

掃流砂の機構に関する基礎的研究

FUNDAMENTAL MECHANISM OF BED LOAD TRANSPORTATION

吉川秀夫*・藤堂正樹**・井筒庸雄***・関根正人****

By Hideo KIKKAWA, Masaki TOHDOH, Tsuneo IZUTSU
and Masato SEKINE

1. 序 論

流砂の運動を確率現象としてとらえた Einstein¹⁾ は、水流の乱れが河床粒子に及ぼす変動揚力に注目して理論を展開した。Einstein 以後、多くの研究者によって導かれた掃流砂の理論は、形式的にはおのおの異なっているが、必ずしも対立するものではなく、現象を互いに補いながら説明していると思われる。これらの研究成果としての掃流砂量算定式についても数多く提出されており、現象の複雑さを物語っている。こうした現象の複雑さゆえに確率論的取扱いが有効となってくる。掃流砂の場合は河床上のごく近傍での現象であり、河床材料の詰まり具合、粒子の大小および相当粗度、流速分布等、厳密な評価が困難なものが多い。物理現象は本来、関与する要因を明らかにすることができれば、原因に対して決定論的に結果が出るべきものである。しかし掃流砂現象のように複雑な要因が絡み合うと、その要因を明らかにすること自体が大きな問題となり、その複合現象を解析的に調べることは非常に困難である。そこで掃流砂現象を大きく、粒子の河床からの離脱と移動とに分け、おのおのが確率量であることを念頭に置きつつ平均値を取り扱い、さらにその積事象としての流砂量を検討し、種々の変動要因の掃流砂量に及ぼす影響を明らかにすることを試みた。

まず、この研究に対する前提を示す。

- (1) 掃流砂とは、河床粒子と絶えず交換を伴う状態の流砂を指し、浮流砂、集合流動はここでは扱わない。
- (2) 流れは等流とする。
- (3) 掃流砂量は、外観上は定常かつ平衡状態にあり、局所的な浸食も堆積も生じない。

(4) 個々の掃流砂の移動開始・停止およびその運動は、場所的・時間的に変化するが、おのおのの統計的性質は均質であるとする。

(5) 水路床は移動床で平坦の状態にある場合を取り扱う。

(6) 流れの 1 断面において現象を取り扱う Euler 的な方法により掃流砂現象をとらえる。

掃流砂運動は河床粒子の存在状態およびそれに加わる外力がきわめて複雑であるため、その運動は、平均的な意味においても力学的に厳密に記述することは困難である。しかし粒子の離脱・流送・停止の各過程において作用する力、粒子自身の待ち状態等が確率分布をもつ量として正確に表現できれば、各過程における力学的機構を把握できる。一方、工学的に重要な量は掃流砂量であり、これは離脱・流送過程に関する諸量の積として表現できよう。その結果、外観上は定常・平衡という条件下であっても、厳密には掃流砂量にも変動がみられるはずである。このことは、平衡時の掃流砂量も確率分布量であることによる。この点に掃流砂量の変動要因を探る意味が見出せよう。

次に前提条件の (6) に示すように、流れの 1 断面において現象を表現する際に必要な物理量について述べる。確率論モデルを初めて採用した Einstein は、粒子の運動を Lagrange 的に追跡し、一粒子の停止時間 (rest-period) と移動距離 (step-length) とを確率変数としてモデルを構成した。しかし、掃流過程を Euler 的にみた場合、単位幅掃流砂量 q_B は

$$q_B = \int c(x) \cdot v(x) \cdot dx \dots\dots\dots (1)$$

により表わされる。ここで $c(x)$: 河床上 x の位置における移動粒子濃度、 $v(x)$: x の位置における移動粒子速度である。さらに、 $c(x)$ について x 方向に掃流高さまでの積分を N とする。 N の値は、河床単位面積上で任意の瞬間に掃流砂として流送されている粒子体積である。平均的な意味では一定の条件下では N は定数とな

* 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科

** 正会員 工修 パシフィックコンサルタンツ (株)

*** 工修 電源開発 (株)

**** 学生会員 早稲田大学大学院理工学研究科

る。この N の値と、 $c(z)$ の z 方向分布を考慮した粒子の平均移動速度 \bar{V} とを用いれば式 (1) は、

$$q_B = N \cdot \bar{V} \dots\dots\dots (2)$$

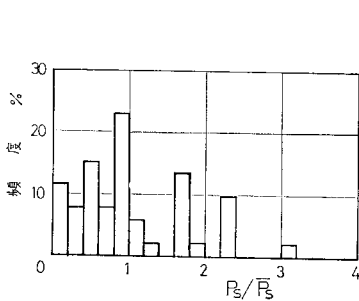
と表わされる。ここに N, \bar{V} は定常・平衡の場合には、流れの 1 断面の観測から得られる量であり、これらの諸量は平均とともに分散をもつことから、平衡状態においても q_B が確率分布量となることは明らかである。

一方、佐藤、吉川、芦田²⁾ は掃流砂現象を確率論的手法により、Euler 的に調べている。この点では著者らの研究と同じである。しかし粒子の河床からの離脱に対しては、“揚力が河床粒子に及ぼす力積は、重力が掃流層内の粒子に与える力積に等しい” という考え方である。ところが粒子に作用する揚力は抗力に比べて小さく、また、粒子が離脱するのに十分な時間は持続しないと判断されるので、離脱に対しては有効とは考えられない。そこで本研究では、粒子の離脱に最も有効な力は抗力であると、抗力により粒子が受け取るエネルギーについて以下で検討する。

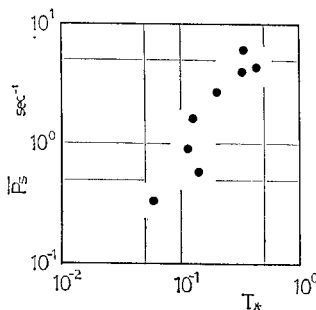
2. 河床粒子の離脱率 P_S

(1) 河床粒子の離脱についての考え方

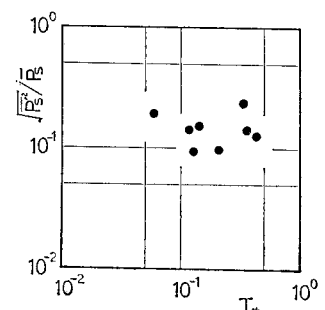
河床の単位面積上を移動中の粒子体積 N は、河床上の粒子濃度の総和と同義である。マクロな意味で定常・平衡・平坦な河床においては、粒子の離脱率 (pick-up-rate) より N を求めることができる。粒子の離脱率 P_S は、Einstein 以来、粒子の停止時間 (rest-period) の逆数で表わされるとされてきた。辻本³⁾ も同様の立場より P_S を流体力から直接推定している。本研究では、Einstein 流に粒子が揚力のみにより飛び出すとは考えず、流体から受ける抗力により、その下流側隣接粒子を乗り越えたときに移動を開始し、その移動粒子が河床粒子と衝突を繰り返す、跳躍あるいは乗り越しを続けながら流下するものとした。そこで静止粒子がその下流側隣接粒子を乗り越えるのに必要なエネルギーを基本量として、 P_S を流体力から直接推定することを考える。



図一 P_S の頻度分布例



図二 P_S の平均値と τ_* の関係



図三 P_S の変動係数と τ_* の関係

(2) P_S の実験的評価法

P_S は、河床上の任意面積に注目したとき、その面積内の表層に存在する粒子体積のうち、“静止の状態から飛び出す”粒子体積の単位時間当たりの割合で表わされる。具体的には、着色したトレーサー粒子を他の粒子と同じ状態になるように河床上に置き、河床上の任意に定めた区画面積に着目する。測定開始後、この着目面積内からトレーサー粒子が移動を開始するごとに、その時刻と、残留トレーサー総数 (上流から移動してきてその面積内に静止したものを含む) を観測し、単位時間当たりの離脱率を計算する。

なお、粒子の移動は、静止粒子が移動を開始する場合のみを考え、移動中の粒子が河床粒子との衝突によりさらに移動を持続する場合は、新たな離脱とはしない。また、著者らの水路での観察によれば、移動粒子が静止粒子に衝突し、運動量交換により静止粒子の方が移動開始するのは非常にまれであり、離脱率には含まれていないものとする。これは、移動粒子が停止する際には、この実験の範囲では、その運動量を河床粒子に広く分散させるためと思われる。以上のように考えると、平衡な掃流状態においては、任意面積当たりで、静止粒子が移動を開始する量と、移動粒子が停止する量とは、平均的には等しいと考えられ、このことは著者ら⁴⁾ の実験によっても確かめられている。

次に、 P_S の変動の実態を知るため、実測例について調べてみる。上記の方法により実測した P_S の頻度分布 (すなわち、1 秒当たりの離脱率のばらつき) の一例を 図一 に示す。実験中の観測によれば定常・平衡とみなせる状態であっても、 P_S に分散が生じていることが認められる。また、 P_S の平均値 \bar{P}_S 、および変動係数 $\sqrt{\overline{P_S^2}} / \bar{P}_S$ と無次元掃流力 $\tau_* (= u_*^2 / Sgd)$ (u_* : 摩擦速度、 S : 水中比重、 d : 粒径) との関係について実測値より調べたものが、 図二、三 である (なお、 図一、二、三 は、約 100 個のデータをもとに得られた結果である)。 図二 より、この実測範囲では τ_* と \bar{P}_S の間には正の相関があり、 \bar{P}_S の大小を支配するのは主として

τ_* であることがわかる。一方、変動係数については、この実測範囲では τ_* に対してほぼ一定とみなせよう。このことは、 P_S の頻度分布形が τ_* の変化に伴い、相似性を保ちながら変動することを示す。したがって P_S の分布形が対称であるならば、 τ_* の変化に対してもその対称性を保持することを示している。

(3) P_S の推定

実験結果に基づき、粒子1個の初期移動を流体力との関連からとらえ、以下のような河床砂の飛び出しモデルを考える。流れの場に置かれた1つの粒子が、流体から受ける力は図-4(a) のようになる。

$$\left. \begin{aligned} W_0 &= (\rho_s - \rho_f) g A_2 d^3 \\ D &= (1/2) C_D \rho_f A_1 d^2 u^2 \\ L &= (1/2) C_L \rho_f A_1 d^2 u^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

(D : 粒子に作用する抗力, L : 粒子に作用する揚力, ρ_s : 粒子密度, ρ_f : 流体密度, A_1 : 面積に関する係数, A_2 : 体積に関する係数, u : 粒子に作用する代表流速, θ : 着目粒子 A の重心と下流側隣接粒子の重心とを結ぶ線が鉛直線となす角)

河床粒子近傍の流れは乱流であり、その乱れ成分の出現頻度は正規誤差分布に従うと考えるのが適当であろう。また河床材料に関する量としては、角度 θ がある分布則をもつと考えられるが、まず、これらの量の平均値を用いて、移動限界時の力のつり合いを考えれば、

$$D_C \sin(\pi/2 - \theta) = (W_0 - L) \sin \theta \dots\dots\dots (4)$$

ここに D_C は河床粒子に働く移動限界時の抗力である。流速について、 \bar{u} : u の時間平均流速, u' : u の \bar{u} からの変動流速とすれば、

$$u = \bar{u} + u' \dots\dots\dots (5)$$

と書き表わされるから、つり合い状態の流速を u_c とすれば、式(3)より

$$\bar{u} + u' = u_c = \left\{ \frac{2 A_2}{A_1} \frac{\tan \theta}{(C_D + C_L \tan \theta)} \cdot \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} - 1 \right) g d \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (6)$$

となる⁵⁾。 $D < D_C$ ($u < u_c$) のときは、粒子は下流へ移動しないが、 $D > D_C$ ($u > u_c$) ならば、下流への移動が可能である。流れの乱れ成分 u' の確率分布の累積分布関数を $F(u)$ とすると、下流へ移動することが可能な状態、すなわち $D > D_C$ という状態の生起する確率 P_0 は

$$P_0 = 1 - F(u_c) \dots\dots\dots (7)$$

となる。図-4に示す粒子 A の初期移動は、図-4(a) から (b) への重心上昇をもって“完了”となり、粒子は河床より“飛び出した”と考える。この重心上昇量 h は

$$h = kd(1 - \cos \theta) \dots\dots\dots (8)$$

kd は粒子 A と下流側隣接粒子の重心間距離の $x-z$ 平面への正射影である。粒子 A が h だけ上昇するのに必要なエネルギーの最小限界値 E_C は

$$\begin{aligned} E_C &= (\rho_s - \rho_f) g A_2 d^3 h \\ &= (\rho_s - \rho_f) g A_2 k (1 - \cos \theta) d^4 \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

となる。

次に代表流速 u の流体から静止している粒子が離脱を完了するまでの時間(離脱完了時間)内に粒子 A に作用する運動エネルギーを考える。粒子 A に作用する離脱完了時間内に流体質量は、 $\{\rho_f A_1 d^2 u$ (離脱完了時間)} と考えられる。粒子の移動を考える場合には、 $u > u_c$ を満足せねばならない。この離脱完了時間のうち P_0 の割合で $u > u_c$ の条件を満たすので、離脱完了時間内に、 $P_0 \cdot$ (離脱完了時間)が粒子の移動に關与する。したがって、この離脱完了時間内に粒子移動に有効に作用するエネルギー E は、

$$\begin{aligned} E &= \beta \{ (1/2) \rho_f A_1 d^2 (u | u > u_c) \\ &\quad \cdot P_0 \cdot (\text{離脱完了時間}) \} \dots\dots (10) \end{aligned}$$

となる。ここで β は流体質量の粒子への作用程度、および後流の影響を考慮したエネルギー補正係数であり、流れのもつエネルギーのうち、粒子移動に有効に働くものの割合を示す。なお、具体的に β を決定するにあたっては、流速の粒子への作用位置や粒子近傍の平均流速が作用すると仮定したこと、粒子相互間の高さ方向の位置、他の粒子が存在することによる抗力係数の変化、さらには粒子の形状による影響等を考慮に入れ、この値により現象を単純化したことによる補正を行うものとする。

次に P_0 について考える。流れの乱れ成分 u' の出現頻度分布は、正規誤差分布に従うと考えられる。 u の確率密度関数を $f(u)$ とすれば、

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(u-\bar{u})^2}{2\sigma^2}\right] \dots\dots\dots (11)$$

\bar{u} , σ^2 は u の平均値および分散である。

$$r = \frac{u - \bar{u}}{\sigma} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{u}{\bar{u}} - 1 \right) \dots\dots\dots (12)$$

を用い変数変換する。なお、 η は u の変動係数である。すると式(11)は次のように規準化される。

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \dots\dots\dots (13)$$

したがって

$$P_0 = \int_{r_C}^{\infty} \phi(r) dr \dots\dots\dots (14)$$

$$r_C = \{(u_c/\bar{u}) - 1\} / \eta \dots\dots\dots (15)$$

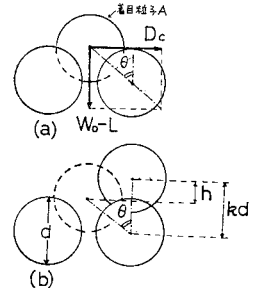


図-4 記号図

である。式 (10) 中の $(u|u > u_c)$ の代表値として u_c を越える流速の平均値を \bar{u}_{ex} とすれば、 \bar{u}_{ex} は式 (13), (14), (15) より

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ex} &= \sigma \int_{r_c}^{\infty} \{r\phi(r)/P_0\} dr + \bar{u} \\ &= \sigma \{ \phi(r_c)/P_0 \} + \bar{u} \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

と表わされる。離脱完了時間内に、粒子移動に有効なエネルギーの平均値 \bar{E} は、式 (16) を用いて

$$\bar{E} = \beta \{ (1/2) \rho_f A_1 d^2 \bar{u}_{ex} P_0 (\text{離脱完了時間}) (\bar{u}_{ex})^2 \} \dots\dots\dots (17)$$

となる。粒子1個を移動させるのに必要な最小エネルギーは E_C であるから、単位時間当たりの粒子1個当たりの平均離脱率 \bar{P}_S は

$$\bar{P}_S = \bar{E} / \{ E_C \times (\text{離脱完了時間}) \} \dots\dots\dots (18)$$

式 (9), (17) を用いて、式 (18) は次式のように表わされる。

$$\bar{P}_S = \frac{1}{2} \frac{\beta}{k(1-\cos\theta)} \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_s - \rho_f} \right) \frac{\bar{u}_{ex}^3}{gd^2} P_0 \dots\dots\dots (19)$$

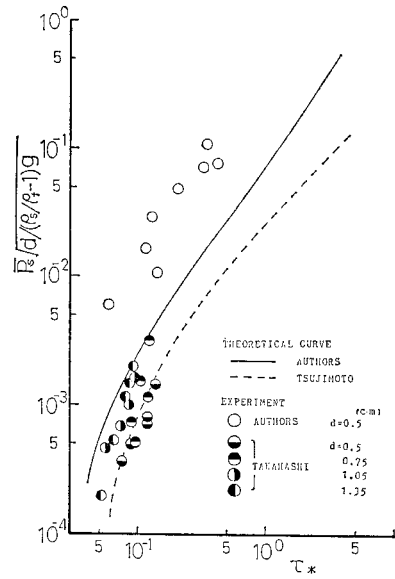
なお、式 (19) について若干の検討を加えておく。式 (19) 中の \bar{u}_{ex} については、1回の \bar{u}_{ex} の持続時間が問題となる。式 (19) 中の \bar{u}_{ex} は、これが単位時間に生起する総時間数より生起確率 P_0 を算定している。したがって1回の持続時間で離脱不能の場合も、離脱に有効な時間として扱っている。具体的に述べると、 u_c を越えた流速による離脱完了時間当たりの平均運動エネルギーを \bar{E} 、 \bar{u}_{ex} の持続時間を t とすれば、 t 時間内に実際に河床から離脱する粒子個数 m は、ガウスの記号を用いて、次式のようになる。

$$m = \left[\frac{\bar{E} \cdot t}{(\text{離脱完了時間}) \cdot E_C} \right] \dots\dots\dots (20)$$

実現象の m は離散量となるために、 u_{ex} の持続時間にかかわる補正が必要である。ここでは、この補正は係数 β に含まれるものと考えた。

そこでこの式 (19) を用いて、一様粒径河床に対して、 \bar{P}_S の推定を試みた。なお、計算では、水流による掃流実験をもとに、河床材料を完全球と考え、 $A_1 = \pi/4$, $A_2 = \pi/6$, $k = \sqrt{3}/2$, $C_D = 0.4$, $C_L = 0.18$ として、測定値に最も適合すると思われる $\beta = 2.5 \times 10^{-4}$ を用いた。

また、粒子に作用する平均代表流速は、相当粗度 k_s の0.2倍の位置での流速とし、流速の対数分布則から求めた。この位置は粗度頂近傍に相当している。流速の変動係数である $\eta = \sqrt{\bar{u}^2}/\bar{u}$ は著者らが風洞内の空気流を hot-wire により測定した実験結果および Laufer のデータ⁶⁾等を参考に、 $\eta = 0.45$ と定めた。もう1つの大きな要素である“河床状態による離脱しやすさ”を表わす θ については、理論上 $25^\circ \sim 90^\circ$ の範囲にあるが、河床面の観測から、 $\theta = 45^\circ$ とすることが、この実験の範囲で



図—5 \bar{P}_S と τ_* との関係

は適切であることが知られた。以上に示した諸値は、おのおののパラメーターの平均値であり、これらが分散をもつ場合については 4. で検討する。

これより摩擦速度 u_* がわかれば、式 (6), (12), (13), (14) より P_0 が求まり式 (19) より \bar{P}_S が計算できる。式 (19) および辻本³⁾による計算値と実測による \bar{P}_S をともに比重と粒径を用いて無次元化し、

$$\bar{P}_S \sqrt{d/(\rho_s/\rho_f-1)g}$$

とし、 τ_* に対する関係として 図—5 を得た。ここで式 (19) の無次元化量は、粒径および比重にはよらず、 τ_* のみの関数となっており、また、実測値ともよい対応関係にあるといえよう。

なお、式 (19) 中の β には、まだ問題があるものの、今回の実測の範囲では式 (19) を \bar{P}_S 推定の近似式と考えてよい。さらに大きな τ_* の場合には、 \bar{P}_S の実測が非常に困難でありかつ、平坦河床ではなくなるので、今後の研究を待つこととする。

3. 粒子濃度の平均移動速度

移動中の粒子は河床粒子との衝突により鉛直方向 (z 方向) に分布する。一般に速度は河床上の位置により異なるので、その結果、粒子速度も z 方向に分布をもつことになる。掃流粒子の z 方向存在分布の確率密度を $f(z)$ ⁷⁾ とする。なお、 $f(z)$ は掃流層内のみ考える関数とし、浮流分(流れの乱れ成分により分布するもの)については含まないものとする。 z の位置における粒子速度は、平均値 $\bar{V}(z)$ のまわりに分散をもつ確率量であろう。 $\bar{V}(z)$ およびその分散についての理論的取扱いは

はさらに研究を要するが、著者らは実験水路での観測により、さまざまな水理条件下での z の位置における粒子速度を求めた。実測よりさまざまな水理条件下(τ_* により分類)での $\bar{V}(z)$ および前述の $f(z)$ が得られるので、その積をとりこれを z に関して積分して粒子濃度の平均移動速度として表わすことを試みた。つまり、掃流層内の粒子濃度の平均値が、この平均速度で移動すると考える。この粒子濃度の平均移動速度を \bar{V} とすれば、 H を掃流層厚さとして、

$$\bar{V} = \int_0^H \bar{V}(z) \cdot f(z) dz \dots \dots \dots (21)$$

\bar{V} はあくまでも掃流運動中の粒子の出現頻度を考慮した重み付きの平均移動速度である。この点、辻本³⁾の“砂れき群平均移動速度”は、粒子をLagrange的に追ったときの平均離脱率と、平均移動距離との積として表現しており、速度項の分母には時間の次元として、rest-periodを用いているので、著者らの \bar{V} とは根本的に異なる。ここで、 V について若干の検討を加えてみる。もとより粒子の速度は、流速分布、粒子の材質、さらには掃流層厚さや、河床粒子との衝突等により決まる物理量であり、確率量として扱うべきである。 τ_* 等の水理条件により平均値 \bar{V} が決定されるとしても、分散や、分布形も重要である。

ある任意断面について、移動中の各粒子に着目する。粒子の運動形態を考えると、加速度は正、負、0のものがあり、正、負の機会は同等であろう。すると粒子の速度 V の頻度分布は、平均値のまわりに対称分布することになる。実測による V の頻度分布の一例を示せば、図-6(データ数250個)のようになり、上記の推論が正しいことがわかる。掃流砂量は粒子速度 V とその速度で動く粒子体積の積の総和で求めることができるので、 \bar{V} よりも ΔV だけ大きい速度で動く粒子と小さい速度で動く粒子とが同数だけ存在する場合には、両者が ΔV によって掃流砂量へ及ぼす影響は相殺し合うこ

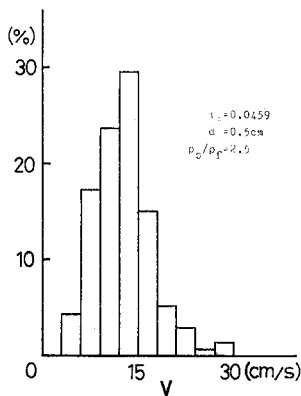


図-6 V の頻度分布例

となる。したがって、掃流砂量を算定する際に、代表値を \bar{V} で表現することは何ら問題はないと考えられる。

次に著者らの \bar{V} を水理条件および粒子の特性と関連づけることを試みた。著者らの実測結果と、Francis⁸⁾による移動床での実験結果の \bar{V} を \sqrt{Sgd} (ただし、 S :水中比重)で無次元化し、無次元せん断応力 τ_* との関係を調べてみると、図-7に示すように一定の関係が得られた。なお、Francisの実験結果では、沈降速度 V_g が示されているので、この値から代表粒径 d を算出し、 τ_* を求めている。Francisの実験では、比重の小さい粒子も含まれているので、 τ_* としては10程度の大きな値まで求められている。 τ_* がこの程度になると、浮流分も混じる可能性もあるが、Rouse⁹⁾の浮遊砂濃度分布式の指数 Z

$$Z = V_g / \kappa u_* \dots \dots \dots (22)$$

(ただし、 V_g :粒子沈降速度、 κ :カルマン定数)を算出すると、 Z の最小値は1.8程度である。 Z の値からみて、ここではすべて掃流運動であると考えた。図より明らかなように、 \bar{V}/\sqrt{Sgd} と τ_* の間には

$$\bar{V}/\sqrt{Sgd} = 7 \times \tau_*^{0.72} \dots \dots \dots (23)$$

なる関数関係がみられる。 P_S と同様、 V も τ_* に対して決定論的に決まる性質のものではなく、あくまでも確率量であるが、その平均値は τ_* に対しては式(23)のような関係となる。以下の \bar{V} の計算には式(23)を用いる。

4. 掃流砂量の検討

掃流砂量は、式(1)に示すとおり、粒子濃度分布と移動粒子速度の積の掃流層についての積分として表わされる。ここでまず、式(1)およびその近似解である式(2)について、考察を加えておく。

Euler的に現象をとらえ、さらに2次元(x, z)的に掃流砂現象を考えれば、濃度式は底面濃度 N_B (水路床にある粒子濃度)から z 方向に拡散し、 V_g の速度で沈降する拡散方程式型となり、これを z 方向に積分したものが掃流砂の濃度総量 N を与える。前提条件の項に示したとおり、定常・平衡の仮定より

$$\partial N / \partial T = 0 \dots \dots \dots (24)$$

$$\partial N / \partial x = 0 \dots \dots \dots (25)$$

である。したがって、浮流砂の場合と同様に z 方向のみの考察で解が得られる。すなわち、 N を河床粒子の離脱率 P_S をもとに推定できれば、掃流砂量が求まることになる。なお、式

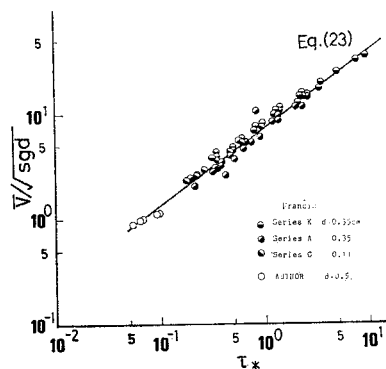


図-7 \bar{V} と τ_* との関係

(25) については若干の問題が残る。式 (25) を解くと、 $N=const.$ となる。一定な濃度のうちわけは、河床粒子と交換を行うもの、交換に長時間を要し非常に長い距離を流送されるもの、と大きく2つに分けられる。掃流砂は前者に相当し、後者は wash-load と考えるべきであろう。掃流砂現象の場合、その拡散は、観察結果によれば、移動粒子と河床粒子との衝突により引き起こされると判断される。これに対し浮流分は、流れの“乱れ”によるもので運動形態が異なる。掃流砂の場合、移動粒子の分布確率密度 $f(z)$ は浮流砂の場合とは形が異なるであろうが、浮流砂の場合の拡散式に相当している。

以上の議論に基づき、単位幅掃流砂量 q_B を次式により表わす。

$$q_B = N\bar{V} = \delta N_B P_S \text{ (単位時間) } \bar{V} \dots\dots\dots(26)$$

式 (26) 中 $\delta N_B P_S$ (単位時間) は、河床粒子との交換を伴いながら、河床単位面積上に移動状態で存在する粒子体積、すなわち濃度総量を表わす。 \bar{V} は、その平均移動速度である。なお、著者らは濃度総量を単位時間当たりの離脱率 P_S より予測しており、その際に時間の次元をもつ量が必要となる。ここで、この量として用いる $\delta \times$ (単位時間) は、現象を Euler 的にみた場合に、個々の粒子の現象の集積により濃度が定常化するのに要する時間を意味し、Lagrange 的にみれば移動持続時間に相当すると考えられる。さらに、単位時間とは、 P_S がその単位として持っている時間スケールのことであり、したがって、 δ は、濃度総量と単位時間における離脱体積との比として定められる。単位時間の定め方により δ の値は当然異なる。一方、式 (26) を特定粒子に注目する Lagrange 的立場で解釈すれば、 $N_B P_S$ は単位時間当たり、単位面積当たりからの離脱体積を表わし、 $\delta\bar{V}$ (単位時間) は距離の次元をもつので、これは step-length と同等の意味をもつ。 \bar{V} については式 (23) が得られているので、step-length を扱う研究者^{3), 10), 11)} の実測値を参考に τ_* を媒介として δ を推定した。その際 δ は step-length \bar{L} と $\bar{V} \times$ (単位時間) との比と考え、次式のような解釈をした。式中 d は粒径、 S は水中比重を直し単位時間は1秒とした。

$$\delta = \frac{\bar{L}}{\sqrt{Sgd} \times \text{(単位時間)}} \bigg/ \frac{\bar{V}}{\sqrt{Sgd}} \dots\dots\dots(27)$$

図-8 に結果の一例を示す。各プロットは $\bar{L}/\{\sqrt{Sgd} \times$ (単位時間) $\}$ を示す。これより δ は 1/2~2 程度であることがわかった。なお、高橋¹¹⁾ の data では step-length の大きな値をもつものもあるが、これは主として形状による効果であろうと考えられる。高橋は、実測値から掃流砂量を算出する段階ですべての data に 0.6 を乗じている。step-length も \bar{V} と同様に複雑な要因からなる物理量であり、通常は確率量として扱う。したが

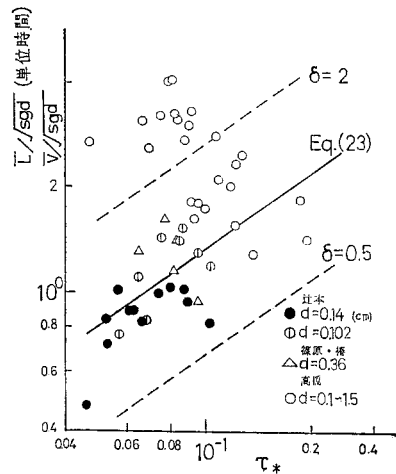


図-8 \bar{V} と \bar{L} の関係

って、実測値のばらつきが δ に幅をもたせることになるが、単位時間を1秒とすれば平均として $\delta=1$ を採用しても大きな障害はないと思われる。すなわち、確率量としての δ がいかなる関数形であっても、平均量としての δ は定常・平衡・平坦な河床については $\delta=1$ とすれば流砂量算定にあたっても妥当な結果が得られると考えられる。本論では、 δ という一種の補正係数を考えれば現象を説明し得るということをお願いのであって、たとえば、河床形態が異なったり、粒径や比重の大きく異なる河床材料に対して δ がどう変化するのか、といった δ の中味については、今後検討していきたい。

以上の確認の後、本研究で得られた式 (19), (23), (26) より流砂量関数の算出を試みた。その際河床材料は球形の一樣粒径で密に詰まっているものとし、式 (19) 中の諸量には前述の定数および実験定数を実測より定めた。求まった流砂量関数が 図-9 (a), (b), (c), (d) である。各図とも縦軸は無次元掃流砂量 q_{B*} 、横軸は τ_* である。比較の意味で篠原・棒の式 (掃流力と有効掃流力の比が 1) を細線 (1), Einstein の式 (掃流力に対する摩擦速度と有効掃流力の比が 0.5) を細線 (2), Kalinske の式を細線 (3) で示す。これらは水理公式集 (S46 改訂版)¹²⁾ より転記したものである。従来の掃流砂量の実測値は、ほぼこれらの線で囲まれる範囲に分散している。すなわち従来の実測は、同じ τ_* に対して 10^2 程度の q_{B*} の変動がある。また、そのもとになっている水路実験では、定常・平衡と考えられる実験条件下であっても時間的に掃流砂量が非常に変動することが知られている。このような変動の要因は、前述の掃流砂量式の中の水理量が確率量であるためと考えられる。そこで、著者らの掃流砂量式に用いられたパラメーターの変動に伴って、掃流砂量がどのくらい影響を受けるのかを明らかにする。

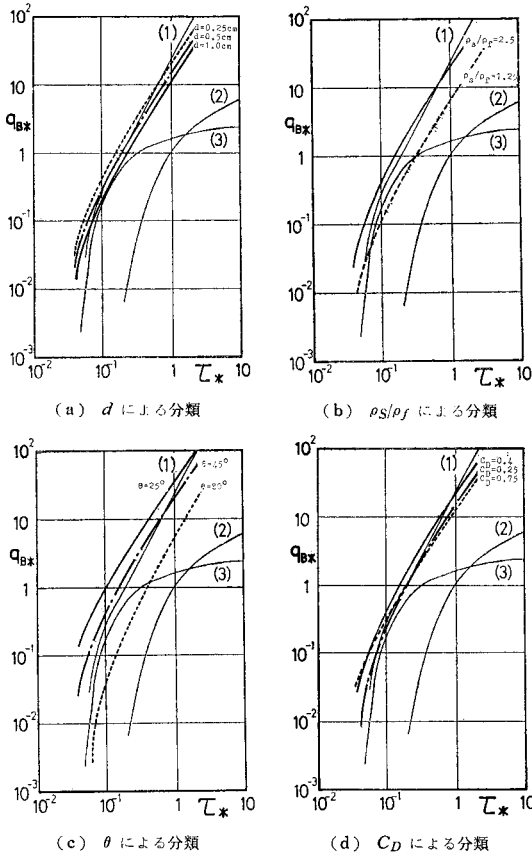


図-9 掃流砂量

まず、 β 、 δ については計算するまでもなく、これらの変化が直接、掃流砂量に影響するから、その影響の程度はただちに判断できる。 β の変動範囲は実測値をもとに考えると、図-5より $\beta=10^{-4} \sim 10^{-3}$ の範囲と考えられる。 δ は図-8より $\delta=0.5 \sim 2$ の範囲と考えてよいであろう。以下では、これらの平均値として $\beta=2.5 \times 10^{-4}$ 、 $\delta=1$ を用いた。次に、図-9の4枚のグラフは著者らの算定式において、掃流砂の特性を調べるために比較の変動の大きいと考えられる量を変化させて、式(19)に代入したものである。なお、図-9が、問題としている量のみを変化させ、これによる影響のみを知ろうとしたものであることを付記する。

第1に河床材料自身にかかわる問題として、 d および ρ_s/ρ_f を変化させると、図-9の(a),(b)のようになる。両図をみると、 d の小さい方および ρ_s/ρ_f の大きい粒子を用いた方が同一の τ_* に対して q_{B*} が大きく、この図上では相似則が成立していない。これは縦軸 q_{B*} ($=q_B/u_*d$)の取り方による。元来 q_{B*} 、 τ_* はEinsteinの掃流砂量式が相似性を保つように創られた無次元量である。Kalinskeの式でも q_{B*} は τ_* の関数として相似則が成立するが、Manningの粗度係数 n を用いた佐

藤・吉川・芹田²⁾の式は相似則が成立しない。 q_{B*} を構成する要素外の要因(たとえば著者らの P_0 、 u_{ex})が関与する場合は、 q_{B*} に対して相似則が成立しないのは当然である。しかし、 τ_* ではなく、 τ を等しくした場合には、 d の小さい方、 ρ_s/ρ_f の小さい方が大きな掃流砂量となる。これは、著者らの推定式においても確認されている。

第2に河床材料の敷き詰められ方等により変動すると思われる、 θ 、 C_D を変えたときの q_{B*} の変化を図-9(c),(d)に示す。 θ は着目粒子がその下流側隣接粒子となす角度であり、 θ の大小は河床材料が緩く詰まっているか、密に詰まっているかを示す。したがって θ が小さいことは着目粒子の露出高さが大きいことを意味し、掃流砂量が増加するものと予想される。図-9(c)の結果は、これを支持している。図中、 $\theta=45^\circ$ とは河床の観察から得られた標準的な値である。しかし実際の河床では、突出した粒子と密に詰まった粒子とが共存しており、 θ は $25^\circ \sim 90^\circ$ の間に分散することになる。だが、 $\theta=25^\circ$ や 90° というは出現頻度は小さいから、実流砂量は、図の $25^\circ \sim 80^\circ$ の帯状部分におさまると考えられる。

では、抗力係数 C_D による変動はどうであろうか。通常 C_D は流速と粒子との相対速度を用いたReynolds数の関数であり厳密な値は時々刻々変わると解釈できるが、ここでは粒子の1跳躍を通しての代表値として定めた。粒子の移動中における C_D の変化を考慮した場合については水理講演会論文集¹³⁾を参照されたい。 $C_D=0.4$ とは、一様流れの中に置かれた1つの球体に作用する抗力から得られる理想的な値である。 θ 等と同様、 C_D に $0.25 \sim 0.75$ 程度の幅をもたせると図-9(d)のようになる。 q_{B*} は C_D に対しては必ずしも単調な増減は示さない。これは C_D の大小によって式(6)に示すように u_c が増減し、これが式(19)の P_0 や u_{ex} を決定するが、 P_0 と u_{ex} が負の相関となるため、 P_s が複雑に変動することによる。式(19)を用いて q_{B*} 軸にグラフを描く限りはこの結果は避けられないが、 C_D が統計的に取り得る値に対して、 q_{B*} も帯状の範囲を取り得ると考える方が妥当であろう。また、 C_D と関連して、粒子同士の遮蔽効果(特に混合粒径の場合は重要)も無視できないが、著者らは、遮蔽係数ではなく、エネルギー交換係数 β として考慮している。 β は均一粒径と混合粒径とでは値も異なってしまう。砂漣や砂堆等の河床形態が発生したときには、このモデルそのものの検討も必要であろう。

このほかにも、掃流層厚さの問題、“乱れ”強さの問題および掃流と集合流動の限界の問題等が残る。これらの詳細については、今後より精密な実測と検討を通して

明らかにしていきたい。

5. 結 語

本研究は掃流機構を支配している粒子の河床からの離脱率 P_s 、濃度移動平均速度 \bar{V} について、現象の性質から、確率論を手段とし、Euler 的立場からの考察により掃流砂現象を明らかにしようとした。本研究の成果を以下に示す。

(1) P_s を Euler 的な量として実験より直接測定し、その分布特性を知り得た。

(2) P_s を流体力（主として τ_* ）から直接推定するために粒子の初期移動をエネルギー授受の面から説明した。

(3) 粒子の初期移動を流体の“乱れ”と結びつける方法を示した。

(4) 粒子濃度平均移動速度 \bar{V} を流体力より推定する方法を示した。

(5) P_s , \bar{V} の積事象として掃流砂量をとらえ、合わせて step-length を用いた研究結果との比較を試みた。

(6) 本理論より 図—9 に示すように掃流機構の細部にわたる検討が可能になった。

今後は混合粒径における掃流機構、河床波の発生による掃流機構の変化、集合流動、浮流砂との関連について研究を進めていく予定である。

本研究の遂行にあたり松梨史郎君（早大理工学部）の協力を得た。

なお、本研究は文部省科学研究費・総合研究(A)「ストカスティック・ハイドロリックスの手法の確立と応用の研究」(課題番号 No. 56350035；研究代表者 林 泰造) の補助を受けた。記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Einstein, H.A. : The Bed Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows, Technical Bulletin No. 1026, U.S. Department of Agriculture, Soil Conservation Service, 1950.
- 2) 佐藤清一・吉川秀夫・芦田和男：河川の土砂流送に関する研究，建設省土木研究所報告，101，1959.
- 3) 辻本哲郎：掃流過程の確率モデルとその移動床問題への応用，京都大学学位論文，1978.
- 4) 吉川秀夫・藤堂正樹・片山道夫：掃流砂現象の確率特性に関する基礎的研究，第 36 回年次学術講演会，1981.
- 5) Graf, W.H. : Hydraulics of Sediment Transport, McGraw-Hill, p. 85, 1971.
- 6) 日野幹雄：流体力学，朝倉書店，p. 224.
- 7) 吉川秀夫・井筒庸雄：跳躍粒子の存在確率に関する研究，第 25 回水理講演会論文集，pp. 61~65, 1981.
- 8) Francis, J.R.D. : Experiment on the motion of solitary grains along the bed of a water stream, Proceedings of the Royal Society of London, A 332, 1973.
- 9) Rouse, H. : Modern Conceptions of mechanics of fluid turbulence, Trans. ASCE, 102, 1937.
- 10) 篠原謹爾・椿東一郎：河床砂礫の移動機構に関する一考察，九州大学応用力学研究所所報，第 10 号，pp. 85~93, 1957.
- 11) 高橋正佑：河床れきの流送に関する実験的研究（第 1 報），新砂防，60，pp. 5~14, 1966.
- 12) 土木学会編：水理公式集（昭和 46 年改訂版），p. 205, 1971.
- 13) 吉川秀夫・藤堂正樹・関根正人：土砂の掃流機構に関する基礎的研究，第 27 回水理講演会，1982.

(1983.1.27・受付)