号の上に  $\wedge$  を付して表わし一般には複素数である。式 (17), (19) を前節で求めた基本式 (6), (7), (8), (9), (10), (12), (13) および (15) に代入すると、次式の連立方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} ikF_r^2 & 0 & ik-I_0 & I_0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ikF_r^2 & -l & 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ ik & l & ik & -ik & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ikC & 0 & 0 & ikA_s & lA_s \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_2 & -\alpha_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \alpha_3 l & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_5(1-ik\delta) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\alpha_4 l & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \\ \hat{\tau}_x \\ \hat{\tau}_y \\ \hat{q}_{Bx} \\ \hat{q}_{By} \end{pmatrix} = 0 \dots\dots\dots(20)$$

各振幅に 0 以外の有意な解が存在するためには、上式左辺の係数マトリックスのディターミナントが恒等的に 0 でなくてはならない。これを解いて整理すると、

$$\det. = ikC(A_1 + ikA_2) + A_3(A_3 + ikA_4)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(2 + \alpha_1 + \alpha_2)k^2 F_r^2 - k^2 - \alpha_1 l\} I_0 \\ A_2 &= k^2 F_r^2 (F_r^2 - 1) - l^2 F_r^2 - (1 + \alpha_1 + \alpha_2) I_0^2 \\ A_3 &= (\alpha_1 + \alpha_2) \alpha_5 (\delta I_0 - F_r^2) k^4 \\ &\quad - \{ (2 + \alpha_1 + \alpha_2) \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_3 \} l^2 F_r^2 I_0 \\ &\quad + (1 + \alpha_2 \alpha_5) l^2 F_r^2 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 \delta l^2 I_0^2 \\ &\quad + (\alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_5 \delta - \alpha_3 - \alpha_4) l^2 I_0 k^2 \\ &\quad + \alpha_1 \alpha_4 l^4 I_0 \\ A_4 &= (\alpha_1 + \alpha_2) \alpha_5 \delta F_r^2 k^4 \\ &\quad - \{ \alpha_1 l^2 F_r^4 - (\alpha_1 + \alpha_2 \alpha_5 \delta) l^2 F_r^2 \\ &\quad - \alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 \delta l^2 F_r^2 I_0 - \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 \delta l^2 I_0 \\ &\quad - (\alpha_1 + \alpha_2) \alpha_5 I_0 \} k^2 \\ &\quad + \alpha_4 l^4 F_r^2 + \{ (1 + \alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_3 + \alpha_4) \\ &\quad - \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 \} l^2 I_0^2 + (1 + \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_5) l^2 I_0 \end{aligned}$$

det.=0 の条件より、無次元増幅率  $kC_i$  および無次元移動速度  $C_r$  はそれぞれ次式のように与えられる。

$$kC_i = A_5 \cdot \frac{A_1 A_3 + k^2 A_2 A_4}{A_1^2 + k^2 A_2^2} \dots\dots\dots(21)$$

$$C_r = A_5 \cdot \frac{A_2 A_3 - A_1 A_4}{A_1^2 + k^2 A_2^2} \dots\dots\dots(22)$$

式 (21), (22) に関与するパラメーターを整理すると、 $kC_i, C_r = f_{nc}(F_r^2, I_0, \tau_{*0}, k, l) \dots\dots\dots(23)$

となる。ただし、 $\tau_{*0}$  は  $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  および  $\delta$  の中に陰な形式で含まれている。ところで流れの抵抗則は式 (11) で与えられているから、次に示す 2 本の恒等式

$$\tau_{*0} = \frac{H_0 I_0}{s d}, F_r^2 = \left( \frac{U_0}{U_{*0}} \right)^2 I_0 \dots\dots\dots(24)$$

より、式 (23) の中の 3 つの水量理は独立でない。したがって、 $kC_i, C_r$  は水理的には等価な種々のパラメーターの組合せで表現が可能である。2, 3 の例を次に示す。

$$kC_i, C_r = \begin{cases} f_{nc}(I_0, \tau_{*0}, k, l) \\ f_{nc}(\tau_{*0}, H_0/d, k, l) \\ f_{nc}(F_r, I_0, k, l) \end{cases} \dots\dots\dots(25)$$

以後の解析では河道特性の代表量として  $I_0$ 、流れの特性量として河床砂の運動に最も支配的な  $\tau_{*0}$  をとり式 (25) の第 1 式の組合せを用いて検討を進めることにする。

### 4. 解析結果

#### (1) 形成領域区分

河床擾乱の不安定領域 ( $kC_i > 0$ ) は式 (21) から求めることができる。これまでの研究の多くは不安定領域を水量理と波数  $k$  の相関面上に求めている。この際、式 (25) で明らかなように、もう 1 つの水量理と波数  $l$  は与えなくてはならない。波数  $l$  については多くの場合水路幅・水深比  $B/H_0$  とともに横断方向の分割数  $m$  を与えて河床波の形状ごとに解析が進められている。この場合には与えられた 2 水量理と  $B/H_0$  のもとで、仮定した分割数  $m$  を有するような河床波が本当に発達するかどうか理論的な解答を与えていない。以下では水量理および河道特性量と分割数  $m$  との関係を示し、具体的に中規模河床形態の形成領域区分を行った。

2 つの水量理を与え  $k-l$  相関面上に不安定領域を求める。実線の内側の陰影を施した部分が不安定領域である。このなかで増幅率が最大になる  $k-l$  の組

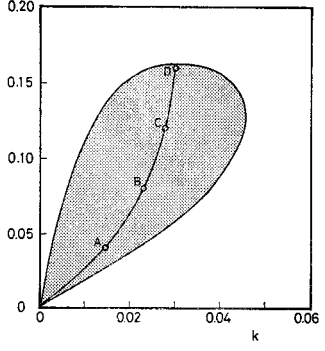


Fig. 2 Unstable region of sand waves ( $I_0=0.01, \tau_{*0}=0.20$ ).

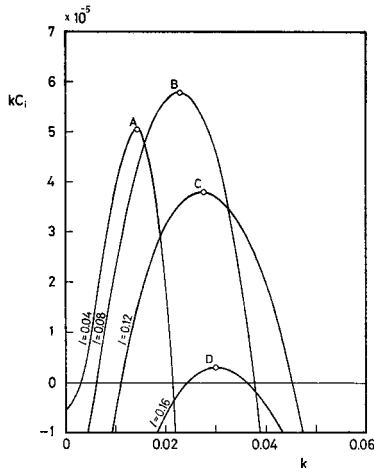


Fig. 3 Variation in the growth rate with wave numbers  $k$  and  $l$  ( $I_0=0.01$ ,  $\tau_{*0}=0.02$ ).

合せの擾乱が卓越すると仮定する。ここで  $B/H_0$  が与えられると波数  $l$  は離散的な値しかとり得ないことに注意を要する。Fig. 3 には増幅率  $kC_i$  と波数  $k, l$  との関係の一例を示す。Fig. 3 の例で、 $m=1$  のとき  $l=0.04$  となるように  $B/H_0$  を与えると、とり得る  $l$  の中には  $l=0.08$  ( $m=2$ ) の点 B の増幅率が最も大きく、 $m=2$  の擾乱が卓越する。また  $m=1$  で  $l=0.08$  となる  $B/H_0$  ではやはり点 B の増幅率が最も大きいが卓越する擾乱の分割数は  $m=1$  である。

上の例から  $k$  方向には増幅率の極大値だけが問題になる。極大値は Fig. 2 の不安定領域中の実線に沿って起こる。Fig. 4 には極大値  $kC_{imax}$  と  $l$  との関係の一例を示す。ここで  $l$  に関する 2 つの特徴量  $l_0, l_*$  を以下のように定義する。

$$kC_{imax}(l_0) = 0 \dots\dots\dots(26)$$

$$kC_{imax}(l_*) = kC_{imax}(2 \cdot l_*) \dots\dots\dots(27)$$

$\pi H_0/B > l_0$  であれば  $kC_{imax}$  は常に負となり擾乱は安

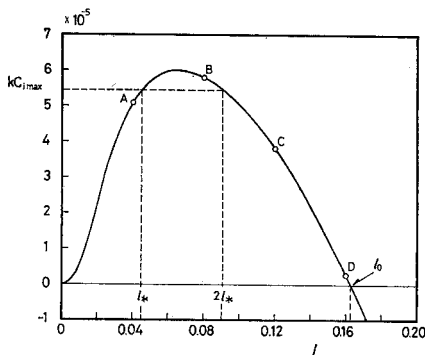


Fig. 4 Variation in the maximum growth rate with wave number  $l$  ( $I_0=0.01$ ,  $\tau_{*0}=0.20$ ).

定となる。したがって  $\pi/l_0$  は  $m=1$  の擾乱の発生・非発生の限界の  $B/H_0$  の値を与えることになる。また Fig. 3 の例で説明したように  $l_* < \pi H_0/B < l_0$  であれば  $m=1$  に対応する  $kC_{imax}$  が最も大きく、 $\pi H_0/B < l_*$  であれば  $m \geq 2$  に対応するものが最大値をとる。したがって  $\pi/l_*$  は  $m=1$  と  $m \geq 2$  の擾乱の形成限界の  $B/H_0$  の値を与えることになる。

このような理論的取扱いの考え方を最初に述べたのは Engelund & Skovgaard である。彼らは具体的な計算を示していないがこれは河床安定解析と河床波の形成領域区分とを結び付けるうえで重要な指摘である。上述の方法で水理量を変えて  $l_0, l_*$  を求めてゆけば形成領域区分は式 (25) から  $k$  および  $l$  を除いた次式の例のようなパラメーターで表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} f_{nc}(I_0, \tau_{*0}, B/H_0) &= 0 \\ f_{nc}(\tau_{*0}, H_0/d, B/H_0) &= 0 \\ f_{nc}(F_r, I_0, B/H_0) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

Fig. 5 には得られた領域区分線を示す。左側の曲線群は  $l_0$  から求めた砂洲河床の発生・非発生限界を、右側の曲線群は  $l_*$  から求めた単列砂洲 ( $m=1$ ) と複列砂洲 ( $m \geq 2$ ) との形成限界をそれぞれ表わしている。区分線の位置は平均河床勾配  $I_0$  によって変化しており、 $I_0$  が小さくなるに従って  $B/H_0$  の大きな側にほぼ並行移動している。

実用的な見地からは区分線が  $I_0$  によって変化するのは不便である。そこで区分図の横軸を  $B/H_0$  の代わりに  $BI^{0.2}/H_0$  をとって表わすと Fig. 6 の程度には区分線をまとめることができる。 $\tau_* > 0.1$  ではさらに簡略化して

$$\left. \begin{aligned} BI^{0.2}/H_0 < 7 & \text{ 砂洲非発生領域} \\ 7 < BI^{0.2}/H_0 < 30 & \text{ 単列砂洲領域} \\ 30 < BI^{0.2}/H_0 & \text{ 複列砂洲領域} \end{aligned} \right\} \dots\dots(29)$$

と表わすこともできる。図中には木下<sup>13)</sup>、芦田・塩見<sup>14)</sup>、舩川<sup>15)</sup>、Chang・Simons・Woolhisar<sup>16)</sup>、池田<sup>17)</sup>、近藤・

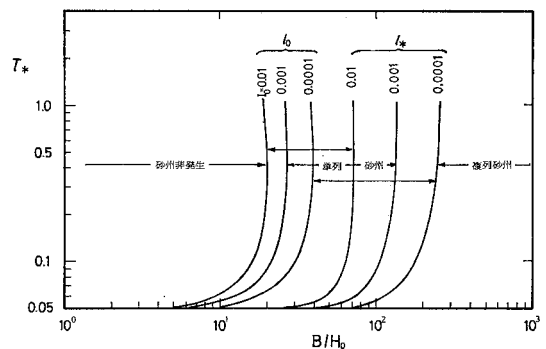


Fig. 5 Variation in the boundaries of regime with slope  $I_0$ .

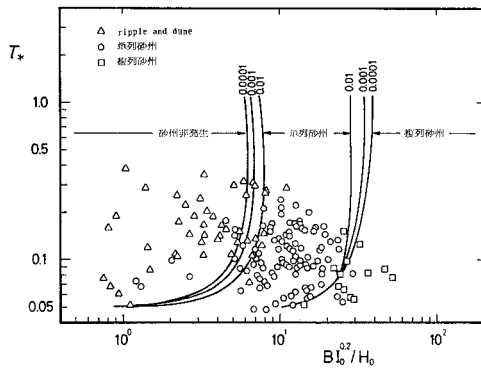


Fig. 6 Modified diagram for regime criteria on bars and braids.

小森<sup>18)</sup>, 村本・藤田<sup>19)</sup>, 玉井・長尾・三国<sup>20)</sup>および著者らが行った水路実験の結果をプロットした. 本解析で求めた区分線は実験結果を良好に区分している.

Fig. 5 に示した理論区分線は式 (28) に例示した別のパラメーターの組合せを用いた表現に変換することは容易である. しかし, 二次元相関面上に区分線をまとまりよく表示しようとするとき Fig. 6 の表示法が最もまとまりがよいようである. また, 従来の次元解析的な研究では  $BI_0/H_0$  が重要なパラメーターとして位置付けられてきたが, 本解析では  $B/H_0$  と  $I_0$  は独立なパラメーターであり, 両者の積をとる必然性は見出せなかった.

(2) 砂洲長と移動速度

前項の解析で単列砂洲河床の形成領域は, 与えられた水理量  $I_0, \tau_{*0}$  のもとで

$$l_* \leq l \leq l_0$$

であることを示した. したがって上の範囲内で, Fig. 3 に示した増幅率の極大値の発生する線に沿って  $l/k$  の値を調べれば次式の関係より単列砂洲河床の無次元砂洲長  $L/B$  の変化し得る範囲が求められる.

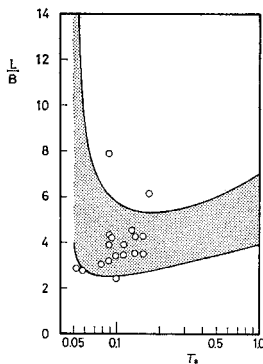


Fig. 7 Variation in the bar length with nondimensional bed shear stress  $\tau_{*0}$  ( $I_0=0.01$ ).

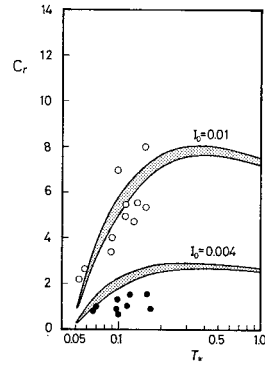


Fig. 8 Variation in the migration velocity of bars with nondimensional bed shear stress  $\tau_{*0}$ .

$$\frac{k}{l} = \left( \frac{\pi H_0}{B} \right) / \left( \frac{2\pi H_0}{2L} \right) = \frac{L}{B}$$

計算結果の一例を Fig. 7 に示す. 図中には芦田・塩見, 鮭川, 池田および村本・藤田による水路実験の資料をあわせてプロットしてある. 資料は  $\tau_{*0}$  の小さい範囲に限られてはいるが理論的に求められた範囲内にほぼ含まれている. また勾配を変えた計算では急勾配になると砂洲長が長くなる傾向が認められたがその程度はわずかである.

次に上の解析と同様な範囲で無次元移動速度  $C_r$  を式 (22) によって求めれば, 単列砂洲河床の前進速度を求めることができる. 計算結果の一例を Fig. 8 に示す. 図中には芦田・塩見および著者らの行った水路実験の結果をプロットしてある. 実験値は  $\tau_{*0}$  の小さい範囲に限られてはいるが, この範囲では理論値に比較的近い所にプロットされている. 図には  $I_0$  の異なる 2 つの場合が示されているが, 移動速度は  $I_0$  に強く依存していることが認められる.

以上のように, 解析結果は領域区分図はもちろんであるが, 卓越する河床波の長さや移動速度についても実験資料の傾向を説明することができる.

5. 解析結果の検討

(1) 中規模河床形態の発生機構

河床波の発生機構についてはこれまでの多くの研究を通じてその原因が河床波形, 河床せん断力および流砂量との位相差にあることが明らかにされてきた. 以下ではこれらの位相差がそれぞれどのような寄与をしているか調べる.

式 (19) の  $\hat{q}_{Bx}, \hat{q}_{By}$  を振幅と河床形との位相とに分けて

$$\hat{q}_{Bx} = |\hat{q}_{Bx}| \cdot \exp(-ik\theta_{Bx})$$

$$\hat{q}_{By} = |\hat{q}_{By}| \cdot \exp(-ik\theta_{By})$$

とおき、流砂の連続式 (9) に代入すると増幅率  $kC_i$  は次式のように表わせる。

$$kC_i = -\frac{A_s}{\hat{\eta}} \{k|\hat{q}_{Bx}| \cdot \sin k\theta_{Bx} + l|\hat{q}_{By}| \cdot \cos k\theta_{By}\} \dots\dots\dots (30)$$

したがって  $0 < k\theta_{Bx} < \pi$ ,  $-\pi/2 < k\theta_{By} < \pi/2$  の場合上式の右辺の各項は河床を安定化させる方向に作用する。式 (20) を変形して

$$\begin{pmatrix} ikF_r^2 & 0 & ik-I_0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ikF_r^2 & -l & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ ik & l & ik & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_5(1-ik\tilde{\delta}) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}/\hat{\eta} \\ \hat{v}/\hat{\eta} \\ \hat{\xi}/\hat{\eta} \\ \hat{\tau}_x/\hat{\eta} \\ \hat{\tau}_y/\hat{\eta} \\ \hat{q}_{Bx}/\hat{\eta} \\ \hat{q}_{By}/\hat{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_0 \\ 0 \\ ik \\ \alpha_2 \\ -\alpha_3 l \\ 0 \\ \alpha_4 l \end{pmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

上式を解けば河床形と各変量との位相差を求めることができる。

$\hat{q}_{Bx}$  と河床形との位相差  $k\theta_{Bx}$  を Fig. 9 に示す。図は  $I_0=0.01$ ,  $\tau_{*0}=0.2$  の場合の計算例である。  $k$  が增大すると河床を不安定化させる方向から安定化させる方向に寄与の仕方が変化している。図中には破線で  $\hat{\tau}_x$  と河床形との位相  $k\theta_x$  も示してある。両者の間には式 (15) より  $\theta_{Bx} = \theta_x + \delta$  の関係が成立し、Fig. 9 の実線の差が  $\delta$  の寄与分を表わしており河床を安定化させる方向に作用する。

Fig. 9 と同様な条件での流速  $\hat{u}$  と河床形との位相差  $k\theta_u$  の計算例を Fig. 10 に示す。図中の破線は前出の  $k\theta_x$  を示したものであり両者はほとんど一致している。これは河床せん断力と河床形との位相差を形成する主因は流速  $\hat{u}$  と河床形との位相差であることを示している。

上と同様な条件での  $\hat{q}_{By}$  と河床形との位相差  $k\theta_{By}$  の計算例を Fig. 11 に示す。  $-\pi/2 < k\theta_{By} < \pi/2$  であり常に河床を安定化する方向に作用していることがわかる。図中の破線は流速  $\hat{v}$  と河床形との位相差  $k\theta_v$  を示す。両者は  $k$  の小さい所を除くとよく一致しており流速  $\hat{v}$  の存在自体が河床の安定化に寄与していることは明らかである。しかし、  $k$  の小さな所では  $\hat{v}$  自体よりも強い安定化作用が働いているが、これは式 (13) で横断方向の河床勾配の効果を取り入れたためである。

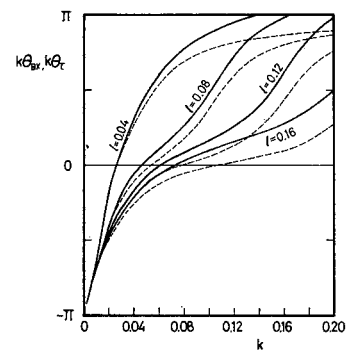


Fig. 9 Variation in the phases  $k\theta_{Bx}$  (solid line) and  $k\theta_x$  (broken line) with wave numbers  $k$  and  $l$  ( $I_0=0.01$ ,  $\tau_{*0}=0.2$ ).

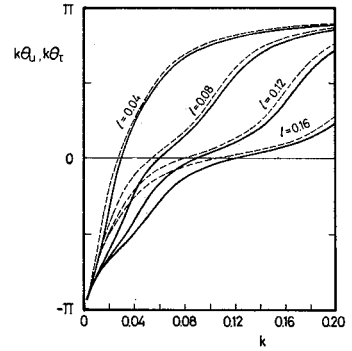


Fig. 10 Variation in the phases  $k\theta_u$  (solid line) and  $k\theta_x$  (broken line) with wave numbers  $k$  and  $l$  ( $I_0=0.01$ ,  $\tau_{*0}=0.2$ ).

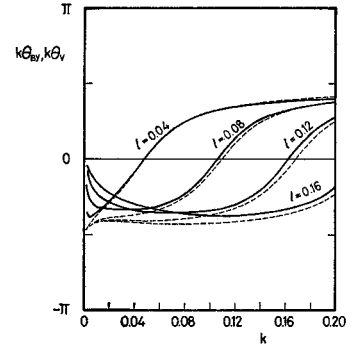


Fig. 11 Variation in the phases  $k\theta_{By}$  (solid line) and  $k\theta_v$  (broken line) with wave numbers  $k$  and  $l$  ( $I_0=0.01$ ,  $\tau_{*0}=0.2$ ).

以上の解析より、 $k\theta_x$  による不安定化作用と  $\delta$  および  $k\theta_v$  による安定化作用によって中規模河床形態の形成を説明できることがわかる。 $\delta$  および  $k\theta_v$  は水量量によらず常に安定化に作用するが、 $k\theta_x$  が不安定に寄与

Table 1 Comparison of coefficients.

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\delta$
林・尾崎 (1975)	2	$\frac{5}{6+2.5 \ln(H_0/ks)}$	0	0	$\frac{7_*}{\phi} \frac{d\phi}{d\tau_*}$ <sup>1)</sup>	0
Fredsøe (1978)	2	$\frac{5}{6+2.5 \ln(H_0/2.5 d)}$ <sup>2)</sup>	0	$\frac{1}{\mu}$	同上	0
著者ら	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2} \frac{\phi}{\phi_0} \frac{1}{\mu \sqrt{\tau_{*0}}}$	$\frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_{*0}} \cdot \frac{\mu}{\mu_0}}$	同上	砂粒の平均移動距離 (Einstein 式)

注：1)  $\phi$  は掃流砂量式であり、各解析で用いている形式は異なる  
 2) 平坦床を対象とした解析の場合を示す

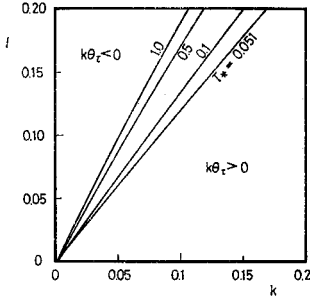


Fig. 12 Variation in the limit  $k\theta\tau=0$  with  $\tau_{*0}$  ( $I_0=0.01$ ).

する範囲は水理量に依存する。  $I_0=0.01$  の場合について  $\tau_{*0}$  を変化させ  $k\theta\tau=0$  となる条件を求めると Fig. 12 のようになる。

(2) 従来の理論との比較

本解析では 2. に示したように、 $\hat{r}_x \cdot \hat{r}_y \cdot \hat{q}_{Bx} \cdot \hat{q}_{By}$  に関する 4 つの関係式を導入している。これらが解析結果にどのように反映されているか、既往の理論のいくつかと比較して検討を行った。

基礎方程式の骨格が類似な林・尾崎 (1975) および Fredsøe の解析との相違点を Table 1 に示す。Fredsøe の解析は基本流に対応する河床の状態を平坦床および dune 河床の 2 つを考えている。後者によって中規模河床形態に小規模河床形態が superpose した状態をも説明しようとする意図は理解できるが、dune を粗度要素としてのみ評価し砂粒運動や流れの場に影響を及ぼさないとする仮定には検討の余地がある。

表中の  $\alpha_1 \cdot \alpha_2$  は抵抗則より求められた。  $\alpha_2$  にみられる相違は抵抗則の表現形成の違いに由来している。  $\alpha_2$  のみを変えてその影響を調べたが、解析結果にほとんど違いは認められなかった。

せん断力と流向のずれを規定する  $\alpha_3$  は、本解析以外は 0 として取り扱っている。類似の表現は湾曲部の河床形状や側岸侵食の解析でも行われ、現象を規定する重要な要素の 1 つとなっており、基本的には  $\alpha_3 \neq 0$  と考えるのが妥当であろう。しかし、  $\alpha_3=0$  として計算を行っても解析結果にほとんど違いは認められなかった。これは本研究で対象としている中規模河床形態の場合、河床

波の波形勾配が小さいため、影響が顕著には現われてこないものと考えられる。

解析結果に最も顕著な影響を及ぼしているのは  $\alpha_4$  である。  $\alpha_4=0$  とすると最大増幅率  $kC_{i\max}$  は  $l$  とともに単調増加し 4. で定義した  $l_0, l_*$  は存在しなくなる。このことは著者らが potential 流を用いた解析を行った際にも指摘した。また Fredsøe は Englund<sup>21)</sup> が与えた砂粒の移動方向を表す式を用いて  $\alpha_4$  の値を決めている。Englund の式は  $y$  方向にのみ傾いた平板上の砂粒の定常運動から導かれたものであるが、かなり簡略化した解析を行っており制限された状況でのみ成立するものと考えられる。

流砂と河床せん断力間の位相差、いわゆる遅れ距離  $\delta$  は発生機構の項で述べたように河床波の安定化に寄与する。これは流砂運動に本質的に内在するものと考えられ、小規模河床形態の場合にはこれ以外に安定化の要素が存在しないため発生機構の説明に大きな役割を果たしている。しかし中規模河床形態の場合には横断方向の流砂量という強い安定化要素があること、さらに対象とする河床波の波長が長いこと相対的に  $\delta$  の役割が小さいことから本解析以外では省略されている。しかし、林らの最近の解析<sup>11), 22)</sup> ではこれを導入し評価する方向に進んでいることを付け加えておく。

6. 結 論

広矩形直線流路における中規模河床形態の形成領域区分およびその発生機構について理論的な検討を行い次の結論を得た。

(1) 流れは 2 次元浅水流として取り扱い掃流砂を対象に解析を行った。基礎方程式の誘導にあたり流砂と河床せん断力の関係式の吟味を行い、斜面上では流れの方向と流砂の移動方向および河床せん断力の作用方向がそれぞれ異なっていること、流砂量と河床せん断力の間には本質的なずれがあることを示し従来慣用的に用いられている関係式に修正が加えられた。

(2) 河床安定解析を行い、河床波の不安定領域は 2 つの無次元水理量と河床波の波数  $k, l$  で表現されることを示した。この 2 つの水理量は等価な組合せが多数に



存在する。

(3) 流路幅が与えられたとき実際に発達する可能性のある河床波の形状を河床安定解析の結果を用いて明らかにし、形成領域区分を示した。形成領域は上の2つの無次元水理量と流路幅・水深比だけで表現され、波長  $k$  および河床波形状を表わす横断方向分割数  $m$  はこれらの量で表わされる。

(4) 理論解析から得られた中規模河床形態の形成領域区分を集約して実用的な領域区分図 (Fig. 6) を提案した。区分図はこれまでに行われた水路実験の結果とよく合致する。

(5) 単列砂洲河床について砂洲長、移動速度を理論解析的に求めた。水路実験の結果と比較的よく一致しており、卓越波数に関する理論上の仮定がこの種の河床波の場合には妥当であることが推定される。

(6) 河床波の発生機構を水理量相互の位相差の観点から検討し、中規模河床波の場合には河床と主流方向の流速変動  $\bar{u}$  の位相が河床を不安定化させる要因であり、河床と横断方向の流速変動  $\bar{v}$  の位相が安定化に大きく寄与し両者のバランスの上に波床の発生・非発生が決定されていることを示した。これは従来の小規模河床形態の発生機構に加えて、 $\bar{v}$  の寄与が中規模河床形態の発生機構の特徴であることを示すものである。

付録 一様斜面上の砂粒の定常運動

Fig. A.1 のような斜面上を定常運動する砂粒に作用する力のつり合いを考え次の2式を得る。

$$D \cos \tau_s - F \cos \psi + W \sin I_0 = 0 \dots\dots\dots (A.1)$$

$$D \sin \tau_s - F \sin \psi - W \cos I_0 \cdot \sin \theta = 0 \dots\dots\dots (A.2)$$

ただし、 $D$  は抗力、 $F$  は摩擦力、 $W$  は砂粒の水中重量であり、それぞれ次式のように与えられる。

$$D = \frac{\rho}{2} C_b \frac{\pi}{4} d^2 \{ (u - u_s)^2 + (v - v_s)^2 \} \dots\dots\dots (A.3)$$

$$F = \mu W \cos I_0 \cos \theta \dots\dots\dots (A.4)$$

$$W = \frac{\pi}{6} (\rho_s - \rho) g d^3 \dots\dots\dots (A.5)$$

また、 $\tau_s \cdot \psi$  は抗力の作用方向・砂粒の運動方向がそれぞれ  $x$  軸となす角度であり、流速  $u \cdot v$ 、砂粒の運動速度

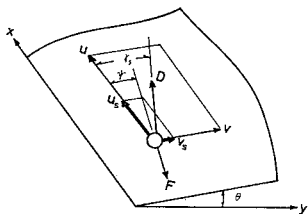


Fig. A.1 Forces acting on sand particle on sloping bed.

$u_s \cdot v_s$  とは次式の関係がある。

$$\tan \tau_s = \frac{v - v_s}{u - u_s}, \tan \psi = \frac{v_s}{u_s} \dots\dots\dots (A.6)$$

ここでは、流速  $u \cdot v$  は与えられたとして式 (A.1, 2) を解き、 $\tau_s \cdot \psi$  を既知量で表現することを考える。また本研究では微小な河床擾乱を対象としているから、斜面の傾き  $\theta$  および  $v \cdot v_s$  は微小量であるとする。

$v \cdot v_s$  が微小量であることを用いて、式 (A.1, 2) の第1項を変形すると、

$$D \cos \tau \simeq \frac{\rho}{2} C_D \frac{\pi}{4} d^2 u^2 \left( 1 - \frac{u_s}{u} \right)^2$$

$$D \sin \tau \simeq \frac{\rho}{2} C_D \frac{\pi}{4} d^2 u^2 \left( 1 - \frac{u_s}{u} \right) \left( \frac{v}{u} - \frac{v_s}{u} \right)$$

また式 (A.6) の第2式より

$$\cos \psi \simeq 1, \sin \psi \simeq \frac{v_s}{u_s}$$

これらの関係を式 (A.1, 2) に代入すると、

$$c \cdot u^2 (1 - \hat{u}_s)^2 - \mu \cos I_0 \cdot \cos \theta + \sin I_0 = 0 \dots\dots\dots (A.1)'$$

$$c \cdot u^2 (1 - \hat{u}_s) (\hat{v} - \hat{v}_s) - \mu \cos I_0 \cos \theta \cdot \frac{\hat{v}_s}{\hat{u}_s} - \cos I_0 \cdot \sin \theta = 0 \dots\dots\dots (A.2)'$$

ただし、 $c = 3 C_D / (4 s g d)$ 、 $\hat{u}_s = u_s / u$ 、 $\hat{v}_s = v_s / u$ 、 $\hat{v} = v / u$  である。式 (A.1)' を  $\hat{u}_s$  について解くと、

$$\hat{u}_s = 1 - \sqrt{\frac{1}{c \hat{u}^2} (\mu \cos I_0 \cos \theta - \sin I_0)} \dots\dots\dots (A.7)$$

式 (A.2)' より、

$$\hat{v}_b = \frac{c u^2 (1 - \hat{u}_s) \hat{v} - \cos I_0 \cdot \sin \theta}{c u^2 (1 - \hat{u}_s) + \mu \cos I_0 \cos \theta / \hat{u}_s} \dots\dots\dots (A.8)$$

式 (A.8) に式 (A.7) を代入して  $\hat{u}_s$  を消去し、さらに  $\hat{v}_s$  と  $\hat{u}_s$  の比をとると

$$\frac{\hat{v}_s}{\hat{u}_s} = \frac{\hat{v} \sqrt{c u^2 (\mu \cos I_0 \cos \theta - \sin I_0)} - \cos I_0 \cdot \sin \theta}{\sqrt{c u^2 (\mu \cos I_0 \cos \theta - \sin I_0)} + \sin I_0}$$

$\sqrt{c u^2 (\mu \cos I_0 \cos \theta - \sin I_0)} \gg \sin I_0$  であるから、

$$\frac{\hat{v}_s}{\hat{u}_s} \simeq \hat{v} - \frac{\cos I_0 \cdot \sin \theta}{\sqrt{c u^2 (\mu \cos I_0 \cos \theta - \sin I_0)}} \dots\dots\dots (A.9)$$

次に砂粒の移動開始直前のつり合い状態を考える。この限界状態には添字  $c$  を付して表わす。限界状態では力のつり合いは次式のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} c_c u_c^2 - \mu_c \cos I_0 \cdot \cos \theta \cdot \cos \tau_c + \sin I_0 &= 0 \\ c_c u_c \cdot v_c - \mu_c \cdot \cos I_0 \cdot \cos \theta \cdot \sin \tau_c \\ - \cos I_0 \cdot \sin \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.10)$$

式 (A.10) より  $\tau_c$  を消去し、2次以上の微小項を無視すれば  $c_c \cdot u_c^2$  は次式のように表わせる。

$$c_c u_c^2 = \mu_c \cdot \cos I_0 \cdot \cos \theta - \sin I_0 \dots\dots\dots (A.11)$$

ところで、限界状態と移動状態で抗力係数の値に大きな差はないと考え、さらに河床近くで流速  $u$  が河床摩擦速

度  $u_*$  に比例することを用いれば、式 (A・11) の左辺は次のように変形できる。

$$c_c \cdot u_c^2 = \frac{c_c}{c} \cdot \left(\frac{u_c}{u}\right)^2 \cdot cu^2 \approx \left(\frac{u_{*c}}{u_*}\right)^2 cu^2 = \frac{\tau_{*c}}{\tau_*} cu^2 \dots \dots \dots (A \cdot 12)$$

式 (A・11, 12) を式 (A・9) に代入すれば、

$$\frac{\hat{v}_s}{\hat{u}_s} = \hat{v} - \frac{\cos I_0 \cdot \sin \theta}{\sqrt{\frac{\tau_*}{\tau_{*c}} (\mu_c \cos I_0 \cos \theta - \sin I_0) \cdot (\mu \cos I_0 \cos \theta - \sin I_0)}}$$

$\mu, \mu_c \gg I_0$  と考えてよいため、上式はさらに次のように簡略化できる。

$$\frac{\hat{v}_s}{\hat{u}_s} = \tan \psi = \hat{v} - \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\tau_{*c} \mu}{\tau_* \mu_c}} \cdot \tan \theta \dots \dots (A \cdot 13)$$

次に砂粒に働く抗力の作用方向を求める。式 (A・6) の第 1 式に式 (A・7, 8) を代入して整理すると、

$$\frac{\hat{v} - \hat{v}_s}{1 - \hat{u}_s} = \frac{\mu \cos I_0 \cdot \cos \theta \cdot \hat{v} + \cos I_0 \cdot \sin \theta}{\mu \cos I_0 \cdot \cos \theta - \sin \theta - \sin I_0} \cdot \left\{ 1 - \sqrt{\frac{1}{cu^2} (\mu \cos I_0 \cos \theta - \sin I_0)} \right\} \cdot \sqrt{\frac{1}{cu^2} (\mu \cos I_0 \cdot \cos \theta - \sin I_0)}$$

上式の分母の第 1 項は第 2, 3 項より十分に大きいから、

$$\frac{\hat{v} - \hat{v}_s}{1 - \hat{u}_s} \approx \hat{v} + \frac{1}{\mu} \cdot \left\{ 1 - \sqrt{\frac{1}{cu^2} (\mu \cos I_0 \cdot \cos \theta - \sin I_0)} \right\} \cdot \tan \theta$$

さらに (A・11, 12) の関係を代入して整理すれば次式を得る。

$$\frac{\hat{v} - \hat{v}_s}{1 - \hat{u}_s} = \tan r_s = \hat{v} + \frac{1}{\mu} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\tau_{*c} \mu}{\tau_* \mu_c}} \right\} \cdot \tan \theta \dots \dots \dots (A \cdot 14)$$

静止している砂粒に働くせん断力の作用方向は  $\tan r_c = \hat{v}$  であり、式 (A・14) の右辺第 2 項が砂粒運動の効果として加わっている。河床に作用する平均的なせん断力の作用方向  $r$  は  $r_c$  と  $r_s$  の中間にあるはずであり式 (A・14)' のように書けるものと考えられる。

$$\tan r = \hat{v} + \frac{\beta}{\mu} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\tau_{*c} \mu}{\tau_* \mu_c}} \right\} \tan \theta \dots (A \cdot 14)'$$

$\beta (< 1)$  は流砂量に比例すると考えられ、 $\beta = n_2/n_1$  で与えられると仮定する。ここに、 $n_1 = 1/(\pi d^2/4)$  は単位面積当たりの砂粒数、 $n_2$  は単位面積当たりの運動中の砂粒数であり次式のように表わせる。

$$n_2 = q_B \left\{ \frac{\pi d^3}{6} \sqrt{u_s^2 + v_s^2} \right\} \approx q_B \left( \frac{\pi d^3}{6} \cdot u_s \right) \dots \dots \dots (A \cdot 15)$$

さらに式 (A・7, 11, 12) の関係を代入して整理すれば次式を得る。

$$\tan r = \hat{v} + \frac{3}{2} \frac{\phi}{\varphi_0 \mu \sqrt{\tau_{*0}}} \tan \theta \dots \dots \dots (A \cdot 16)$$

参考文献

- 1) Englund, F. and O. Skovgaard : On the origin of meandering and braiding in alluvial streams, Jour. Fluid Mech., Vol. 57, Part 2, pp. 289~302, 1973.
- 2) 黒木幹男・岸 力：砂州河床の発生限界について，土木学会第 33 回年次学術講演会講演概要集，II-420, pp. 812~813, 1978.
- 3) Kuroki, M. and T. Kishi : Regime criteria for meandering and braiding of streams in straight channel, Hydraulic paper No. 3, The Reserch Laboratory of Civil and Environmental Engineering, Hokkaido Univ. 1979.
- 4) Fredsøe, J. : Meandering and braiding of rivers, Jour. Fluid Mech., Vol. 84, Part 4, pp. 609~624, 1978.
- 5) 林 泰造・尾崎幸男：河川蛇行の成因と卓越蛇行波長，第 19 回水理講演会論文集，pp. 31~38, 1975.
- 6) 林 泰造・尾崎幸男：河床安定理論の立場からみた河川蛇行の卓越波長について，第 20 回水理講演会論文集 pp. 89~96, 1976.
- 7) 林 泰造・尾崎幸男：せん断流モデルによる河川蛇行の研究，第 21 回水理講演会論文集，pp. 87~96, 1977.
- 8) 黒木幹男・岸 力・板倉忠興：交互砂州の水理特性，文部省科学研究費・総合研究 (A)・沖積地河川における河床形態と流体抵抗の研究 (代表・岸力)・最終報告書 pp. 80~88, 1975.
- 9) 長谷川和義・長田京司：直線状流路の側壁浸食に関する研究，土木学会第 32 回年次学術講演会講演概要集，II-224, pp. 434~435, 1977.
- 10) Kennedy, J.F. : The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels, Jour. Fluid Mechanics, Vol. 16, Part 4, pp. 521~544, 1963.
- 11) Hayashi, T. and S. Ozaki : Alluvial bedform analysis I, Formation of alternating bars and braids, Proc. of U.S.-Japan Binational Seminar on Erosion and Sedimentation, Hawaii, pp. 7-1~40, 1978.
- 12) Einstein, H.A. : Formulas for the transportation of bed load, Trans. ASCE, Vol. 107, paper No. 2140, p.567, 1942.
- 13) 木下良作：石狩川河道変遷調査・参考編，科学技術庁資源局資料，第 36 号，1962.
- 14) 芦田和男・塩見靖国：水路における砂礫堆の水理特性について，京大防災研年報，第 9 号，pp. 1~21, 1966.
- 15) 鮎川 登：直線河道における流れの蛇行現象に関する水理学的研究，科学技術庁資源調査所，1971.
- 16) Chang, H.Y., D.B. Simons and D.A. Woolhiser : Flume experiments on alternate bar formation, Proc. ASCE, Jour. of W.W. Div. WW-1, pp. 155~165, 1971.
- 17) 池田 宏：実験水路における砂礫堆とその形成条件，地理学評論，第 46 卷，7 号，pp. 435~450, 1973.
- 18) 近藤幸雄・小森保数：交互砂州に関する基礎的研究，北海道開発局土木試験所月報，No. 251, pp. 1~10, 1974.
- 19) 村本嘉雄・藤田裕一郎：中規模河床形態に関する研究，京大防災研年報，第 20 号，pp. 243~258, 1977.
- 20) 玉井信行・長尾 哲・三国史雄：直線水路における複列砂礫堆と網状流路の形成について，第 22 回水理講演会論文集，pp. 265~273, 1978.
- 21) Englund, F. : Flow and bed topography in channel bends, Jour. Hyd. Div., Proc. ASCE, Vol. 100 HY 11, pp. 1638~1639, 1974.
- 22) 林 泰造・尾崎幸男・大西光陽：中規模河床形態の発生機構について，第 26 回水理講演会論文集，pp. 17~24, 1982.