

エントロピー理論を用いた自然流域の 蒸発散の推定について

ESTIMATION OF EVAPO-TRANSPIRATION ON NATURAL WATERSHED USING MAXIMUM ENTROPY METHOD

高 島 康 夫*

By Yasuo TAKASHIMA

1. はじめに

水資源開発計画の策定等に際して自然流域からの蒸発散量の推定は重要であり従来幾多の論がなされているが確定したものはない¹⁾。またこれらの理論に基づいて蒸発散を推定するためには、蒸気圧、輻射熱等の通常計画地点付近では観測されていないデータを必要とし実際には適用できない。以下雨量および流量の観測値のみに基づく蒸発散量の推定について論ずる。論述の便宜上計算例を各節に分割するがいずれも神流川を適用河川としている。Fig. 1 および Fig. 2 の実線はその月雨量および月流量を示す。

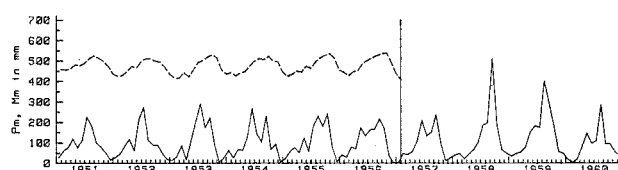


Fig. 1 Monthly rainfall observed (full line) & residual moisture estimated at the end of each month (dashed line).

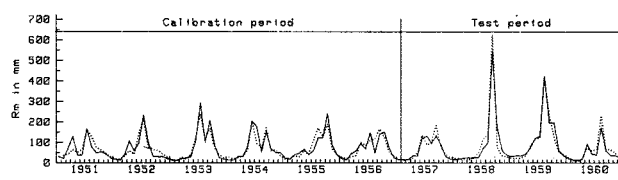


Fig. 2 Monthly runoff observed (full line) & predicted (dotted line), KANNA GAWA, CA=373.6 sq. km.

2. 蒸発散およびその他のロスに関する基本式 および仮定

水文循環の連続の方程式は

$$M_i = A_i - Q_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$A_i = M_{i-1} + P_i \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$Q_i = R_i + E_i, \quad i = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad \dots\dots (3)$$

で表わされる。ここに M_i = 第 i 日末における流域内残留水分量 residual moisture, P_i = 第 i 日の降雨量, A_i = 第 i 日に available な水分量, R_i = 第 i 日の河川流出量, E_i = 第 i 日の蒸発散その他のロス, Q_i = 第 i 日の減水分量 moisture discharge を表わす。(1) と (2) より

$$M_i = M_{i+1} + P_i - Q_i \quad \dots\dots\dots (4)$$

この式と (3) より

$$E_i = (P_i - R_i) - (M_i - M_{i-1}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで $i=1$ から N までの間について E_i の和をとると右辺の $(M_i - M_{i-1})$ の和は大部分がキャンセルし

$$\sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N (P_i - R_i) - (M_N - M_0) \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。さて蒸発散その他のロス（以下蒸発散と略称する）は次式により表わされるものと仮定する。

$$E_i = f_m (M_{i-1} + M_i) / 2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 m = 第 i 日の属する月（または季節）に付された一連番号, f_m = 第 m 月（または季節）に属する日の蒸発散係数とする。すなわち E_i は前日末と当日末の残留水分量の平均値に比例するものとする。比例係数 f_m は気温、水蒸気圧、風速、植性状態等の変化に応じて変動し、月（または季節）ごとに異なる値をとるが、同一月（または季節）内の変動は微小で近似的に一定とみなし得るものとする。

蒸発散量が残留水分量に比例するか否かについては種種の議論があり¹⁾、(i) 地中水分が植物の根入の深さに浅にある間は蒸発散量は一定とみるもの、(ii) 蒸発散量と潜在蒸発散量（地中水分が常時十分存在すると仮定したときの蒸発散量）との比率が地中水分量に比例するもの、および (iii) この比率と地中水分量との間に

* 正会員 EPDC インターナショナル (株)

は複雑な関数関係が存在するが上限値は潜在蒸発散量で押えられるとするもの等である。しかしながら大樹から雑草に至るまでの植物の根入深の分布の推定は誤差が大きく、また蒸気圧、輻射熱等の貯水池計画地域近傍では通常観測されていない測定値を必要とする潜在蒸発散量の導入も実用的ではない。本論での f を月（または季節）によって変化させることにより近似的に上記各説のいずれとも対応できるものである。

なお (4) の M_i と M_{i-1} にそれぞれ constant c を加えても同式は成立する。よって M_i と M_{i-1} は残留水分量の相対値を表わしているに過ぎない。しかしながら (5) より E_i は、したがって (3) より Q_i も一義的に定まることがわかる。さらに (7) より f_m も一義的な値でなく M_i および M_{i-1} に連動する相対値であることにも留意を要する。(3), (4), (7) より

$$M_i = \{(1 - v_i)M_{i-1} + P_i - R_i\} / (1 + v_i) \dots\dots (8)$$

ただし、

$$v_i = f_m / 2 \dots\dots\dots (9)$$

が得られる。この式で P_i および R_i は観測値を用いると既知となるから M_i の初期値と f_m が与えられれば各 i 日における残留水分量を逐次計算できる。

さて雨量および流量の観測データを調べ、各年の渇水期間中に下記条件を最も近く満足する各 1 日 ($i=d_1, i=d_2, \dots$) を選定する。その条件はいずれの日もかなりの長期間にわたってほとんど無降雨状態が続いた後の日であって、至近数日間の流量のてい減状態が一樣でかつこれらの日の流量がほぼ等しいことである。しかしてこの条件を満たす日の前日末 ($i=d_1-1, i=d_2-1, \dots$) の残留水分量はほぼ等しいものと考えることができる。よって

$$M_{d_1-1} = M_{d_2-1} = \dots \text{ if } R_{d_1} = R_{d_2} = \dots \dots\dots (10)$$

を条件式として設定するものとする。ここで $i=d_1$ 日から d_2-1 日までの期間を第 1 cycle, $i=d_2$ 日から d_3-1 日までの期間を第 2 cycle, ... また第 d_1-1 日, 第 d_2-1 日, ... を等残留水分量の条件を満たす target day とよぶこととする。神流川について target day を設定し

Target #	Target day is at the end of	Runoff of next day to target day	Cycle period	
			days	year
1	13 FEB 1951	0.560		
			342	0.937
2	21 JAN 1952	0.567		
			340	0.932
3	26 DEC 1952	0.560		
			353	0.967
4	14 DEC 1953	0.553		
			424	1.162
5	11 FEB 1955	0.550		
			309	0.847
6	17 FEB 1956	0.562		
			329	0.901
7	11 JAN 1957	0.564		

Fig. 3 Target days of equal residual moistures, KANNA GAWA.

た例を Fig. 3 に示す。

さて (6) の $i=0$ および N をそれぞれ d_1-1 および d_1-1 に置き換えると同式の右辺第 2 項は 0 となり、第 1 cycle 初から第 t cycle 末までの間の E_i の合計値は

$$\sum_{i=d_1}^{d_1-1} E_i = \sum_{i=d_1}^{d_1-1} (P_i - R_i) \dots\dots\dots (11)$$

で表わされる。いま蒸発散の検討対象期間を第 d_1 日初から第 d_1-1 日末までにとるものとするれば、この期間内の蒸発散量の合計値は (11) により観測値 P_i と R_i のみによって定まることとなる。換言すれば対象期間内の蒸発散量の合計値は既知となる。神流川について 1951 年 2 月 14 日初から 1957 年 1 月 11 日末までを対象期間に選び、この間の総雨量 7363.7 mm から総流量 5131.9 mm を差し引いて蒸発散量の合計値 2231.8 mm が、またこれを月平均にして $\bar{E} = 31.4$ mm/月 が得られる。

3. 蒸発散係数 f の調整と実例計算

蒸発散量推定計算の第 1 段階は trial に仮定された f_m を用いて 2. の各式を計算することよりなる。こでもし各月ごとに f_m を独立に変化させると組合せの総数は 1 個の f_m の変化数の月数乗となり膨大な数に上る。しかしながら実際に試算してみるとまず f_m がある値以上の大きな値（もちろん 1 以下ではあるが）を与えると蒸発散量が負値となる。これは物理的にあり得ない現象であるのでこのような大きな f_m の値は存在しない。すなわち f_m には 1 以下のある上限値が存在する。次に乾期の f_m が雨期の f_m よりある程度以上大きくなると乾期の蒸発散量の合計値が雨期のそれより大きい計算結果が現われる。しかるに気温は低下し植物も落葉または生長を休止する乾期の蒸発散量が雨期より大きいことは起こり得ないからこのような f_m の組合せも除外することができる。また年間の季節の変化は漸变的であるから、隣接する月間の f_m の変化も急激な凹凸があってはならない。さらに f_m の変化の刻みをある限度以下に小さくすると後論 (5. 参照) する検定値の変化は無視し得る程度に微小となる。よって f_m はある大きさの間隔をとって並んでいる離散値列として取り扱うことができる。これらのことから f_m の組合せ数は有限であり、したがって理論上はこれらすべての組合せについて計算することは不可能ではないことに留意する。ただし 4. で論ずる理由によりこれらすべての f_m の組合せについて計算する必要は必ずしもない場合が多い。すなわち数組の f_m について計算しただけで最終解が求まることがある。この場合はその時点で計算を打ち切ることができる。しかしながら逆に最終解の確

定が f_m の最後の trial 値となる場合も起こり得るから計算開始に先立っては、すべての trial 値についての計算が可能な方法を考えておくのが安全である。さて前記 f_m の変化範囲に関する制約にもかかわらず、月ごとに f_m を独立して変化させるとなると組合せ数は膨大でそのすべてを計算しなければならない場合にはとうてい実用的な計算量にはおさまらない。よって実際計算においては適当な簡略化をはかる必要がある。以下本計算例において採用した方法を示す。

水文資料を概観し、6月から9月までを雨期として $f_m = f_w$ 、12月から翌年3月までを乾期として $f_m = f_d$ 、過渡期のうち5, 10月を準雨期として $f_m = f_d + (f_w - f_d) \times 2/3$ 、4, 11月を準乾期として $f_m = f_d + (f_w - f_d)/3$ とおくこととする。このように集約した f_m を第1 cycle の各月の値として採用する。これによりまず第1 cycle 内においては独立に変化する f_m は f_d と f_w の2個のみとなるので、その組合せ数は実行可能な範囲に入る。Fig. 10に本例計算において採用した第1 cycle の f_d と f_w の組合せ表を示す。第2 cycle 以降についてはこれらの f_m の値は一定のルールに基づいて逐次調整された値をとるものとする。

以下説明の便宜上、第1 cycle における trial 値 $f_d = .002$, $f_w = .003$ の case を例にとり、第2 cycle 以下の f_m 値の調整および各水文量推定経過について記す。(4), (7), (8), (9)の各式にこの f_d , f_w を代入し、第1 target day (1951年2月13日)と第2 target day (1952年1月21日)の M_i の値が等しくなるまで初期値 M_i を trial に変化させ計算を行う。その結果この等残留水分量の値として 439 mm が得られた。したがってこの値が後続の各 target day の残留水分量がとらねばならない目標値となる。ここでもし第1 cycle で仮定された f_w , f_d の値をそのまま第2 cycle 以降に採用して計算を進めると、一般に後続の target day の残留水分量の計算値は目標値 439 mm に一致しない。これは主として各 cycle 間の気象変化に起因するものである。このような cycle 間に存在する気象変化に対応するためには、第2 cycle 以降において各 target day の残留水分量が 439 mm となるように当初の f_m の仮定値を調整することが必要となる。Fig. 4に本計算で採用した調整法の考え方を示す(本図はみやすくするため1 cycle を6期に分割しているが月割にした場合も同様である)。調整の主眼は第2 cycle 以降において新たに独立変数となるような f_m の導入を避け一定のルールに基づき当初の f_d , f_w を基本にして漸变的に f_m の調整値を求める点にある。たとえば Fig. 4の第2 stage において第13期の f の値 f_{13} を当初仮定値から $D2$ だけ減少して計算を行う場合には必ずこれに付随して

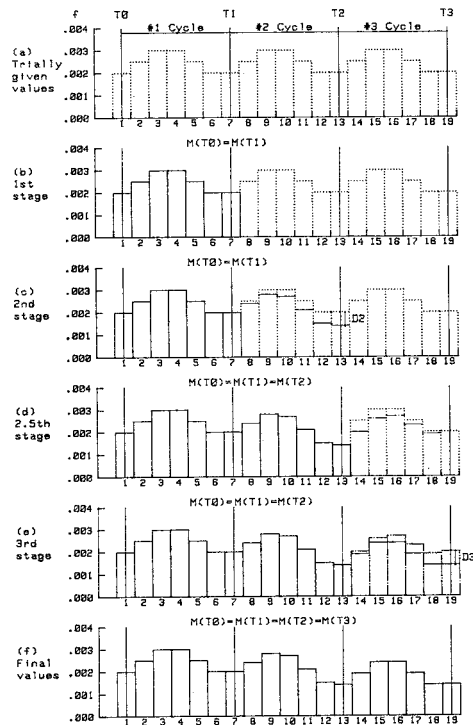


Fig. 4 Schematic exposition of f values adjustment.

f_{12} は $D2 \times 5/6$, f_{11} は $D2 \times 4/6$, ..., f_8 は $D2 \times 1/6$ だけ、それぞれ当初の仮定値から減少させた値を用いるものとする(このような調整のルールはあくまで計算量の膨大化を避けるための便宜的なものであって事情が許す限りできるだけ多くの f_m を独立に変化させて計算するのが望ましいのはいうまでもない)。

計算結果を Fig. 5 に示す。この図より各 target day の残留水分量が等しい値になるためには各 cycle の f_m をかなり大幅に変化させなければならないことがわかる。

以上 f_m の調整に主点を置いて計算経過を論じたが、これと並行して (1)~(9)の各式により対象期間内の E_i , M_i 等も計算済みとなる。ここで計算期間の初日と終日は月の途中日であったので、開始月と終了月の月次値を求めるためにそれぞれの月で用いた f_m の値をそ

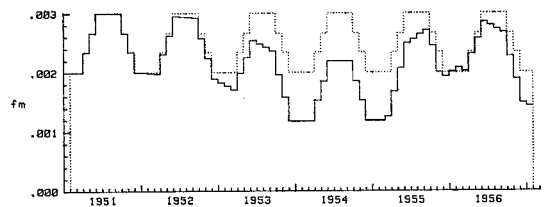


Fig. 5 Coefficients of evapo-transpiration, given (dotted line) & adjusted (full line).

	Yr	Month												Mean	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
(a)	Estimated evapo-transpiration E_m in mm	51		25.2	28.2	31.4	33.5	38.6	45.6	45.6	46.2	43.0	35.3	28.3	Min=14.6 Max=49.1 Mean=31.4*
	52	27.3	24.8	27.3	30.4	33.4	38.3	43.6	42.4	39.7	37.0	31.9	26.2		
	53	23.9	20.0	22.3	25.7	30.3	37.5	39.4	36.1	35.6	28.9	21.3	15.8		
	54	15.7	14.9	17.5	21.5	28.5	35.3	33.4	30.9	33.4	29.1	22.3	17.8		
	55	16.3	14.6	18.1	23.0	30.3	35.3	40.1	47.9	49.1	45.5	35.9	29.9		
	56	29.6	26.8	28.2	30.9	36.9	40.7	43.5	40.3	44.5	39.0	29.9	21.8		
(b)	12 month moving average M_{a1} in mm	51												Min=24.8 Max=37.1 Mean=30.9	
	52	35.5	35.3	35.0	34.5	34.0	33.7	33.5	35.7	35.6	35.5	35.5	35.5		
	53	31.7	31.4	30.8	30.5	29.8	28.9	28.1	27.4	27.0	26.6	26.2	26.1		
	54	25.9	25.4	24.9	24.8	24.8	24.9	25.0	25.1	25.0	25.1	25.2	25.4		
	55	25.4	25.9	27.3	28.7	30.0	31.2	32.2	33.3	34.3	35.1	35.8	36.3		
	56	36.8	37.1	36.4	36.1	35.5	35.0	34.3	33.5						
(c)	Mean of 2 adjacent moving averages of (b) M_{a2} in mm	51								35.7	35.6	35.5	35.5	35.5	Min=24.8 Max=36.9 Mean=30.9
	52	35.4	35.2	34.8	34.2	33.8	33.6	33.4	33.0	32.6	32.2	31.9	31.7		
	53	31.5	31.1	30.7	30.2	29.4	28.5	27.7	27.2	26.8	26.4	26.1	26.0		
	54	25.6	25.2	24.8	24.8	24.8	24.9	25.0	25.1	25.1	25.2	25.3	25.4		
	55	25.7	26.6	28.0	29.3	30.6	31.7	32.7	33.8	34.7	35.5	36.1	36.6		
	56	36.9	36.8	36.2	35.8	35.3	34.7	33.9							
(d)	Ratio (a)/(c)	51								1.28	1.30	1.21	1.00	0.80	Min=21.1 Max=41.7 Mean=31.4*
	52	0.77	0.71	0.79	0.89	0.99	1.14	1.30	1.28	1.22	1.15	1.00	0.83		
	53	0.76	0.64	0.73	0.85	1.03	1.32	1.42	1.33	1.33	1.09	0.81	0.61		
	54	0.61	0.59	0.71	0.87	1.15	1.41	1.33	1.23	1.33	1.16	0.88	0.70		
	55	0.64	0.55	0.64	0.78	0.99	1.12	1.23	1.42	1.42	1.28	1.00	0.82		
	56	0.80	0.73	0.78	0.86	1.05	1.17	1.28							
(e)	Mean of (d)		0.72	0.64	0.73	0.85	1.04	1.23	1.31	1.31	1.32	1.18	0.94	0.75	1.001
(f)	Coefficient		0.72	0.64	0.73	0.85	1.04	1.23	1.31	1.31	1.32	1.18	0.94	0.75	1.000
(g)	Seasonal variation suppressed series (a)/(f) mm	51		39.2	38.7	37.0	32.3	31.4	34.8	34.9	35.1	36.5	37.7	37.7	Min=21.1 Max=41.7 Mean=31.4*
	52	38.2	38.6	37.5	35.8	32.2	31.2	33.2	32.5	30.1	31.4	34.1	35.0		
	53	33.5	31.2	30.7	30.2	29.1	30.5	30.0	27.6	27.1	24.5	22.7	21.1		
	54	22.0	23.2	24.1	25.3	27.4	28.7	25.5	23.7	25.4	24.7	23.8	23.8		
	55	22.8	22.7	24.8	27.0	29.2	28.7	30.6	36.7	37.3	38.7	38.4	39.9		
	56	41.3	41.7	38.8	36.4	35.5	33.1	33.1	30.9	33.8	33.2	31.9	29.1		
57	26.9														

Fig. 6 Suppression of seasonal variations contained in the estimated monthly evapo-transpirations ($f_d=.002, f_w=.003$), KANNA GAWA.

のまま用いて前後の端数日についての外挿計算を行っておく必要がある。この結果計算済の期間は 1951 年 2 月 1 日から 1957 年 1 月 31 日までの丸 72 か月となる。計算結果得られた蒸発散量を月別に集計した値を Fig. 6 の (a) 欄および Fig. 7 に実線で示す。また Fig. 1 の破線は各月末値の残留水分量の推定結果を示している。ここで Fig. 6 の (a) 欄の平均値が 2. の終わりで求めた \bar{E} の値とほぼ一致していることは上記 target day 設定による当然の結果である。Fig. 7 (実線) を概観すると、蒸発散の推定値はほぼ 1 年の周期をもって変動していることがわかる。これは (1)~(9) の各式の雨量および流量がほぼ 1 年の周期をもつこと、これら各式が水文循環の連続の条件から導かれた式であることおよび f_m の値が雨期には大きく乾期には小さくとられていることから考えて当然である。直観的にも雨期の蒸発散量

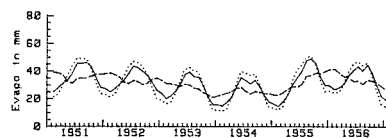


Fig. 7 Estimated monthly evapo-transpiration $f_d=.002, f_w=.003$ (full line), $f_d=.001, f_w=.002$ (dotted line) & seasonal variation suppressed series (dashed line), KANNA GAWA.

が乾期のそれより大きく、かつこの変動が各年繰り返すという結果は自然なものである。以上により蒸発散変動の支配要因は雨量または流量のそれと同じく季節変動であると考えられる。

第 2 段階の計算はこの季節変動を抑圧することである。このための計算法として対移動平均比率法²⁾を用いる。計算経過を Fig. 6 に示す。季節変動抑圧後の蒸発

散の月次値（以降この月次値を W で表わす）は同図 (g) および Fig. 7 に破線で示されている。Fig. 7 は変化の細部をみやすくするため、Fig. 1 または Fig. 2 に比し縦軸を引き伸ばしてある。このことを考えて Fig. 7 の破線と Fig. 1 または Fig. 2 を対比すると雨量または流量の変動に比し W series の変動がほとんど平坦な曲線となっているのがわかる。また W series では少なくとも1年周期の変動は抑圧されている。しかし季節変動以外の変動は大部分 random 要因による変動であるものと考え、この図になお残っている変動は random 変動とみなすことができる。しかし random 変動を構成する個々の月次値の期待値を求めるには series 全体の平均値をとればよい。Fig. 6(g) の平均値 31.4 mm は、したがって個々の月次値の期待値をも表わしている。なお Fig. 6 で (a) と (g) の平均値がほぼ等しい値であることは注目を要する。一般にこの計算法により両平均値が一致することはいえないが、データ数が多くなれば両平均値が接近することは本計算法の特長である。

以上の結果およびさきに論じた (a) の平均値と \bar{E} との等値性から、 W series の個々の月次値の期待値は既知量 \bar{E} にほぼ等しいものと考えることができる。これは 4. で論ずる entropy 理論適用の要件の一つとなる。第3段階の計算は W series のもつ分布関数を求めることである。これは単に W の累加分布曲線を計算すればよい。結果を Fig. 9 に点線で示す。以上により蒸発散係数の start 値が $f_a=.002$, $f_w=.003$ の case について一連の計算を終了した。この結果求められた W series の分布関数を以降標本値分布関数とよぶ。

なおここで次の考察が重要である。さきにも触れたが一般に多くの水文量はほぼ1年を周期とする季節変動を最も大きな変動要因としてもつ。よってこの季節変動が抑圧された後の W series の変動はほとんど random 要因による変動で変動範囲内ではその分布は一様であるとみることができる（いわゆる white noise となる）。よっていま trial 計算中の W series が正解となるためにはその標本値分布関数がほぼ一様分布とみなせるものでなければならないこととなる。

4. Entropy 理論による分布関数の推定

前節までで蒸発散に関する基本式を求め、trial に与えられた f_m の組合せについて蒸発散量の推定を行い、さらにその季節変動を抑圧した。この推定値が最終解であるか否かの判定はまだなされていないが、本節では前節までとは別に W の分布関数のもつ entropy について論ずることから始める。

entropy 理論を雨量および流量の分布関数に適用した例に Ikebuchi, Takasao の論³⁾がある。これは時間、日、月、季、年等の時間単位について雨量および流量観測値分布関数の entropy を求め、さらに雨量、流量および流域貯留量の関係等を entropy 理論を用いて解明している。ただし蒸発散量については触れていない。

これに対し以下本論においては観測値のない蒸発散量に対して entropy 理論の適用を試みるものであり、上掲論文で採用されている降雨、流量の entropy の計算法とは異なった計算法または計算の考え方が必要となる。

さてここでは変数 W がとり得る上下限値は与えられ event space⁴⁾ を形成しているものとする。またこの event space は I 個の区間に等分され各区間 i の中心点の座標値 W_i , $i=1, \dots, I$ も定められているものとする。さらに変数 W の outcome W_j , $j=1, \dots, J$ (J は対象期間内の月数) はこの event space のいかなる点においても起こり得るものとする。もし event space の各区間幅が十分小さければ i 区間内での outcome の生起確率 p_i は event W_i の生起確率 p_i と読みかえることができる。以下この仮定は成立するものとする。すなわち W_i の生起確率が p_i であるとき変数 W の分布関数のもつ entropy H は次式で表わされる⁵⁾。

$$H = -\sum_i p_i \ln p_i \dots\dots\dots(12)$$

これに制約式として

$$\sum_i p_i = 1, \sum_i p_i W_i = \bar{E} \dots\dots\dots(13)$$

が付加される。 \bar{E} は季節変動抑圧後の蒸発散量の平均値で既知である。Maximum entropy の理論によれば^{5), 6)}。この entropy H を最大ならしめる分布関数が、与えられた条件（すなわち式 (13)）下において最も偏見なく推定された分布関数であるとされている。よって以下においてはこの H を最大ならしめる分布関数を求め、これを W series の真の分布関数として採用することとする（なおこの仮定の妥当性については 7. で再論する）。さて (12) の H を最大ならしめるために周知の Lagrange の乗数 λ_0-1 および λ_1 を導入し

$$L = -\sum p_i \ln p_i - (\lambda_0 - 1) \sum p_i - \lambda_1 \sum p_i W_i \dots\dots\dots(14)$$

とおけば H の最大値は $\partial L / \partial p_i = 0$ と (14) より求められる。すなわち

$$p_i = \text{Exp}(-\lambda_0 - \lambda_1 W_i) \dots\dots\dots(15)$$

$$\lambda_0 = \ln Z(\lambda_1) \dots\dots\dots(16)$$

$$Z(\lambda_1) = \sum \text{Exp}(-\lambda_1 W_i) \dots\dots\dots(17)$$

ここに $Z(\lambda_1)$ は partition function とよばれる。(16) を (15) に代入し

$$p_i = \text{Exp}(-\lambda_1 W_i) / Z(\lambda_1) \dots\dots\dots(18)$$

が得られる。また (16), (17), (18) より

$$-\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ln Z = \sum p_i W_i = \bar{E} \dots\dots\dots (19)$$

となる。以上により得られた maximum entropy をもつ分布関数を以降 entropy 分布関数と略称する。

なお (12) が成立するための基礎条件の一つに変数の相互独立性が要求される。しかして蒸発散量を月次値の series としてみた場合、各月内に発生する日降雨の random 性によって月次値相互間の独立性は近似的に成立するものとみ得る。よって本節以降 entropy に関連する計算はすべて月次値について行うものとする。

第2の基礎条件として変数の uniform 性、すなわち W_i が同一の分布曲線をもつ変数であること（または同一の母集団に属すること）が要求される。これに対しては蒸発散の季節変動を抑圧することによりほぼ対処できたものとする。第3の問題点は W_i の event space のとり方である。前掲の entropy 理論⁵⁾より推論すれば、 W_i の event space は現に W_i がとることができる (capable) 領域であって、 W_i がとる可能性がある (possible) 領域ではない。いま W_i の event space として前節で計算した series $W_j, j=1, \dots, J$ の変動領域をとることとすれば1組の f_m の組合せに対して1個の W_i の event space が与えられることとなり、数組の f_m について trial 計算が行われた段階ではその各組ごとに機械的計算結果としての entropy 分布関数が求められる。しかしてこれら f_m の組合せのうちいずれか1組のみが真の値であるとすれば、その f_m に基づいて推定された W_j の変動領域のみが真の変動領域となる。したがってこの変動領域を event space として計算された entropy 分布関数のみが entropy 理論に沿った真の分布関数となる。

さて真の W の属する母集団について考えると、この母集団のもつ分布関数は（未知ではあるが）ユニークで唯一個に限られる。したがってこれまでに計算された2個1対（標本値分布関数と entropy 分布関数）の分布関数の数対のうち、いずれか1対が真の分布関数であれば、その1対をなす2個の分布関数は同一のものでなければならない。よって各 trial series のうち、一致した2個の分布関数をもつ W が真の series であると推論し得る。しかしてこの真の分布関数が確定した時点をもって他の trial に計算されたすべての分布関数は棄却される。なんととなればこれらの棄却される分布関数はすべて虚の series について機械的に計算されたものに過ぎなかったことが今にして判明したからである。すなわち確定された分布関数のみが実の series に対応するものであ

り、この実の series に対応する分布関数についてのみ entropy 理論が適用できるからである。

なお (12)~(19) の各式による maximum entropy の計算を省略し、3. で求められた標本値分布関数の entropy H を (12) により直接計算し、それらの H のうち、最大値を示す H をもつ標本値を最終解として採用する代案は、上に論じたと同様、虚なる series の entropy 間の大小を論ずることになるので誤りである。なお注記すれば、この代案は最大値 H を定めるための support として、どうしてもこれ以外の H の計算が必要であるが、はじめに論じた方法はこれらの support を必要としない（たまたま第1回目の trial で最終解を得ることもあり得る）。

以上要するに本論における entropy 理論適用の考え方は、漸近する多数組の分布関数間の相対関係を entropy 理論に基づいて追跡するのではなく、entropy の基礎条件を満足する唯一個の分布関数についてのみ entropy 理論を適用するにある。

さて2個の分布関数の一致を検定する手法は数多あるが本論では現問題に対して最も強力と考えられる Cramer-von Mises の検定法⁷⁾によるものとする。検定経過の概要は上記 entropy 理論の適用計算例とともに次節で論ずる。

5. 適用例

3. で論じた計算例について引き続き entropy の計算を行う。

$f_a=.002, f_w=.003$ の case について求めた W_i series について 4. の各式の適用経過を Fig. 8 に示

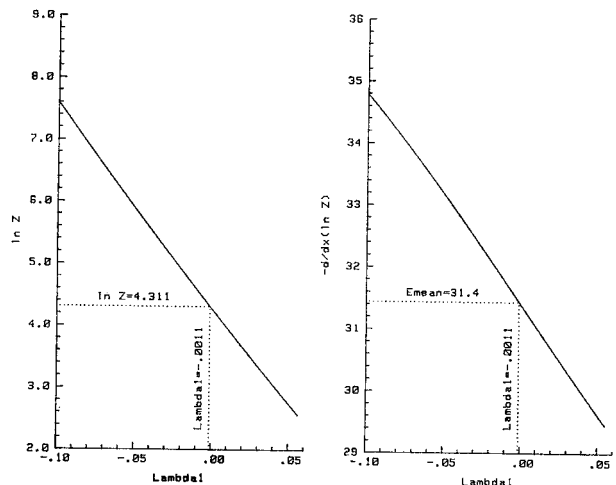


Fig. 8 Logarithms of partition function & their derivatives ($f_a=.002, f_w=.003$), KANNA GAWA.

す。ここで(13),(19)の W_i の平均値 \bar{E} の値は 3. で論じた理由により蒸発散量の平均値 31.4 mm を採用することができる。また 4. の初めに論じた event space の区分数 I は対象期間内の月数 72 に等しくとった。計算結果求められた entropy 分布関数を累加分布の形で Fig. 9 に実線で示す。この図の実線グラフと破線グラフとの一致を判断する検定値の計算値 0.0539 は Cramer-von Mises の検定法で与えられている $\alpha=80\%$ の有意水準に対する quantile 値 $w_{.20}=.062$ を抜くものである。すなわち両グラフは 80% の有意水準において同一の分布曲線であるといえることができる。よって 2.

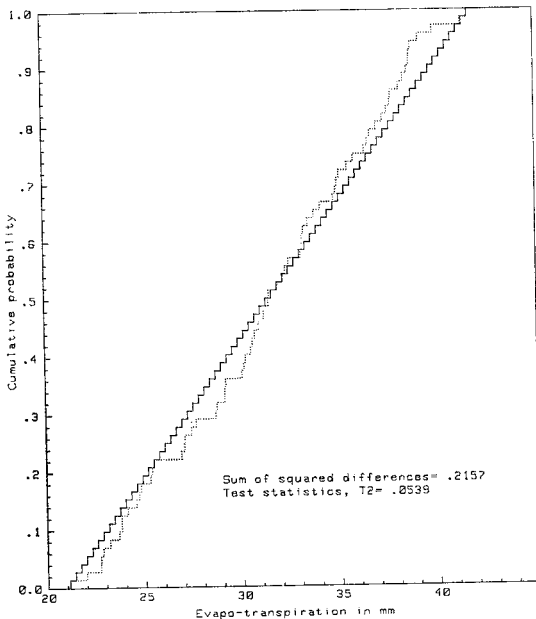


Fig. 9 Cramer-von Mises 2 independent sample test for estimated (dotted line) & max. entropy evapo distribution (full line), $f_d=.002, f_w=.003$.

以降計算例としてきた $f_d=.002, f_w=.003$ の case が実は求める解であり、同時に計算された蒸発散量、残留水分量等(ただし残留水分量については相対値)の各水文量が推定値として確定する。参考までに以上と同じ計算を他の f_m の組合せについて行った結果を Fig. 10 に示す。この図より他のいずれの検定結果も 80% の有意水準において両分布関数の一致を示すものはない。

6. 蒸発散理論に基づく流出量の推測

前章までで蒸発散等の水文量の推定を終わったが、これらの推定値を実測値と直接対照してその適否を判定することはできない。何となれば E_i, M_i 等の実測はほとんど不可能であるからである。利用可能な観測値としては雨量と流量のそれのみである。よって以下では推定された水文量と観測値の関係から流域の parameter 値を求めついでこの parameter と雨量データを用いて test 期間を含む全期間の流量を推測し、実測流量と対照することとする。なおこの計算はすべて月次値について行う。

いま第 m 月の流量 R_m および第 m 月末日の残留水分量 M_m は次式で与えられるものとする。

$$R_m = b_0 + b_1 P_m + b_2 M_{m-1} + b_3 P_m^2 + b_4 M_{m-1}^2 + b_5 P_m M_{m-1} \dots \dots \dots (20)$$

$$M_m = c_0 + c_1 P_m + c_2 M_{m-1} + c_3 P_m^2 + c_4 M_{m-1}^2 + c_5 P_m M_{m-1} \dots \dots \dots (21)$$

ここで P_m は第 m 月の雨量で、 b_0, \dots, b_5 および c_0, \dots, c_5 は parameter (constant) である。

この式の P_m, R_m には観測値を、 M_m, M_{m-1} には前節までに求められた推定値を入れて最小二乗法を適用すると各 parameter 値が求められる(計算法の詳細についてはたとえば文献⁸⁾等を参照)。前節までの例についての計算結果、

$f_d \backslash f_w$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	0.011	0.012	0.013	0.014
0.001	0.224	0.266	0.551	1.129	1.404	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.002	0.558	0.070	0.054	0.353	0.607	0.852	1.039	1.206	*	*	*	*	*	*
0.003		0.397	0.097	0.091	0.236	0.357	0.525	0.689	0.822	0.910	0.987	*	*	*
0.004			0.406	0.210	0.092	0.148	0.244	0.339	0.457	0.549	0.649	0.700	0.749	0.772
0.005				0.424	0.279	0.132	0.097	0.169	0.245	0.317	0.382	0.451	0.502	0.543
0.006					0.440	0.289	0.239	0.100	0.132	0.185	0.237	0.296	0.328	0.372
0.007						0.405	0.277	0.188	0.140	0.117	0.153	0.193	0.222	0.270
0.008							0.357	0.268	0.206	0.166	0.147	0.149	0.175	0.197
0.009								0.325	0.264	0.218	0.189	0.173	0.162	0.165
0.010									0.302	0.256	0.224	0.206	0.190	0.184
0.011										0.275	0.249	0.227	0.206	0.204
0.012											0.261	0.250	0.229	0.215
0.013												0.253	0.235	0.225
0.014													0.242	0.232
0.015														0.229

Note : * shows a case of calculation in which negative values of evapo-transpiration were resulted.

Fig. 10 Summary of Cramer-von Mises Test statistics, T 2.

$$\begin{aligned}
 b_0 &= -284.1, & b_1 &= -.0233, & b_2 &= .9858, \\
 b_3 &= .00199, & b_4 &= -.000698, & b_5 &= .000319, \\
 c_0 &= 252.1, & c_1 &= .7150, & c_2 &= .1483, \\
 c_3 &= -.00171, & c_4 &= .000468, & c_5 &= .0000105
 \end{aligned}$$

が得られた。次にこれらの parameter 値, 雨量 P_m の観測値および前節までの計算で求められている 1951 年 1 月末の M_i の値 457.9 mm (初期値) を (20), (21) に用い 1951 年 2 月から 1960 年 12 月までの間の流量 R_m を推測した。結果を Fig. 2 に点線で示す。この図で推測値は概して実測値に追従している。この結果から前節までの蒸発散に関する理論式および仮定の妥当性がほぼ実証されたものと考えられる。

7. 仮定の吟味ならびに entropy 理論適用の再検討

ここで 4. の仮定すなわち W series の分布関数として maximum entropy をもつ分布関数をとったことの妥当性について検討を試みよう。まず (18) は, 式中の $Z(\lambda_i)$ が p_i に関係なく求められる値であるから, W_i についての指数分布関数を表わしている。これは平均値 \bar{E} を右辺にもつ (13) のみを制約式として与えて (14) の L を最大ならしめたことの必然の結果である。もし平均値以外の, または平均値に追加して他の moment の期待値(たとえば variance 等)が既知であればそれらを制約式に追加することができる。しかしその場合の (18) に相当する式は指数分布以外の分布関数となる⁵⁾。このことから W_i の分布関数は maximum entropy の理論からは一義的に求められず, したがって前記 4. の仮定は一見妥当でないようにみえる。しかしながら前節の計算結果を観察すると, まず Fig. 8 より $\ln Z$ および λ_i の値がそれぞれ 4.311 および $-.0011$ として求められているのが読み取れる。よって (17) の $Z(\lambda_i)$ の値は 74.5 となり, 式 (18) は

$$\begin{aligned}
 p_i &= \text{Exp}(.0011 W_i) / 74.5 \\
 &= \frac{1}{74.5} (e^{.0011 W_i}) = \frac{1}{74.5} = \text{一定}
 \end{aligned}$$

となる。よって (18) は実質的には一様分布関数とみることができる。これはまた Fig. 9 の実線がほとんど一定勾配で立ち上がっていることからわかる。

これは驚くべき結果である。なんとなれば分布形についてのなんらの情報も含んでいない式 (13) を条件として推定された分布関数が, 式は指数分布であるにもかかわらず実質的には真の W series の分布曲線形 (3. の末部で entropy 理論とは無関係に W series の分布曲線形は一様分布であることを論じた) を表わしているからである。この結果は前記仮定の妥当性を裏付けるのみ

ならず maximum entropy 理論の威力を示しているものといえよう。

なお Jaynes⁵⁾ は熱力学等の分野において物理変量の平均値だけが既知の場合でも, maximum entropy の理論を適用することによりその物理変量の挙動を律する物理法則および分布関数を導き得ることの根拠と条件を二, 三の実例とともに示している。しかし上記結果を Jaynes の所論と照らして考えると, maximum entropy 理論をさらに一般の水量の分布関数の推定に適用することも可能であろう。

最後になお次のような問題が残されている。その一つは前節までに論の対象としてきた W series は蒸発散の季節変動を抑圧または除去した残りの series であることである。しかし本論の目的とするところは蒸発散の推定にある以上, その変動の主因である季節変動が除去された series についての解析のみでは必ずしも満足できない。第 2 の問題点は W series の分布曲線が一様分布であることは entropy 理論を用いるまでもなくすでに明らかである点にある。分布曲線が既知であることにより, entropy 理論を蒸発散の分布曲線の推定に用いることの妥当性を確かめ得たことは収穫であったが, 蒸発散そのものの推定に限れば, わざわざ entropy 理論に頼らなくとも f を trial に変化させて一様分布となる W series を (3. の計算だけで) 求めることができる。

以上の考察から季節変動を抑圧する前の蒸発散 (以降 E series と略記する) について直接 entropy 理論適用の可能性を検討する要請が当然生ずる。

以下その検討を行うこととする。この場合の問題は E series が 4. の第 2 の基礎条件を満たすか否かに絞られる。さて Fig. 7 の実線は確かに蒸発散の季節変動を示しているが, その周期は必ずしも正確に 1 年とはなっていない。 E series の周期が厳密には 1 年といえないことは Fig. 3 の cycle period がすべて異なることおよび f の調整計算において各 cycle 間の気候変化がかなり大幅であったことから推察できる。前節までの論はこれを近似的に 1 年とみなし 12 か月の移動平均を用いて季節変動を抑圧することにより上記基礎条件が満たされるものとした。これに反して以下ではこの周期の違いを無視しないこととする。したがって E series は複雑な周期をもつ series として取り扱わなければならないこととなる。しかしながらもし E series が ergodic な series であるならば, 十分長い期間のデータについては, その分布は一定の分布に従いその平均値は E series の属する母集団の平均値に近いといえることができる。よってここで E series の ergodicity を仮定すると前記基礎条件は満たされることとなり maximum entropy 理論の適用が可能となる⁶⁾。

前節までの計算例は calibration 期間が6年であるので平均値 31.4 mm を ergodic series としての E series の平均値として採用することはかなりの誤差を伴うこととなるが、なおこの近似が成立するものとして計算を試みることにする。具体的な計算法は季節変動を抑圧する計算を省き、 W_i を E_i と読みかえるだけで前節までの計算法とまったく同じである。計算結果 $f_w = .002$, $f_d = .001$ を start 値としてもつ case が検定値 $T_2 = .016$ を与え解となった。このときの E series の月次値を Fig. 7 に点線で示す。同図の実線との差は僅少で、雨量、流量の観測値に含まれる誤差を考慮すれば両者の違いは無視してもよいと考えられる。

よって実際の蒸発散の推定においては calibration 期間が数年の場合は前節までの方法または本節の方法いづれを用いてもよいといえる。

8. むすび

自然流域における蒸発散量の推定について論じ、実例についてその推定法がほぼ妥当であることを証した。な

お使用計算機は HP 9835 B desktop computer である。

終わりに神流川の観測に努力され貴重な資料をまとめられた竹内博士に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Ray, K. Linsley, Jr., et al. : Hydrology For Engineer, p. 163, McGraw-Hill, 1982.
- 2) 飯谷太一 : 予測の知識, 森北出版, pp. 99~101, 1980.
- 3) Ikebuchi, S. and T. Takasao : Stochastic aspects on the runoff system and model making based on the concept of entropy, Third International Simposium On Stochastic Hydraulics, Aug. 1980, Tokyo, Japan.
- 4) Alexander M. Mood, et al. : Introduction To The Theory Of Statistics, pp. 14~32, McGraw-Hill, 1974.
- 5) Jaynes, E.T. : Information theory and statistical mechanics, Physical Review, Vol. 106, No. 4, May 15, 1957.
- 6) Claude E. Shannon and Warren Weaver : The Mathematical Theory Of Communication, University of Illinois Press, 1949.
- 7) Conover, W.J. : Practical Nonparametric Statistics, p. 314, John Wiley & Sons, 1971.
- 8) Draper, N.R. et al. : Applied Regression Analysis, p. 218, John Wiley & Sons, 1981.

(1983.1.5・受付)