

ガス管橋の振動実験

VIBRATION TESTS ON GAS PIPELINE BRIDGES

張 間 正 義*・北 川 貴 一**・尾 添 広 道***

By Masayoshi HARIMA, Takahito KITAGAWA and Hiromichi OZOE

1. ま え が き

本研究はガス管橋の耐風性の検討を念頭に置いて、その基礎データを得るために振動実験を行い、固有振動数と構造減衰についてまとめた結果を報告するものである。

ガス管橋の耐震・耐風性を検討する場合、橋固有の振動特性として、固有振動数や構造減衰の推定が必要となる。従来、道路橋の振動実験は数多く行われており、それらのデータは公表されているものが多く、また従来の実験データをまとめた論文¹⁾等もあって、データは容易に入手できる。しかしガス管橋に関しては、著者らの知る限り、実験は行われているものの、公表された例は見当たらず、容易に入手できる形でのデータの蓄積が必要と思われる。そこで今回、以下の2点に主眼を置いてガス管橋の振動実験を行ったので、その結果を報告する。

ガス管橋は、河川等を架け渡されている部分はパイプを主構成部材とするきわめて簡単な構造で、トラス等で補剛されていなければどのガス管橋も大差のない構造をしているが、埋設部に入る部分は千差万別であるため、道路橋と同様¹⁾、固有振動特性にはかなりのばらつきが予想される。したがって今回の実験ではできる限り多くのガス管橋を測定することを第1の主眼とした。

第2に、ガス管橋の耐風性が問題となるのは長径間で無補剛の独立橋であると考えられるので、スパン長/管径 >40 を一応の目安とし、トラス等で補剛されておらず、また道路橋等に添架されていない独立橋、もしくはそれに類するものを測定対象とした。

以上の2点を考慮して、実験を行ううえで立地条件のよいと思われるできる限り多くの長径間無補剛独立ガス管橋を選択した。また短期間のうちに多くのガス管橋の

測定を行うために、実験方法として簡便な加振方法を採用し、加振後の自由減衰振動波形より固有振動数と構造減衰^{注1)}を求めた。簡便な実験手法による欠点として、簡単に構造減衰を求めることができない場合があり、データ解析に一工夫が必要となったので、解析手法も含めて測定結果を報告する。

2. 測定方法

ガス管橋は道路橋と比較すると規模が小さいため、加振は人力により容易に行うことができるものと考えられる。加藤、島田は橋梁の現地振動実験法を紹介しており²⁾、これを参考にして事前に手法を検討した結果、今回の実験においては、簡便性の点から人力加振法およびロープ引張法を採用し、現地の地形的条件より適当な方を選択することとした。ガス管上で人が振動に合わせて屈伸したり、ガス管に結び付けたロープを人が引張って加振をするか、ロープをチェンブロック等で引張ってガス管に初期変位を与え、加振を中止した後、あるいは初期変位を開放した後の自由減衰振動波形から固有振動数と構造減衰を求めた。起振機を用いれば比較的容易に所定のモードの振動が得られるが、今回の実験では、種々のモードでの振動実験を行って詳細なデータを収集することよりも、できる限り多くのガス管橋を測定することを優先させるため、簡便な加振方法を採用したものである。

本加振方法を採用した結果としてやむを得ないことではあるが、測定の対象とした振動モードは、主として、本加振方法で最も発生しやすいと考えられる最低次の振動モードである。また本加振方法によるもう1つの欠点

注 1) 減衰作用は空力減衰、粘性減衰、内部摩擦による減衰等種々考えられるが³⁾、ここでは空力減衰以外の減衰作用という意味で、すなわち、外力に起因する減衰ではなく、構造物固有の減衰という意味で構造減衰とよぶことにする。またその原因を特定できないため、粘性減衰的に取り扱って、対数減衰率で整理する。

* 大阪瓦斯(株)供給管理部係長

** 正会員 工修 日本鋼管(株)技術研究所係長

*** 日本鋼管(株)大阪営業所

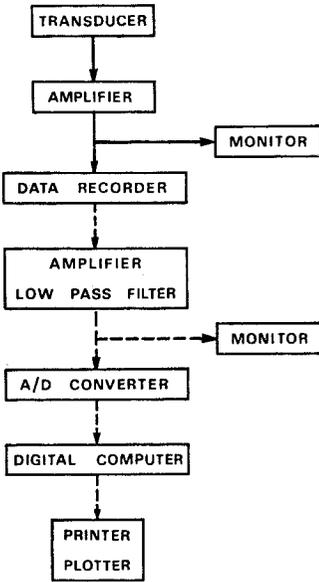


図-1 測定・解析の流れ図

として、ある特定のモードが卓越した振動波形が得られず、2つ以上のモードが混在した振動波形が得られることがある。この場合には自由減衰振動波形から振動振幅を読み取って構造減衰を求めることができなくなるため、別の解析手法により構造減衰を求めることとした。測定・解析の流れ図を図-1に示す。実線の矢印は測定現場での信号の流れを、破線の矢印はデータを持ち帰って後処理を行った信号の流れを示す。変位は、主として、スパン中央に取り付けた加速度計の出力を積分回路を通して変位に変換して測定した。測定はデータがばらつくことを考慮して、1橋につき5~10回程度行った。

3. 解析方法

固有振動数はピークの計数およびスペクトル解析によって求めた。1つの振動モードが卓越した場合には両者の結果はほぼ一致するが、そうでない場合にはピークの計数によると誤差が大きくなるため、後に示す結果の表にはスペクトル解析の結果のみを示した。

構造減衰は得られた振動波形によって、次に示す2つの解析法を適宜選択して求めた。

(1) 解析1

1つの振動モードが卓越した場合には自由減衰振動波形から直接振幅を読み取り、波数を直線座標に、振幅を対数座標に取った片対数座標上にプロットし、それに曲線を当てはめて所定の振幅での接線を求め、その勾配より構造減衰を求めた。

(2) 解析2

1つの振動モードが卓越せず、図-2(a)の細線で示すような振動波形が得られた場合には、解析1を用いて構造減衰を求めることができない。この場合には次に示すように、測定値と推定値の誤差が最小自乗法的意味において最小となるように、最適化手法を用いて測定データに減衰振動波形を当てはめて構造減衰を求めた³⁾。

いま、変位 $Y(t)$ を、次式で示すように M 個の減衰振動波形の重ね合せで表示できると仮定する。

$$Y(t) = \sum_{i=1}^M \{ (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) e^{-\zeta_i \omega_i t} \} + C \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここで ω_i は固有円振動数、 ζ_i は減衰定数、 A_i と B_i は振幅、 C は $Y(t)$ の平均値を示す。厳密には上式の $\cos \omega_i t$, $\sin \omega_i t$ は $\cos \omega_i \sqrt{1-\zeta_i^2} t$, $\sin \omega_i \sqrt{1-\zeta_i^2} t$ となるが、 ζ_i が小さい場合を想定して上式を用いた。

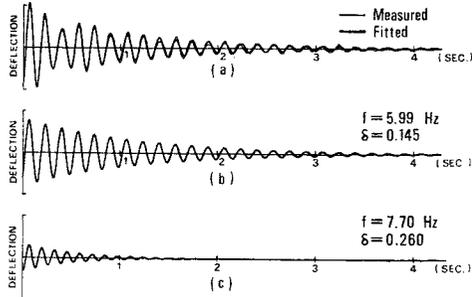
サンプル間隔を Δt 、サンプル数を N 、時刻 $t = k \cdot \Delta t$ での測定値および推定値をそれぞれ $X(k \cdot \Delta t)$, $Y(k \cdot \Delta t)$ とすると、自乗誤差 ϵ は、

$$\epsilon = \sum_{k=0}^{N-1} \{ X(k \cdot \Delta t) - Y(k \cdot \Delta t) \}^2 \quad \dots \dots \dots (2)$$

となる。これを最小にする条件のうち、 A_i , B_i , C に関しては、ある定まった値の ω_i , ζ_i に対して線形となり、直接求めることができる。すなわち、 $\partial \epsilon / \partial A_i = 0$, $\partial \epsilon / \partial B_i = 0$, $\partial \epsilon / \partial C = 0$ より得られる、 A_i , B_i ($i=1, 2, \dots, M$), C に関する $(2M+1)$ 元連立1次方程式を解けばよい。

これに対して ω_i , ζ_i については線形とはならず、直接求めることができないので、何らかの非線形最適化手法に頼らざるを得ない。ここでは式(2)の自乗誤差を最小化すべき目的関数として、Zangwillの直接最小化法⁴⁾を用いて ω_i , ζ_i を求めることにした。なお、ここで用いた非線形最適化のプログラムは文献5)で紹介されているものを用いている。非線形最適化手法によると local な解に収束することもあるので、global な解が求まっているか否かは、分解した減衰振動波形を合成し直して、測定波形と比較することによってチェックすることにした。

実際の振動波形の解析を行う前に、減衰振動波形を合成して作った正解のわかっているデータを解析して正解への収束性を検討した。その結果、未知数が多いと正解へ収束する場合の方がまれであるということが判明したので、実際の振動波形の解析では、未知数を減らすためにスペクトル解析によって有意な振動数の数(すなわち、合成すべき減衰振動波形の数) M と振動数 ω_i ($i=1, 2, \dots, M$) を求め、 ζ_i ($i=1, 2, \dots, M$) のみを非線形最適化手法の未知数とした。



図—2 測定波形の分解例

本解析法ではいくつかのモードの振動特性が求まるが、解析1との統一のために、また高次モードは微小振幅で混在する場合が多いと思われるために、原則として最低次の振動特性を採用することとした。

図—2 に実際の測定波形を分解した例を示す。(a)の細線は測定値を示し、これを分解した波形を(b),(c)に、そして(b),(c)を合成し直した波形を(a)の太線で示す。ここで f はスペクトル解析によって求めた振動数を、 δ は非線形最適手法によって求めた構造減衰(対数減衰率)を示す。本例でわかるように、2つ以上のモードが混在した減衰振動波形が得られた場合でも、本解析法によって構造減衰を求めることができると考えられる。

表—1 測定対象ガス管橋の諸元

No.	Span L (m)	Diameter D (m)	L_{max}/D	L_e (m)	Type (Fig. 3)
1	18.8	0.609 6	30.8	18.8	1
2	10.4	0.318 5	32.7	10.4	1
3	10.5	0.318 5	33.0	10.5	3
4	22.2	0.609 6	36.4	22.2	3
5	15.8	0.406 4	38.9	15.8	1
6	25.0	0.609 6	41.0	25.0	1
7	26.2	0.609 6	43.0	26.2	2
8	27.3	0.609 6	44.8	27.3	1
9	9.7	0.216 3	44.8	9.7	3
10	18.3	0.406 4	45.0	18.3	1
11	14.4	0.318 5	45.2	14.4	1
12	14.6	0.318 5	45.8	14.6	5
13	14.6	0.318 5	45.8	14.6	5
14	14.7	0.318 5	46.2	14.7	6
15	14.7	0.318 5	46.2	14.7	4
16	19.6	0.406 4	48.2	19.6	1
17	20.0	0.406 4	49.2	20.0	1
18	20.1	0.406 4	49.5	20.1	2
19	24.7	0.406 4	60.8	24.7	1
20	18.0+18.0	0.406 4	44.3	19.9	1
21	14.9+14.9	0.318 5	46.8	16.5	6
22	15.9+15.9	0.318 5	49.9	17.6	1
23	22.8+14.5	0.406 4	56.1	22.9	1
24	22.9+22.9	0.406 4	56.3	25.3	1
25	13.3+12.3+12.6	0.318 5	41.8	13.9	2
26	22.4+22.7+22.4	0.406 4	55.9	26.1	1
27	4 @ 11.9	0.216 3	55.0	14.1	6
28	7 @ 32.3	0.609 6	53.3	37.0	1
29	7 @ 32.3	0.609 6	53.3	27.7	7
30	9 @ 23.0	0.406 4	56.6	18.8	7

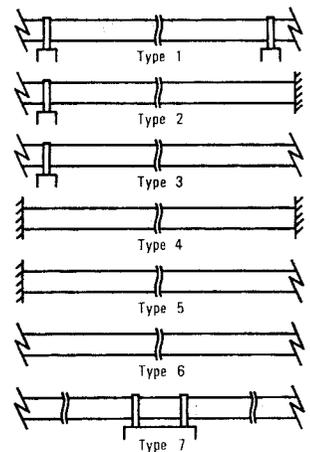
4. 測定結果および考察

測定対象ガス管橋の諸元を表—1に、測定結果を表—2に示す。後述するように、表—1の L_{max} は単径間の場合にはスパン長そのものを、多径間の場合には最大スパン長を意味し、 L_e は固有振動数が等価になるような回転弾性支持ばりのスパン長を、Type は図—3に示す支持形式を表わしている。表—2の固有振動数 f は数回の測定の平均値を、構造減衰(対数減衰率) δ はばらつきが大きかったので、数回の測定値の最小値と最大値で幅をもたせて表示するとともに、() 内に平均値を示し、後の解析にはこの平均値を用いている。なお No. 25 のガス管橋は、後述の固有振動解析の結果と比較し、2次モードの振動が得られたと判断した。

(1) 支持形式、スパン数

今回の調査対象とした独立ガス管橋は、多径間の場合には大多数が同様なリング支持形式の中間支持になっており、各ガス管橋で異なるのは埋設部に入る箇所である。したがって、この部分の違いにより支持形式を分類するのが妥当であると考え、図—3のように分類した。ただし埋設部の詳細構造が不明の場合には、地上のみえ

る部分のみで判断した。図—3で、Type 1の両端、Type 2の左端等で示されている支持形式は、リング支持部から埋設部に入り、通常、鞅管との間に弾性シーリング材が詰められている状態を示す。Type 2の右端、Type 4の両端等で示されている支持形式は、埋設部の直前にリング支持がな



図—3 支持形式

く、固定に近い支持で直接埋設部に入っている状態を示す。Type 3の右端は、Type 2の右端と同様、リング支持を経ずに直接埋設部に入り、通常、鞅管との間に弾性シーリング材が詰められている。Type 7はType 1~6と異なり、中間のリング支持が2重になっているものである。

スパン数に関しても支持形式と同様、埋設部の詳細構

造が不明の場合には、地上のみえる部分のみで判断した。また 図-3 の Type 1 や Type 2 の左端のように、埋設部の直前にリング支持がある場合には、スパン長としてはリング支持までとし、リング支持と埋設部の間はスパン数に入れていない。

(2) 固有振動数

スパン長 L 、管径 D の管桁の固有振動数 f は D/L^2

表-2 測定結果

No.	Freq. f (Hz)	Log. Decrement δ () : mean		Reference (Analysis 1)	
		Analysis 1 $a/L_{max} = 1/20\,000$	Analysis 2	δ	a/L_{max}
1	7.29	—	0.181~0.312 (0.248)	—	—
2	13.87	0.123~0.155 (0.138)	—	0.151	1/10 000
3	10.74	0.071~0.081 (0.076)	—	0.078	1/6 300
4	4.61	0.198~0.216 (0.206)	—	0.216	1/18 600
5	6.64	0.226~0.243 (0.236)	—	0.238	1/10 000
6	4.61	—	0.045~0.062 (0.055)	—	—
7	4.45	—	0.070~0.133 (0.103)	—	—
8	4.53	0.034~0.036 (0.035)	—	0.036	1/13 400
9	10.55	—	0.141~0.214 (0.166)	—	—
10	5.60	0.054~0.068 (0.061)	—	0.076	1/10 500
11	6.12	0.160~0.233 (0.193)	—	0.234	1/10 000
12	6.90	0.049~0.062 (0.054)	—	0.053	1/4 400
13	8.20	0.088~0.095 (0.092)	—	0.105	1/10 000
14	5.21	0.100~0.105 (0.103)	—	0.114	1/3 600
15	7.81	0.129~0.133 (0.132)	—	0.132	1/4 900
16	5.08	0.105~0.113 (0.109)	—	0.084	1/4 400
17	4.77	0.091~0.094 (0.093)	—	0.094	1/3 700
18	5.73	0.041~0.043 (0.042)	—	0.048	1/13 000
19	4.69	0.057~0.085 (0.085)	—	0.102	1/4 200
20	4.84	0.079~0.085 (0.081)	—	0.112	1/3 700
21	5.99	0.141~0.156 (0.147)	0.137~0.148 (0.143)	0.156	1/16 400
22	5.08	—	0.129~0.204 (0.155)	—	—
23	4.77	0.032~0.034 (0.034)	—	0.032	1/5 300
24	2.89	—	0.056~0.072 (0.064)	—	—
25	10.74 (2nd)	—	0.020~0.031 (0.025)	—	—
26	2.97	—	0.155~0.175 (0.167)	—	—
27	4.82	—	0.037~0.048 (0.044)	—	—
28	2.27	—	0.025~0.053 (0.035)	—	—
29	3.50	—	0.025~0.054 (0.043)	—	—
30	3.91	—	0.072~0.151 (0.117)	—	—

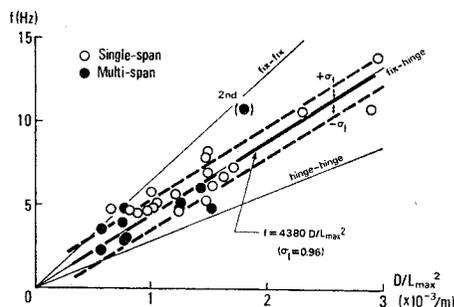


図-4 固有振動数

に比例するので、固有振動数の測定値を D/L^2 に対してプロットして測定値の傾向を調べる。多径間の場合、 L としてどのような値を用いるべきであるかという問題があるため、試みに最大スパン長 L_{max} を用いた場合を図-4 に示す。ここで記号○、●はそれぞれ単径間、多径間のガス管橋の測定値を、細い実線は振動数の高いものより順に、両端固定、一端固定・一端ヒンジ、両端ヒンジの管桁の理論値を示し、太い実線は2次モードの振動が得られたと判断される No. 25 を除いた測定値の回帰直線で、破線はこれより $\pm\sigma_f$ (σ_f は標準偏差) 隔たった値を示す。

次に多径間ガス管橋を固有振動数が等価になるようなはりに置換し、そのスパン長 L_e を用いて固有振動数の測定値をプロットする。図-4 より測定値の回帰直線は一端固定・一端ヒンジの管桁の固有振動数に近い結果が得られているので、等価はりとしてこの形式のはりを採用することにし、各多径間ガス管橋の固有振動数を計算して、それと等価はりの固有振動数が等しくなるようにスパン長 L_e を求める。固有振動数を計算する場合、埋設部に入る部分を回転弾性支持と考えると、その回転ばね定数 K_θ を次のようにして定める。

回転弾性支持ばりの固有振動数 f と K_θ の関係を用いて、単径間ガス管橋の f の測定値から K_θ を推定し、その平均値を埋設部に入る部分の支持モデルの定数と考えてもよいが、ここでは、図-4 で単径間ガス管橋の固有振動数が一端固定・一端ヒンジの管桁の固有振動数に近いことから、これと両端回転弾性支持ばりの固有振動数を等置することによって K_θ を求める。スパン長を L 、曲げ剛性を EI とすると、 $K_\theta \cdot L/EI = 5.4$ (1/rad.) となる。この K_θ を埋設部に入る部分の支持モデルの回転ばね定数として多径間ガス管橋の固有振動数の数値計算を行う。この計算値を用いて等価はりのスパン長 L_e を求め、 f の測定値を D/L_e^2 に対してプロットすると図-5 のようになる。ここで記号および直線は図-4 の場合と同様であり、No. 25 は1次の固有振動数の計算値を用いて L_e を求めている。標準偏差は 0.89 で、図-4 の場合と比較するとばらつきは若干小

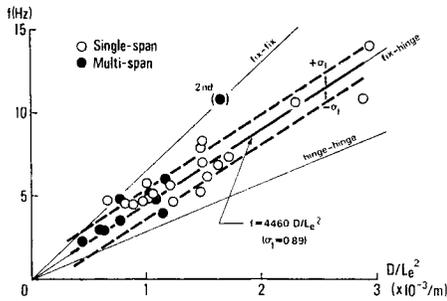


図-5 固有振動数

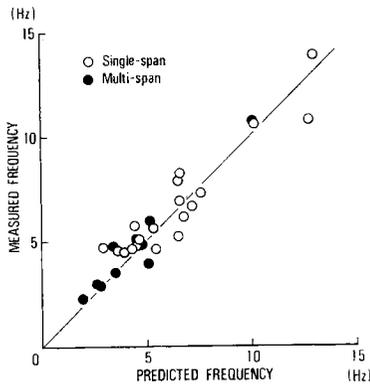


図-6 固有振動数の計算値と測定値

さくなっている。また単径間、多径間で同一の直線での近似度が L_{max} を用いた 図-4 よりもよくなっていると思われる。以上の結果よりガス管橋の固有振動数は、管桁の理論値から推定されるように D/L^2 に比例し、測定値のばらつきも比較的小さいように思われる。

次に固有振動数をどの程度正確に推定できるかを調べるために、計算値に対して測定値をプロットした結果を図-6 に示す。記号は 図-4 と同様であり、直線は計算値と測定値の一致を意味する。計算値としては、単径間の場合には一端固定・一端ヒンジの管桁の理論値を、多径間の場合には前述の数値計算法によって得られた値を用いている。また No. 25 では 2 次の固有振動数の計算値と比較している。この図よりガス管橋の固有振動数は数値計算によって比較的良好に推定できるものと考えられる。

(3) 構造減衰

解析 2 では振動振幅に対する構造減衰の非線形性は考慮されていないが、解析 1 では振動振幅によって異なった構造減衰が得られるので、原則として、振動振幅/スパン長 $a/L=1/20\,000$ (多径間の場合には L として最大スパン長 L_{max} を用いる) における値を採用した。この数値を選んだ理由は、単に、加振振幅が小さい場合があるために全体を通じて採用可能な数値として選んだ

に過ぎず、特に根拠があって選んだものではない。

一般に設計時の応力の照査 ($a/L \approx 1/1\,000$)⁹⁾ においてもっと大きい振動振幅での構造減衰が必要であるが、使用性上の問題、たとえば応力的には問題はないが、ガス管橋が風によって振動しているということに対する周辺住民の不安感に対処するような場合には、比較的小振幅での構造減衰が必要になると思われ、小振幅から大振幅まで広い範囲の構造減衰が必要であると考えられる。今回の振動実験では比較的小振幅での構造減衰についてまとめているが、もっと大きい振動振幅での構造減衰の振幅依存性の傾向をみるために、参考として表-2 には、得られたデータのうちの最大の振幅における構造減衰も示してある。これによると、 a/L が $1/20\,000$ よりもずっと大きい振動振幅 ($1/3\,000 \sim 1/4\,000$) でも構造減衰はやや大きくなるものの、 $1/20\,000$ における値とほぼ同じ程度の値が得られていることがわかる。したがって今回得られた $a/L=1/20\,000$ におけるデータは、応力の照査に必要な $1/1\,000$ 程度の振動振幅に対しては不明であるが、安全側のデータとして使用可能であると考えられる。

表-2 の構造減衰 (対数減衰率) δ を L_{max}/D および L_e/D に対してプロットした結果を図-7、図-8 に示す。 L_{max} 、 L_e および記号は固有振動数の場合と同様である。これらの図は δ を直線座標に、 L_{max}/D および L_e/D を対数座標にプロットしているが、両直線座

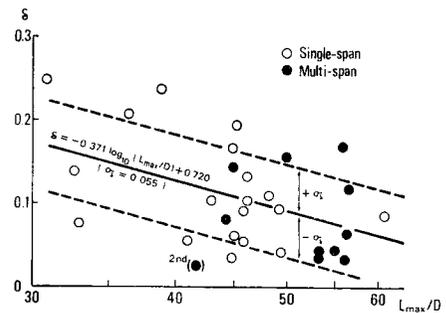


図-7 構造減衰

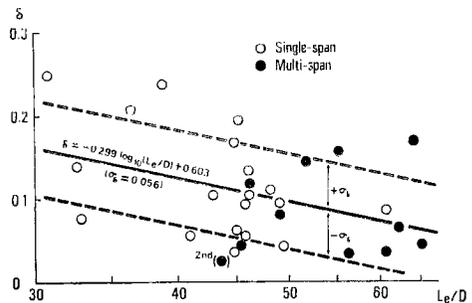


図-8 構造減衰

標、両対数座標等にもデータをプロットして直線の当てはまりを検討した結果、これが最良の結果を得たものである。実線は実験値の回帰直線で、破線はこれより $\pm\sigma_0$ (σ_0 は標準偏差)隔たった値を示す。

スパン長 L として L_{\max} を採用した場合と L_0 を採用した場合には標準偏差はほぼ同じで直線の当てはまりに差はなく、今回の実験対象としたガス管橋の場合には、特に L_0 を計算する必要はなかったように思われる。

構造減衰は固有振動数の測定結果と比較すると、ばらつきがきわめて大きいものの、 L/D が大きくなるほど小さくなる傾向を示している。一般に無補剛のガス管橋が耐風性上問題となるのは $L/D > 40$ といわれており⁹⁾、この範囲のデータから設計時の振動計算等に用いる最も安全側の値として構造減衰を予測するとすれば、対数減衰率で $\delta \approx 0.03 \sim 0.04$ 程度と考えてよいものと思われる。

構造減衰に対する支持形式とスパン数の影響を調べたが、データのばらつきが大きいため有意差のない結果となり、今回の測定データのみではこれらの要因による影響は明らかにはならなかった。

5. ま と め

本研究は比較的簡便な手法によってガス管橋の振動実験を行ったもので、その手法および測定結果をまとめると次のようになる。

(1) 人力加振法あるいはロープ引張法によって得た自由減衰振動波形より、主として最低次の振動特性(固有振動数と構造減衰)を求めた。

(2) 簡便な加振手法による欠点として、1つの振動モードが卓越するような振動波形が得られず、2つ以上のモードが混在した振動波形が得られる場合があったが、この場合には測定値と推定値の誤差が最小自乗法的意味において最小となるように、最適化手法を用いて測定データに減衰振動波形を当てはめて構造減衰を求め

た。

(3) 固有振動数の計算値は測定値と比較的よく一致し、単径間の場合は一端固定・一端ヒンジの管桁の固有振動数の理論値に近い値を示す。多径間の場合の固有振動数の計算には、埋設部に入る部分を回転弾性支持と考え、 $K_0 \cdot L/EI = 5.4$ (1/rad.) より得られる回転ばね定数 K_0 を用いればよい。

(4) 構造減衰は L/D が大きくなるほど小さくなる傾向を示し、固有振動数の場合と比較するとばらつきが大きい。設計時の振動計算等に用いる最も安全側の値として構造減衰を予測するとすれば、対数減衰率で $\delta \approx 0.03 \sim 0.04$ 程度と考えてよいものと思われる。

(5) 構造減衰に対する支持形式とスパン数の影響は、今回の測定データでは明らかにはならなかった。

謝 辞：本研究をまとめるにあたり日本鋼管(株)技術研究所・耐風構造研究室の辻室長、村田係長から多くの助言と討議を得た。また実験の遂行にあたり大阪瓦斯(株)、日本鋼管(株)、日本鋼管工事(株)の関係諸氏に協力をいただいた。ここに記して謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) 加藤雅史・島田静雄：橋梁実測振動特性の統計解析，土木学会論文報告集，No. 311，pp. 49～58，1981年7月。
- 2) 加藤雅史・島田静雄：橋梁の現地振動実験法，土木学会誌，Vol. 66，No. 2，pp. 38～42，1981年2月。
- 3) 小野田淳次郎：ランダム応答解析による翼の動特性推定の試み，日本航空宇宙学会誌，Vol. 26，No. 299，pp. 39～46，1978年12月。
- 4) Zangwill, W.I.: Minimizing a function without calculating derivatives, Computer Journal, Vol. 10, pp. 293～296, October, 1967.
- 5) 日本鋼構造協会・技術委員会・塑性設計小委員会最適化研究班：構造設計への非線形最適化手法の応用に関する研究報告(そのII)，JSSC, Vol. 13, No. 140, pp. 29～34, 1977年8月。
- 6) (社)日本道路協会：道路橋示方書・同解説(I共通編，II鋼橋編)，丸善(株)，pp. 296～300，1980年2月。
- 7) 伊藤 学・片山恒雄：橋梁構造の振動減衰，土木学会論文集，No. 117, pp. 12～22, 1965年5月。

(1983. 6. 20・受付)