

段落ち部近傍の底面せん断力

BED SHEAR STRESS CAUSED BY THE FREE OVERFALL

片山道夫*・福井吉孝**・吉川秀夫***

By Michio KATAYAMA, Yoshitaka FUKUI and Hideo KIKKAWA

1. はじめに

開水路の段落水流は、流線が急激に曲がるため、いわゆる急変流となる。この水理特性を明らかにするために、さまざまな研究がなされてきている。たとえば、N. Rajaratnam¹⁾は、水面形状、圧力分布、流速分布、底面のせん断力分布等を実験より求めており、H. Rouse²⁾は、流れを Fr 数別に整理し、水面形状の特性づけを行い、さらに、brink depth と critical depth の比が 0.715 となることを示している。岩崎³⁾は、ナップの形状に関する実験式を与えている。また、R. Southwell⁴⁾や E. Markland⁵⁾はポテンシャル流とみなして、ラプラスの方程式をリラクゼーションによって解き、流線流速を求めている。しかし、これらの研究は滑面固定床の場合にとどまり、実用上の見地からは、より一般的な場合の水理特性を知る必要がある。

著者は前論文⁶⁾において、実験により段落ち部の水理特性を明らかにすることを試みたが、本論文ではその結果に基づき、ポテンシャル流としての解析を行い、実験結果と比較し、段落ち部の水理特性を解明する。特に底面のせん断力分布に着目し、その合理的な解析手法について検討を行う。すなわち、ポテンシャル流としての解析から得られる結果と、境界層方程式を組み合わせることにより、底面のせん断力を近似的に算出しようとする。さらに、移動床段落ち部にこの手法を適用し、段落ち部上流の平衡河床形状の推定を試みる。

2. 実験および実験結果

前報⁶⁾に示した、幅 37 cm の水路における固定床実験

* 正会員 工修 日本道路公団 (前・早稲田大学大学院前期課程)

** 正会員 工修 東洋大学講師 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科

表-1 実験条件

| Run | $Q(l/s \cdot m)$ | I | Fr | $k_s(cm)$ | 備考 |
|-----|------------------|----------------------|-----|-----------|-----|
| 1 | 33.8 | 2.7×10^{-3} | 0.9 | | 滑面 |
| 2 | 33.8 | 7.0×10^{-3} | 1.4 | | 滑面 |
| 3 | 33.8 | 1.6×10^{-3} | 0.5 | 0.367 | 稜粗度 |
| 4 | 33.8 | 7.0×10^{-3} | 1.0 | 0.367 | 稜粗度 |
| 5 | 16.8 | 1.0×10^{-3} | 0.4 | 0.125 | 移動床 |

のほかに、幅 5 cm、長さ 200 cm の可変勾配、長方形断面水路の末端にせきを設け、河床材料として、直径 0.2 cm、比重 2.5 の球形ガラスビーズを、水路下流端せき頂まで水路内に一様に敷きつめ、上流端より給砂を行い、移動床実験を行い、平衡水路床形状を測定し、さらに、路床をその形状のままに固定して、給砂をしないで同じ流量を流して、流速分布、底面せん断力を測定した。なお、本論文に用いた実験例は 5 ケースであり、その実験条件を表-1 に示す。圧力、せん断力の測定には、静圧管および総圧管を用い、せん断力の算定は、滑面の場合、プレストンの手法⁷⁾、粗面の場合、流速分布の測定より求めた。水面形状、圧力分布、流速分布、せん断力分布等の実測結果は前報に示した。その概要は次のとおりである。

brink depth と critical depth の比は、河床勾配と限界勾配の比により変化し、滑面の場合のナップの形状は、段落ち部上流の等流とみなせる点で $Fr < 1$ である流れの場合に、岩崎の実験式とよく一致する。流線に直角方向の静圧分布は、段落ち部上流の等流状態における静水圧分布から、段落ち点に近づくにつれて静水圧分布よりやせていき、段落ち点では底面の静圧はゼロとなる。水深方向の流速分布も、全体としては対数分布則からはずれ、段落ち部に近づくにつれてポテンシャル流としての流速分布に近づくが、底面近傍には対数分布則とみなせる層が存在する。底面のせん断力は、段落ち部に近づくにつれて増加する。

3. 流線網の決定

著者らが用いた、リラクゼーション法による流線網の決定法の概略を示す。

段落ち部におけるポテンシャル流を 図-1(a) に示す座標系²⁾で表わし、次の仮定を行う。

- i) AE は段落点 D から十分に遠く、水深 h をとり、静水圧分布をなし、流速は AE に沿って一様に U である。
- ii) BC は直線であり、BC に沿った静圧はゼロであり、流速も一様である。

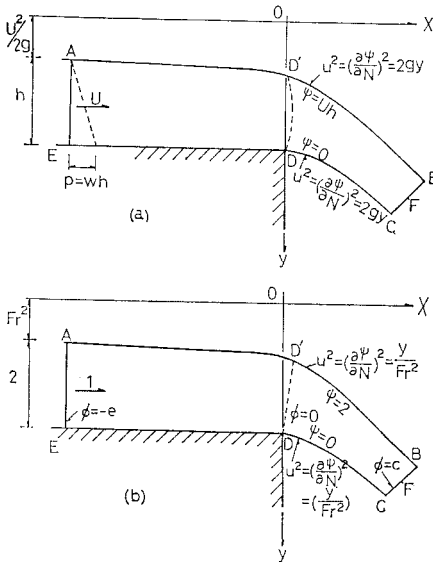


図-1 段落ち部座標系

Markland³⁾ に従い、図-1(a) の各値を $h/2$ を用いて無次元化すると、図-1(b) のようになる。ここで、流関数 ψ は流線に沿って一定であり、AB に沿っては $\psi=2$ 、CE に沿っては $\psi=0$ とする。以上の点をふまえ、以下に示す 2 通りの方法で流線網を決定した。第 1 の方法は、実験により知られた自由水面の形状を、境界条件として用い、 x - y 平面上にあらかじめ定められた格子点における ϕ, ψ の値をプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

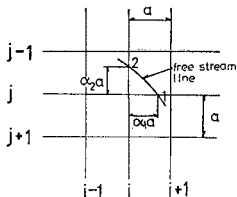


図-2 x - y 平面

を用いてリラクゼーション法によって解くものである。このとき、図-2 に示すような、境界曲線に近い内側の点 (i, j) における ψ に関するリラクゼーション法の残差 R_0 は、

$$R_0 = \frac{2}{\alpha_1(1+\alpha_1)} \psi_1 + \frac{2}{\alpha_2(1+\alpha_2)} \psi_2$$

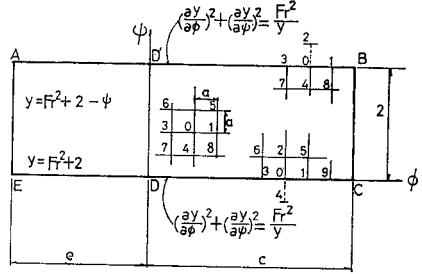


図-3 ϕ - ψ 平面

$$+ \frac{2}{1+\alpha_2} \psi(i, j+1) - \frac{2(\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2} \psi(i, j) \dots\dots\dots(2)$$

ψ_1 : 点 1 の ψ の値, ψ_2 : 点 2 の ψ の値
となり、各格子点の ψ の値は、それぞれの R_0 をゼロにするように修正することにより求められる。

第 2 の方法は Markland³⁾ が提案したものであり、AE において、

$$Fr = U\sqrt{gh} \geq 1 \dots\dots\dots(3)$$

のときに、図-3 に示すような ϕ - ψ 平面上の格子点における x, y の値をラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

を用いてリラクゼーション法によって解くものである。この方法では、図-3 において、 ϕ - ψ 平面の AB, CD の境界条件を与える必要がなく、次式で示される残差 R_0 をゼロにすることにより、自動的に決定される。

$$R_0 = y_1 + y_3 + 2y_4^2 - 4y_0 \pm \left\{ \frac{4\alpha^2 Fr^2}{y_0} - (y_1 - y_3)^2 \right\}^{1/2} \dots\dots\dots(5)$$

y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 : 各格子点の y の値
すなわち、DE の境界条件は既知であるので、ナップ末端の F 点の y 座標 y_F を、式 (5) による R_0 をゼロにするように与えたとき、水面形状が自動的に定まるのがこの方法の特徴である。

この 2 つの方法のうち、前者は精度よく流線網を描くことができるが、実験その他により、自由流線をあらかじめ知る必要がある。一方、後者は自由流線を与える必要はないが、CD, DE 間の格子点数が不適当な場合、計算が収束しにくく、精度が悪くなる。本論文では、せん断力などの流れの内容を調べるために、精度のよい前者を用いるが、水面形のわからない場合の推定のためには後者の方法を用いる必要がある。

4. 底面せん断力の算定

流線網の計算結果を用いて

$$\tau_0 \propto (d\phi/dx)_{y=0}^2 \dots\dots\dots(6)$$

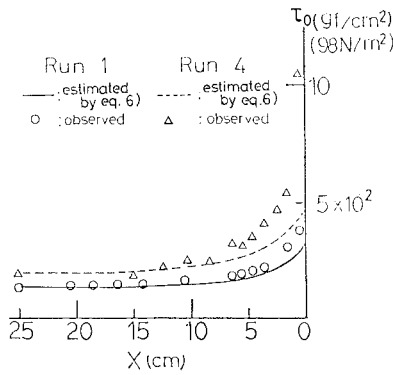


図-4 底面せん断力縦断面内分布 (1)

の関係を実測値と比較したものを 図-4 に示す⁹⁾。図-4 より、式 (6) は底面せん断力 τ_0 の分布の傾向は示し得るものの、粗面の場合に、実測値とのずれが大きく、 τ_0 の算定式としては不十分であることがわかる。そこで、著者らは、ポテンシャル流に境界層方程式を組み合わせることにより、底面せん断力を算出することを試みた。

今の場合には、本質的には境界層内で鉛直力が働く場合について Kármán の方程式に代わるべき式を考えるべきであるが、これは、元々の Navier-Stokes の式になってしまうので、これを条件に応じて解くことは非常に困難である。しかし、実際に生じている境界層流れの境界条件を適切に選ぶなら、Kármán の運動量方程式を導いた条件に適合させることができ、その Kármán の式を用いて、底面のごく近傍での流れを解こうとする試みが可能となる。ここで用いた手法は、Kármán の運動量方程式の仮定、すなわち、(i) 境界層内で圧力は深さ方向に変化しない。言い換えれば、流れと直角方向には、力が働かない。(ii) 境界層外縁では、せん断力は働かない。に相応した流れの場を想定し、前もってポテンシャル解析で求めておいた流速 (U) を使って、(1) Kármán の運動量方程式、(2) 抵抗則を連立で解くことにより、段落流の底面せん断力を求めようとするものである。

(1) 境界層方程式

本研究においては、不等流に対して、Kármán の仮定に従う式 (11) を利用する。その式 (11) を誘導するために、図-6(d) の ③ で示す流れの場を想定する。その場では、水深 (h) よりさらに上方まで一様流れ (流速は U') がある。重力による質量力を考慮に入れて、 x 方向の運動方程式は、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots (7)$$

で表わされる。ここで、 u, v, p はそれぞれ想定した場での x 方向の流速、 y 方向の流速、圧力を表わし、 ν は渦動粘性係数を含むものとする。また、 $\tan \beta$ が水路床勾配である。 y 方向の運動方程式は

$$-g \cos \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

である。

いま、 p'/ρ をピエゾ水頭とすれば、 $p' = p + \rho g y \cos \beta$ であり、 $\frac{\partial p'}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \cos \beta$ となる。

Kármán の仮定は $\partial p/\partial y = 0$ であるが、この仮定を重力の場で考えるならば、 $\partial p'/\partial y = 0$ ということである。 $\partial p'/\partial y = 0$ ならば、 $-\partial p/\partial y - \rho g \cos \beta = 0$ となり、式 (8) と同一の式となる。つまり、式 (8) は重力を考慮した Kármán の仮定、 $\partial p'/\partial y = 0$ を示している。また実際の段落流においても、底面付近では、流線に曲がりがないので、そこでのピエゾ水頭は一定と考えてよい。すなわち、 $\partial p'/\partial y = 0$ を表わす式 (8) は、実際の底面付近の流れとも適切に対応している。

連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

となる。

いま想定している流れの場において、境界層の外側ではベルヌーイの定理が成り立つから、

$$-g \sin \beta + U' \frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x} = 0 \dots\dots (10 \cdot a)$$

となる。ここに、 U' は先に記したように、上層の一様流れの速度、 p_e は上層、すなわち境界層の外側の流れの圧力である。想定した流れの境界層内部では $\partial p'/\partial y = 0$ であり、境界層外縁の p_e と p は等しくなる。ゆえに、

$$-g \sin \beta + U' \frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \dots\dots (10 \cdot b)$$

となり、式 (10・b) を式 (7) に代入し、十分に深い水深まで積分すると、

$$\frac{\partial}{\partial x} (U'^2 \theta) + \delta^* U' \frac{\partial U'}{\partial x} = \frac{\tau_0}{\rho} \dots\dots\dots (11)$$

θ : 運動量厚, δ^* : 排除厚,

τ_0 : 底面せん断力 ($= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$)

で示される運動量方程式を得る⁹⁾。なお、 U' は以後、 U で表わす。その妥当性については (3) で詳述する。

ここで、流速分布としてべき乗則、

$$u(y) = U \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n} \dots\dots\dots (12)$$

δ : 境界層厚

が成り立つと考えることにより式 (11) は

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)} U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{3n+2}{(n+1)(n+2)} U \delta \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$= \frac{\tau_0}{\rho} \dots\dots\dots(13)$$

と変形でき、式 (13) と抵抗則を連立させることにより、 U の値を知れば δ と τ_0 を求めることができる。

なお、本解析は、ポテンシャル流と境界層とを組み合わせて底面近傍の流れを解析しようとするのであるが、境界層が存在するため、本文で取り扱う方法では、実際の流れの流量の連続条件を満足しなくなっている。こういった欠点を取り除くためには、前報⁶⁾で述べたように、本文で求められる境界層の排除厚を算出し、縦断方向全域にわたって排除厚分だけ底上げして、ポテンシャル解析を行い、その結果を用いて境界層を解析することにより解決される。しかし、段落流の場合には境界層厚が全体の流れに対し、相当薄いので、本文ではこの影響を無視したが、境界層の発達著しい場合には、排除厚を考慮すべきであると思われる。

(2) 抵抗則

a) 滑面の場合

滑面で、 $\frac{1}{7}$ 乗則の流速分布をもつ乱流の摩擦損失係数 f は、ブラジウスの実験公式

$$f = 0.3164 (\bar{u}D/\nu)^{-1/4} \dots\dots\dots(14)$$

\bar{u} : 平均流速, D : 管径

で表わされる。開水路の場合、 $\delta = D/2$ とおいて、せん断力の式を整理すると、

$$\frac{\tau_0}{\rho} = 0.0225 U^2 (U\delta/\nu)^{-1/4} \dots\dots\dots(15)$$

U : 最大流速

となる。

b) 粗面の場合

一方、粗面での完全乱流領域において、 f は、

$$f = C_1 (k_s/D)^{1/C_2} \dots\dots\dots(16)$$

C_1, C_2 : 定数, k_s : 相当粗度

と表わされる。ムーディ図表を参照して、大きなレイノルズ数に対しての係数 C_1, C_2 を求めると、近似的に

$k_s/D \leq 2 \times 10^{-3}$ のとき

$$C_1 = 7.76 \times 10^{-2}, C_2 = 4.95$$

$k_s/D > 2 \times 10^{-3}$ のとき

$$C_1 = 1.22 \times 10^{-1}, C_2 = 3.12$$

となる。 C_1, C_2 を式 (16) に代入し、式 (15) の誘導と同様の手続きにより、次に示す n 乗則の流速分布に対する抵抗則を得る。

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \left\{ \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \right\}^2 U^2 \frac{C_1}{8} \left(\frac{2\delta}{k_s} \right)^{-1/C_2} \dots\dots\dots(17)$$

(3) 底面せん断力の近似計算法

流線に急激な曲がりを生じる段落流では、圧力分布を

静水圧分布とみなして求めた式 (11) の運動量方程式で流れを厳密に表現することはできなくなる。しかし、従来の研究でもって、実用上十分な精度で流れ全体を知ることができる。著者らは、底面せん断力をできるだけ正確に求めようという立場にたち、そのためには、底面近傍の薄い層の流れの状態がわかれば十分であると考え。そこで、(1) において述べたような流れの場を想定して、式 (11) に基づいた底面近傍の流れの解析を行う (図-6(d) 参照)。

想定した流れの場においては、すでに述べた条件に加え、

○ 式 (12) で表わしたように、流速分布はべき乗則に従う。そして、べき数 n は流れの流下方向全域にわたって、同じとみなす (この仮定は著者らの実験範囲では正しい)。

○ 境界層外縁において、主流速 $U'(x)$ をもつ。段落点より十分上流では、流れは等流であり、そこでは $U'(x)$ は表面流速と一致し、境界層厚 δ は水深と一致する。

以上のように想定した流れの場における U', δ は式 (11) を満たすが、実際の段落水流場でのそれとは上流の等流部分以外においては等しくないことを断っておく。

ここでの目的である底面せん断力の算定は、滑面に対しては、式 (13) と式 (15)、粗面に対しては、式 (13) と式 (17) を連立させ、それぞれの点で、 U' を適切に定めて逐次計算を行うことにより算出できる。

なお、 U' としてポテンシャル解析による底面の流速 U を用いることの妥当性について、図-6(d) で説明を加えておく。

図-6(d) において、

- ① は実際の流速分布
- ② はポテンシャル解析による流速分布
- ③ は遠心力等を受けていない、ここで想定した流れの流速分布を示している。

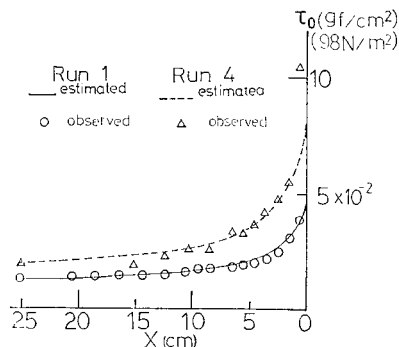


図-5 底面せん断力縦断面内分布 (2)

すなわち、ポテンシャル流 ② では水路底面が一つの流線になっており、その流線に沿っての流速を 0 としたときの底面付近の流れが、いま求めたい流れである。いまの場合には、底面付近の流線は直線であり、この付近の流管に対しては、外からの力は重力以外には作用しないから、 $\partial p'/\partial y=0$ である。 $\partial p'/\partial y=0$ と仮定した流れは、ポテンシャル流の底面の流速 U が、 y 方向に一樣に分布する流れとなる。したがって、想定した流れの U' として、ポテンシャル流 ② の底面流速 U を用いることは適当である。

言い換えれば、 U' に U を用いた Kármán の運動量方程式に見合う境界層分布に、流線の曲がりによる遠心力が働いて、 $\partial p/\partial y \neq 0$ の実際の流れ ① が生ずることになるが、底面付近ではこの $\partial p/\partial y$ がほとんどないため、近似的には ③ が底面近傍での実際の流れを表わすものと考えてよい。

なお、 δ はこのような流れにおいては、式 (13) により上流から逐次求めることができる。

このようにして算出された τ_0 を 図-5 に実測値とともに示す。図-5 は 図-4 に比べて実測値と計算値はよく合致しており、この方法が近似解法として、かなり精度のよいものであることがわかる。

(4) 近似計算法の検討

せん断力を求める (3) の方法の妥当性は、前に述べたように、Navier-Stokes の式に戻って検討する必要がある。これを解析的に解くことは困難であるから、圧力の項に着目し、想定した流れと、実際の流れとの差を Navier-Stokes の式で調べて、本解析法が妥当か否かを検討する。

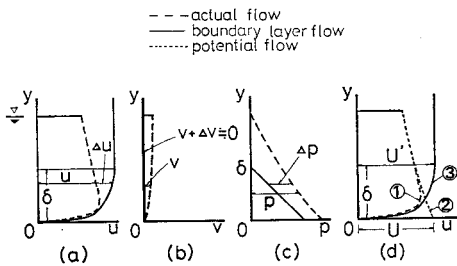


図-6 $u, \Delta u, v, \Delta v, p, \Delta p$ の定義図

流速、圧力は 図-6 のように表わす。ここでは、実際の流れの場合は u, v, p とし、想定した場合は、それぞれ、 $u+\Delta u, v+\Delta v, p+\Delta p$ とする。

Navier-Stokes 式中の y 成分の方程式

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \cos \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \dots\dots(18)$$

は底面付近以外では、 $v \ll U$ ではないため省略することはできない。すなわち、式 (18) の左辺の 2 つの項は

無視することができず、 y 方向の圧力分布は静水圧分布でなくなる。ポテンシャル流の計算から求められる圧力を式 (18) に代入して、前述の境界層方程式と連立して解いて u, v を求めることができれば、同時にせん断力 τ_0 を合理的に求めることができる。しかし、これは困難であるので、ここでは次のように考えて、ここで想定した流れが妥当なものであるかどうかを検討する。すなわち、実際の流れでは $\partial p'/\partial y \neq 0$ であり、 y 方向に力が作用して 図-6(d) の ① の流速分布になっているが、ここで想定した流れでは $\partial p'/\partial y=0$ としている。想定流に式 (18) を満足させる p が働いたとき、実際の流れ ① になるなら、想定流は、実際の流れの $\partial p'/\partial y=0$ のところ、すなわち、底面近傍の流れを近似しているといえる。そこで想定された流れでもって、式 (18) を満足させるために必要とされる力を考える。この力が実際の流れの中の圧力と等しくなるか否かを、実測の u, v および、想定された流れの $u+\Delta u, v+\Delta v$ を用いて検討する。換言すれば、想定された流れ ③ に、両者の圧力差 Δp を加えれば、想定された流れ ③ の $u+\Delta u, v+\Delta v$ が実際の流れ ① の u, v を表わすことになると考えてよいであろう。式 (18) を想定した流れの場に対して適用すると、

$$(u+\Delta u) \frac{\partial (v+\Delta v)}{\partial x} + (v+\Delta v) \frac{\partial (v+\Delta v)}{\partial y} = -g \cos \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p+\Delta p)}{\partial y} \dots\dots(19)$$

となりさらに変形すると、

$$\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\Delta u \frac{\partial v}{\partial x} + \Delta v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left\{ (u+\Delta u) \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + (v+\Delta v) \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right\} = -g \cos \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Delta p}{\partial y} \dots\dots(20)$$

となる。一方、実際の段落水流に対しては、式 (18) がそのまま、成立している。なお、想定された流れでは、 $v+\Delta v \neq 0$ と仮定していることを考慮して、式 (18) と式 (20) より、2 つの流れの差を求めると、

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial y} = \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \dots\dots(21)$$

となる。式 (21) に実測値 u, v を代入することにより、 $\partial \Delta p/\partial y$ の値は計算できる。しかし、 p の分布は基準値を与えないと求まらないので、便宜上、 $y=\delta$ の点の実測値 p の値より、水深方向に計算して式 (21) の妥当性、すなわち、想定した流れの妥当性を調べる。そのようにして求めた静圧の計算値が、図-7 において点線で示されている。図-7 では、実際の段落水流の静圧分布と、計算された静圧分布はほぼ似かよった形状を示しており、 U' として、ポテンシャル解析による底面流速 U

を用いることの妥当性が確認でき、 y 方向の圧力を静水圧分布とみなした式 (11) を使用して、実際の流れを、底面近傍では解析できることがわかる。ここで、 $\partial \Delta p / \partial y$ は底面のごく近傍では非常に小さいため、対数則とみなせる流速分布領域が存在すると考えることができるが、段落点ごく近傍においては、 $\partial \Delta p / \partial y$ は底面近傍においても無視できず、流線の曲がりやが激しい粗面の場合、 τ_0 の計算値に影響を及ぼすものと思われる。

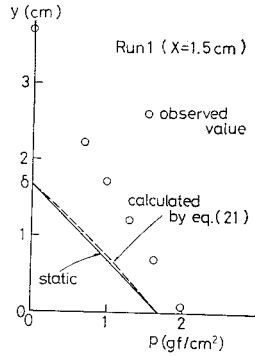


図-7 圧力分布

5. 段落ち部上流の平衡河床形状

移動床の段落ち部上流においては、底面せん断力が縦断方向に一様でないため、河床に洗掘、堆積を生ずる。上流からの給砂がある場合には、平衡な河床形状がそれぞれの流量、給砂量により定まるものと考えられる。まず、この平衡状態における水面形状、河床形状、流速分布、せん断力等を測定することにより、平衡状態における、底面に働く力のつり合い関係を調べてみる。

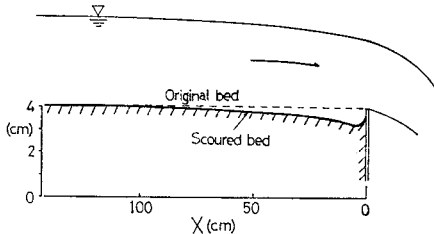


図-8 平衡河床形状

上流の等流部とみなせる場所での平衡給砂量を給砂した場合、Run 5 では、水路床の平衡形状は図-8 のようになる。このとき、水路床の粒子に働く、粒子の離脱に有効と考えられる力は、上流から下流端まで各点において等しいことが予想される。ここで、この有効な力について考察を加える。図-9 に示す傾斜角 β の斜面上に静止している粒子に着目すると、粒子の離脱限界

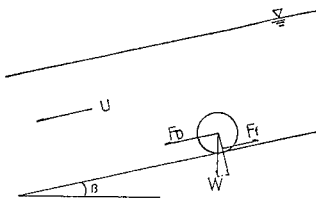


図-9 斜面上の粒子に働く力

のとき、その粒子に働く力は、流れ方向に対して、次のようなつり合い関係になる。

$$F_D + W \sin \beta = F_f \dots\dots\dots(22)$$

F_D : 流体力, W : 粒子の水中重量,

F_f : 摩擦力

$W \sin \beta$ は重力の流れ方向成分である。浮力の作用方向は、段落水流のように流線に曲がりを生じている場合には、定めることは難しい。ここでは簡単のため、重力と反対方向に働くことと仮定する。このとき W は、

$$W = (\rho_s - \rho_w) V g \dots\dots\dots(23)$$

ρ_s : 粒子の密度, ρ_w : 水の密度,

V : 粒子の体積

となる。水路床にある粒子に働く力のつり合い関係を検討するためには、式 (22) の各項を、次のように単位面積当たりの力に換算しておいた方が便利である。

平面上に粒子を密に敷いた場合、単位面積 (1 cm^2) 当たり存在する粒子の数は、粒径を $d(\text{cm})$ とすると、 $1/d^2$ 個であり、その体積は $\pi d/6(\text{cm}^3/\text{cm}^2)$ となる。すなわち、重力の流れ方向成分は

$$\tau_g = (\pi d/6)(\rho_s - \rho_w) g \sin \beta \dots\dots\dots(24)$$

で表わされ、摩擦力の項は

$$\tau_f = (\pi d/6) \mu_1 (\rho_s - \rho_w) g \cos \beta \dots\dots\dots(25)$$

で表わされる。ここで、離脱限界の摩擦係数 μ_1 は、限界掃流力 τ_c と τ_f を等値と考えることにより

$$\begin{aligned} \tau_c &= c(\rho_s - \rho_w) g d \cos \beta \\ &= (\pi d/6) \mu_1 (\rho_s - \rho_w) g \cos \beta \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

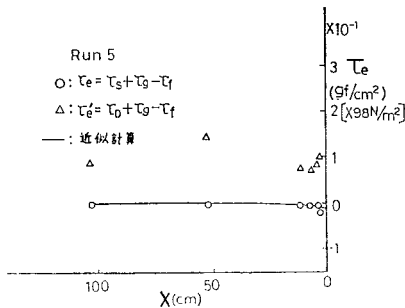
c : 定数 ($=0.05$)

の関係から求めることができ、 $\mu_1 = 9.55 \times 10^{-2}$ となる。流体力として実験より求めた底面せん断力、 τ_s を用いる。さらに、有効なせん断力 τ_e を次のように定める。

$$\tau_e = \tau_s + \tau_g - \tau_f \dots\dots\dots(27)$$

段落ち部で移動床水路末端に固定せきのある場合には、水路床は洗掘により、図-8 に示すように、急な逆勾配となる。したがって、従来の限界掃流力の考え方に、重力効果を加味することが必要となり、式 (27) のような、有効な力を考えねばならなくなる。

また、水路床が洗掘された後、せきの上流側面に接して存在する粒子のうちの最上部のものが、せきを越えて流出しなくなったとき、すなわち、粒子がその場にとどまって、移動しなくなったとき、水路床は安定する。もし、この粒子が流出したなら、その上流側の粒子は押えを失って移動し始める。こういうことが次々と上流に伝わっていくことになると、その状態は安定床といえない。すなわち、最終的な平衡水路床は、水路下流端の粒子の存在位置により上流の床高が決定されることになる。重力を加味した実質的な限界掃流状態 $\tau_e = 0$ で決定されると考えてよい。Run 5 の実測値を用いて計算された縦断方向の τ_e の分布を図-10 に○印で示す。 $\tau_e = 0$ は水路床に働く力がつり合っている状態、すなわち式



図一十 有効な力の縦断面内分布

(22) の成立する状態であり、粒子が静止を保つ限界値を表わす。つまり、水路床粒子は実質的な限界掃流状態にある。一方、 $\tau_e > 0$ になると粒子は移動を開始する。図一十において、 τ_e を用いて求めた τ_e の実験値が $\tau_e \approx 0$ を示すことから、 $\tau_e = 0$ は平衡状態というものに対する基準となり得ることを示している。同図には、流体力として τ_s でなく、抗力 D より求められた力 τ_D を用いて計算した τ_e' を併せて記してある。なお、抗力 D は、粒径範囲内の流速分布と、抗力係数 $c_D = 0.5$ の仮定のもとに算出し、 τ_D に換算した。そして、摩擦係数 μ_2 は、球形粒子の安息角 28° (実験値) から、 $\mu_2 = 0.53$ とした。抗力を用いて求めた τ_e' は、 $\tau_e' > 0$ となっており、何らかの理由で平衡水路床より上方に位置する粒子には、移動するのに十分な力が加わっていると判断できる。すなわち、平均的な水路床面にある粒子 (実質的な限界掃流状態にある粒子) はこの状態では移動せず、上流より流下移動してきた粒子は、その面より上方にあるため、そのまま流下していくことを意味している。しかし、これは平均的な話であり、現実には河床面に多少の凹凸があり、河床面の一部の粒子は移動を開始し、やや低い位置にある粒子の上に、上流からきた粒子が停止するなど、水路床粒子の交換が行われながら、平衡形状を保つものと考えられる。

以上より、粒子の離脱に有効な力 τ_e の特性が明らかになったので、4.(3) で提案した底面せん断力の近似計算法を Run 5 に適用する。その結果を図一十に実線で示す。ポテンシャル流としての解析の際は、水面形状および水路床形状に平衡河床形状での実測値を用いている。計算で求められた τ_e の分布は実測と、よく一致しており、現実の砂防ダム、床止め等の河床形状の解析に、この手法が有用であることを示している。

次に、水面形状は既知のものとして、平衡河床形状を推定する方法を考える。初期条件として洗掘が生ずる前の平坦な段落ち部上流の河床形状を与え、流れ全体をポテンシャル流として解析を行う。先に提案した方法で、底面せん断力を算出し、式(27)の河床の平衡条件 $\tau_e = 0$ を満足する河床形状を決定する。この河床形状を用い

て、再びポテンシャル解析を行う。この操作を繰り返して、平衡条件を満足するようになるまで行えば、平衡河床形状を定めることができる。

この例のように、洗掘のため、底面が曲率をもつ場合には底面付近の境界層流れも、流れと直角方向に力が作用することになり、 $\partial p' / \partial y \neq 0$ となるので、本来ならば、境界が曲率をもつ流れとして解析しなければならない。しかし、本例の程度の洗掘では曲がりわずかであるため、直線境界とみなし、 $\partial p' / \partial y = 0$ として解析しても、比較的精度よく洗掘形状を推定できる結果を得た。さらに、湾曲度の大きい底面形状の場合については、今後検討するつもりである。

6. おわりに

固定床および移動床の段落水流の実験、およびポテンシャル流と境界層流を組み合わせた解析を行い、次のような結論を得た。

- (1) 段落ち流における境界層の近似計算法を開発した。
- (2) この手法をポテンシャル流と組み合わせることにより、2次元不等流性の強い流れの底面せん断力を精度よく推定できるようにした。
- (3) 段落ち流の平衡河床形状を推定する手がかりを与えた。

なお、本論文における解析では、実測により得られた水面形状を用いており、水面形状を理論的に得ることができれば、底面せん断力および河床形状の推定に、非常に、有効な手法となる。Fr 数が1以上の段落水流に対しては Markland の方法、Rouse の水面形状等を用いることにより、水面形状の概略を推定することが可能である。しかし、Fr 数が1以下の段落水流に対しては、ナップの形状のみが、岩崎式により得られるのみであり、静圧が静水圧分布でないため、水面形計算が困難となっている。現在考えられる水面形推定法としては、実験例等から、縦断方向の圧力補正係数を推定し、それを用いて水面形計算を行い、その水面形状を用いてポテンシャル流として解析し、圧力補正係数を求め、再び水面形計算を行い、最終的に用いた圧力補正係数と、求められた圧力補正係数が一致するまで計算を繰り返す等の方法が考えられるが、非常に手数がかかり、精度にも疑問がもたれる。今後、この方面に対する研究がなされ、より精度よく底面せん断力および河床形状の推定がなされることを期待したい。

最後に、本研究において多大なご助力をいただいた中国電力(株)田中 等氏に深甚なる謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Rajaratnam, N. and D. Muralidhar : Characteristics of the rectangular free overfall, J. Hydraulic Research, 6, pp. 233~258, 1968.
- 2) Rouse, H. : Discussion of "Energy loss at the base of a free overfall", Trans. ASCE, Vol. 109, pp. 1383~1387, 1943.
- 3) 岩崎敏夫：段落水流の水理現象に関する実験的考察，土木学会誌 38-6, pp. 241~246, 1953.
- 4) Southwell, R. and G. Vaisey : Relaxation method applied to engineering problems. XII. Fluid motions characterized by 'Free' stream-lines, Phil. Trans. Series A, Vol. 240, 1946-11.
- 5) Markland, E. : Calculation of flow at a free overfall by relaxation method, Proc. of the Institution of Civil Engrs. England, No. 686, 1965.
- 6) 吉川秀夫・片山道夫・田中 等・福井吉孝：段落ち部の水理，第26回水理講演会論文集，pp. 673~678, 1982.
- 7) Preston, H. : The determination of turbulent skin friction by means of pitot tubes, J. Roy. Aero. Soc., Vol. 54, 1954.
- 8) 日野幹雄：流体力学，朝倉書店，1974.

(1983.4.18・受付)