

応答共分散漸化式の誘導と応用

DERIVATION AND APPLICATION OF RECURSIVE COVARIANCE
RESPONSE

星谷 勝*・石井 清**・永田 茂***

By Masaru HOSHIYA, Kiyoshi ISHII and Shigeru NAGATA

1. はじめに

近年、構造物の動的応答解析や設計の際、応答スペクトル曲線や過去の著名な実地震記録を用いた解析、設計が主に行われている。このうち、応答スペクトル曲線を用いた決定論的解析は、比較的容易であるが、地震動が多くの不確定要因に支配されている点を考慮すると、その使用において限界があるのは事実である。このような限界を打解する方法の一つに、不規則振動論¹⁾を用いた振動解析があり、この分野に関する研究²⁾も盛んに行われている。

不規則振動論を用いた振動解析では、確率過程入力に対する応答として共分散応答が得られる。さらに、共分散応答を最大応答理論において使用することにより、最大応答の確率分布を算出できることは周知のとおりである。本論文は、不規則振動解析の一連の流れのうち、応答共分散の効率よい計算方法に関する提案を行うものである。

ところで、応答共分散の効率よい計算方法に関しては、いくつかの提案^{3)~6)}が行われている。岡林は、不規則外力をホワイトノイズから構成される確率過程でモデル化することにより、構造-外力系を伊藤型の確率微分方程式で表現した。さらに、この方程式から誘導される共分散方程式を用いて、はりの解析を行っている。また、A. DebChaudhury と D.A. Gasparini は、ホワイトノイズ入力にフィルターをかけることにより、振幅・周波数が非定常性をもち、互いの波形が相関を有するような多次元非定常確率過程入力を、周波数領域で構築した。さらに、構造-外力系を一つにまとめた状態ベクトルに関する状態方程式より共分散漸化式の誘導を行っている。

以上のように、応答共分散を効率よく求めるうえで有

意義な提案が行われているが、いずれの手法においても、入力を適切な確率過程モデルで表現することは重要なポイントになる。

そこで、本論文では、A. DebChaudhury と D.A. Gasparini の研究から基本的なヒントを得たうえで、入力的一般化および理論の簡素化を試みた。このため、著者のうちの一人によって提案されている時系列モデルの多次元非定常自己回帰モデル [Autoregressive Model (AR モデル)⁹⁾] による入力のモデル化を行うことにより、応答共分散漸化式¹⁰⁾の誘導を行った。まず、線形加速度法で求めた振動方程式の解をマトリックス表示した式と、AR モデルを状態空間表示した式を一つにまとめることにより、入力-応答を要素とする状態ベクトルに関する状態方程式を作成した。さらに、状態方程式から、効率的な応答計算を可能にする応答共分散漸化式を誘導したものである。数値計算では、ねじれ振動モデルの振動解析を行い、シミュレーション解による漸化理論式の検証を行った。最後に、第 2 の例題として、漸化理論式を用いた原子炉建屋の振動解析を行った。ここでは、既往の最大応答理論に関する研究を用いて、部材力などの最大応答の確率分布の計算例を示し、最大応答理論への応用例を示した。

2. 応答共分散漸化式の誘導

(1) 基本振動方程式

多質点系線形構造物の 1 地点に多成分地震動が作用する場合の振動方程式は、式 (1) で表わすことができる。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M\ddot{z}(t) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 M : 質量マトリックス、 C : 減衰係数マトリックス、 K : 剛性マトリックス、 $I=[\delta_{ij}]$: 多成分地震動の入力条件を決定する異方マトリックス、 x : 相対変位応答ベクトル、 $\ddot{z}(t)$: 入力加速度ベクトル。以後、構造物の自由度を n 、入力地震動成分の数を m とする。

* 正会員 Ph.D. 武蔵工業大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 清水建設(株)大崎研究室研究員

*** 学生会員 武蔵工業大学工学部土木工科大学院修士課程

式 (1) の解を、式 (2) のように置く。

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{y} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $\Phi = [\phi_{ij}]$: モーダルマトリックス、 \mathbf{y} : 一般化座標ベクトル。

式 (2) を式 (1) に代入し、両辺に左から Φ^T をかけて、整理すると、

$$\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_n \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_n \mathbf{y} = -\mathbf{R} \ddot{\mathbf{z}}(t) \dots\dots\dots (3)$$

$$\mathbf{R} = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{I}$$

となる。ここで、 \mathbf{M}_n : 一般化質量マトリックス、 \mathbf{C}_n : 一般化減衰マトリックス、 \mathbf{K}_n : 一般化剛性マトリックス、 \mathbf{R} : 刺激係数マトリックス、“ T ” は、転置マトリックスを表わす。

式 (3) を各振動モードに関する式に分離すると、 i 次モードに関する式は、

$$\ddot{y}_i + 2\beta_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = -\sum_{l=1}^m R_{il} \ddot{z}_l(t) \dots\dots (4)$$

ここで、 β_i , ω_i , R_{il} は、それぞれ i 次モードの減衰定数、固有円振動数、入力地震動成分 $\ddot{z}_l(t)$ に対応する i 次モードの刺激係数。

式 (4) の微分方程式を、 $t = k \cdot \Delta t$ で離散化表示して、線形加速度法より求めた解をマトリックス表示すると、

$$\boldsymbol{\eta}_i(k+1) = \mathbf{H}_i \boldsymbol{\eta}_i(k) + \mathbf{E}_i \ddot{\mathbf{z}}(k+1) \dots\dots\dots (5)$$

となる。なお、離散型数値積分にはいくつかの手法があるが、精度の面で大きな差がないので、ここでは線形加速度法を用いている。ただし、 $\boldsymbol{\eta}_i(k)$, $\ddot{\mathbf{z}}(k+1)$, \mathbf{H}_i , \mathbf{E}_i は次式のように表わすことができる。

$$\boldsymbol{\eta}_i(k) = [y_i(k), \dot{y}_i(k), \ddot{y}_i(k)]^T \dots\dots\dots (6)$$

$$\ddot{\mathbf{z}}(k+1) = [\ddot{z}_1(k+1), \ddot{z}_2(k+1), \dots, \ddot{z}_m(k+1)]^T \dots\dots\dots (7)$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} h_{i11} & h_{i12} & h_{i13} \\ h_{i21} & h_{i22} & h_{i23} \\ h_{i31} & h_{i32} & h_{i33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_1(k) \\ \ddot{\mathbf{p}}_2(k) \\ \ddot{\mathbf{p}}_3(k) \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{p}}_m(k) \end{bmatrix}_{(mM \times 1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}(k), & & & & \\ \mathbf{B}_{21}(k), & \mathbf{B}_{22}(k), & & & \\ \mathbf{B}_{31}(k), & \mathbf{B}_{32}(k), & \mathbf{B}_{33}(k), & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{B}_{m1}(k), & \mathbf{B}_{m2}(k), & \mathbf{B}_{m3}(k), & \dots, & \mathbf{B}_{mm}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_1(k-1) \\ \ddot{\mathbf{p}}_2(k-1) \\ \ddot{\mathbf{p}}_3(k-1) \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{p}}_m(k-1) \end{bmatrix}_{(mM \times 1)} + \mathbf{V} \times [\epsilon_1(k), \epsilon_2(k), \epsilon_3(k), \dots, \epsilon_m(k)]^T_{(m \times 1)} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $\ddot{\mathbf{p}}_i(k)$, $\mathbf{B}_{ii}(k)$, $\mathbf{B}_{ij}(k)$, \mathbf{V} は、それぞれ次のように表わすことができる。

$$\ddot{\mathbf{p}}_i(k) = [\ddot{z}_i(k), \ddot{z}_i(k-1), \ddot{z}_i(k-2), \dots, \ddot{z}_i(k-M+1)]^T_{(M \times 1)} \dots\dots\dots (13)$$

$$\mathbf{B}_{ii}(k) = \begin{bmatrix} b_{ii}(1, k), b_{ii}(2, k), \dots, b_{ii}(M-1, k), b_{ii}(M, k) \\ 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}_{(M \times M)} \dots\dots\dots (14)$$

$$\mathbf{B}_{ij}(k) = \begin{bmatrix} b_{ij}(1, k), b_{ij}(2, k), \dots, b_{ij}(M-1, k), b_{ij}(M, k) \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{\substack{(i \neq j) \\ (M \times M)}} \dots\dots\dots (15)$$

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} e_{i11}, e_{i12}, \dots, e_{i1m} \\ e_{i21}, e_{i22}, \dots, e_{i2m} \\ e_{i31}, e_{i32}, \dots, e_{i3m} \end{bmatrix}_{(3 \times m)} \dots\dots\dots (9)$$

さらに、式 (8), (9) の要素は、

$$h_{i11} = 1 + (\Delta t)^2 a_i^2 \omega_i^2 / 6, h_{i12} = \Delta t + (\Delta t)^2 a_i b_i / 6,$$

$$h_{i13} = (\Delta t)^2 / 3 + (\Delta t)^2 a_i d_i / 6, h_{i21} = \Delta t a_i \omega_i^2 / 2,$$

$$h_{i22} = 1 + \Delta t a_i b_i / 2, h_{i23} = \Delta t / 2 + \Delta t a_i d_i / 2,$$

$$h_{i31} = a_i \omega_i^2, h_{i32} = a_i b_i, h_{i33} = a_i d_i,$$

$$a_i = -\{1 + \Delta t \beta_i \omega_i + (\omega_i \cdot \Delta t)^2 / 6\}^{-1},$$

$$b_i = 2 \beta_i \omega_i + \omega_i^2 \Delta t, d_i = \Delta t \beta_i \omega_i + (\Delta t \cdot \omega_i)^2 / 3,$$

$$e_{ij} = (\Delta t)^2 a_i R_{ij} / 6, e_{i2j} = \Delta t a_i R_{ij} / 2,$$

$$e_{i3j} = a_i R_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

$$\Delta t = \text{等間隔の時間刻み}.$$

(2) 入力地震動の確率過程モデル

加速度入力 $\ddot{z}_i(k)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) を、互いに相関を有するような確率過程にモデル化するために、多次元非定常 AR モデル⁹⁾を用いると、

$$\ddot{z}_i(k) = \sum_{p=1}^i \sum_{j=1}^M b_{ip}(j, k) \ddot{z}_p(k-j) + \epsilon_i(k)$$

$$t = k \cdot \Delta t \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\dots\dots\dots (10)$$

となる。式 (10) において $\ddot{z}_i(k)$ は、 $E[\ddot{z}_i(k)] = 0$ の確率過程である。 $b_{ip}(j, k)$ は、 $\ddot{z}_i(k)$ の周波数の非定常性を決定する確定的な係数である。また、 $\epsilon_i(k)$ は、 $E[\epsilon_i(k)] = 0$ であり、 $\ddot{z}_i(k)$ の振幅の大きさ、形状を決定する非定常ホワイトノイズである。 $\epsilon_i(k)$ と $\epsilon_j(l)$ の共分散は、

$$E[\epsilon_i(k) \epsilon_j(l)] = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \sigma_{ij}^2(k) & k = l \end{cases} \dots\dots\dots (11)$$

なる性質を有する。 $E[\]$ は、期待値を表わす。

式 (10) の AR モデルを応答共分散漸化式に組み込むために、状態空間表示¹¹⁾すると、

$$\sigma^2(k) = E[\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)] = \begin{matrix} \left[\begin{array}{cccc} E[y_i(k)z_1(k+1)], & E[y_i(k)z_1(k)], & \dots, & E[y_i(k)z_1(k-M+2)], \dots \\ E[\dot{y}_i(k)z_1(k+1)], & E[\dot{y}_i(k)z_1(k)], & \dots, & E[\dot{y}_i(k)z_1(k-M+2)], \dots \\ E[\ddot{y}_i(k)z_1(k+1)], & E[\ddot{y}_i(k)z_1(k)], & \dots, & E[\ddot{y}_i(k)z_1(k-M+2)], \dots \\ \hline E[\dot{z}_1^2(k+1)], & & \text{Sym.} & \\ E[z_1(k)z_1(k+1)], & E[\dot{z}_1^2(k)], & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E[z_1(k-M+2)z_1(k+1)], & E[z_1(k-M+2)z_1(k)], & \dots, & E[\dot{z}_1^2(k-M+2)], \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \right]_{[(3+mM) \times (3+mM)]} \\ \\ \left[\begin{array}{ccc} E[\varepsilon_1^2(k)], & & \text{Sym.} \\ E[\varepsilon_2(k)\varepsilon_1(k)], & E[\varepsilon_2^2(k)], & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E[\varepsilon_m(k)\varepsilon_1(k)], & E[\varepsilon_m(k)\varepsilon_2(k)], & E[\varepsilon_m(k)\varepsilon_3(k)], \dots, & E[\varepsilon_m^2(k)] \end{array} \right] \\ \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{11}^2(k), & & \text{Sym.} \\ \sigma_{21}^2(k), & \sigma_{22}^2(k), & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{m1}^2(k), & \sigma_{m2}^2(k), & \sigma_{m3}^2(k), \dots, & \sigma_{mm}^2(k) \end{array} \right]_{(m \times m)} \end{matrix}$$

ここで $\alpha_{ij}(k)$ は、時刻 k における応答共分散マトリックスであり、 $\sigma^2(k)$ は、AR モデルの非定常ホワイトノイズ $\mathbf{e}(k)$ の共分散を表わしている。

なお、実際の応答は式 (24) に示した $\alpha_{ij}(k)$ の要素を用いて算出することができる。第 i 番目の質点の

$$\begin{aligned} \text{絶対加速度 } \ddot{X}_i(k) &= \sum_{p=1}^n \phi_{ip} \ddot{y}_p(k) + \sum_{q=1}^m \delta_{iq} \ddot{z}_q(k), \\ \text{相対速度 } \dot{x}_i(k) &= \sum_{p=1}^n \phi_{ip} \dot{y}_p(k), \\ \text{相対変位 } x_i(k) &= \sum_{p=1}^n \phi_{ip} y_p(k) \end{aligned}$$

を用いると、第 i 番目と第 j 番目の質点の応答共分散は、

$$\begin{aligned} E[\ddot{X}_i(k)\ddot{X}_j(k)] &= \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n \phi_{ip} \phi_{jr} E[\ddot{y}_p(k)\ddot{y}_r(k)] \\ &+ \sum_{q=1}^m \sum_{r=1}^m \delta_{iq} \delta_{jr} E[\ddot{z}_q(k)\ddot{z}_r(k)] \\ &+ \sum_{p=1}^n \sum_{s=1}^m \phi_{ip} \delta_{js} E[\ddot{y}_p(k)\ddot{z}_s(k)] \\ &+ \sum_{q=1}^m \sum_{s=1}^m \delta_{iq} \delta_{js} E[\ddot{z}_q(k)\ddot{z}_s(k)] \\ E[\dot{x}_i(k)\dot{x}_j(k)] &= \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n \phi_{ip} \phi_{jr} E[\dot{y}_p(k)\dot{y}_r(k)] \\ E[x_i(k)x_j(k)] &= \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n \phi_{ip} \phi_{jr} E[y_p(k)y_r(k)] \end{aligned} \quad (25)$$

と表わされる。式 (25) 中の $E[\ddot{y}_p(k)\ddot{y}_r(k)], E[\ddot{z}_q(k)\ddot{y}_r(k)], E[\ddot{z}_q(k)\ddot{z}_s(k)],$

$$\alpha_{ij}(-1) = E[W_i(-1)W_j^T(-1)] = E[\eta_i^T(-1) \{ \dot{\mathbf{P}}_1^T(0), \dot{\mathbf{P}}_2^T(0), \dots, \dot{\mathbf{P}}_m^T(0) \}^T \times [\eta_j^T(-1) \{ \dot{\mathbf{P}}_1^T(0), \dot{\mathbf{P}}_2^T(0), \dots, \dot{\mathbf{P}}_m^T(0) \}]]$$

$$= \begin{matrix} \left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{0} & & & & & & & \mathbf{0} \\ \hline \sigma_{11}^2(0) & \mathbf{0} & \sigma_{12}^2(0) & \mathbf{0} & & & \sigma_{1m}^2(0) & \mathbf{0} \\ \sigma_{21}^2(0) & \mathbf{0} & \sigma_{22}^2(0) & \mathbf{0} & & & \sigma_{2m}^2(0) & \mathbf{0} \\ \hline \sigma_{m1}^2(0) & \mathbf{0} & \sigma_{m2}^2(0) & \mathbf{0} & & & \sigma_{mm}^2(0) & \mathbf{0} \end{array} \right]_{[(3+mM) \times (3+mM)]} \dots (30) \end{matrix}$$

は、式 (24) に示した応答共分散マトリックス $\alpha_{ij}(k)$ の要素として求められている。

従来の不規則振動解析では、複雑な系の応答共分散を算出する際、複雑かつ冗長な理論式を展開しなければならぬので、一般には多数のサンプル波形を入力とするシミュレーションを繰り返し行うことが多い。しかし、式 (24) では確率過程入力を AR モデルで表現することにより、確率過程入力における各時刻の分散を非定常ホワイトノイズの共分散 $\sigma^2(k)$ の形で表現が可能となり、各時刻の応答共分散が漸化的に算出できるようになったのである。これにより、シミュレーション法を用いた解析と比較した場合、計算時間の短縮をはかることができるのである。さらに、共分散応答の算出方法に関する文献 3)~8) に対し、本論文では任意の地震動特性をもつものに対して解析可能な式に展開している。

(4) 応答共分散の初期値マトリックス

$$\begin{aligned} \text{式 (4) の振動方程式の初期変位・速度を} \\ y_i(k) = \dot{y}_i(k) = 0 \quad k \leq 0 \quad (t \leq 0) \dots (26) \\ \text{と仮定する。さらに、式 (10) の確率過程入力において、} \\ \ddot{z}_i(k) = 0 \quad k < 0 \quad (t < 0) \dots (27) \\ \text{とする。以上の仮定を用いると、式 (4), (10) から} \\ \dot{y}_i(k) = 0 \quad k < 0 \quad (t < 0) \dots (28) \\ E[\ddot{z}_i(0)\ddot{z}_j(0)] = E[\varepsilon_i(0)\varepsilon_j(0)] = \sigma_{ij}^2(0) \dots (29) \end{aligned}$$

の関係が得られる。式 (26), (27), (28), (29) を用いると、漸化式の初期値マトリックス $\alpha_{ij}(-1)$ は、

となる。確率過程入力初期条件は式 (30) で満足されるが、次のステップ $k=0$ の応答共分散マトリックス $\alpha_{ij}(0)$ には、 $y_i(0), \dot{y}_i(0)$ を含む項が存在するために、 $\alpha_{ij}(0)$ の $(1, p), (2, p), (p, 1), (p, 2) p=1, \dots, (3+mM)$ の要素は 0 とおかなければならない。

3. 数値計算例と考察

(1) 数値計算例

構造モデルとしては、文献 5) と同様のねじれ振動モデル (図-1¹³⁾) を用いる。このモデルは、水平 2 方向の水平運動と鉛直軸回りの回転運動が連成する 3 自由度系モデルである。図-1 のモデルの運動方程式は、式 (31) で表わされる。

$$\begin{bmatrix} M & & \\ & M & \\ & & I_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 e_2 \\ 0 & k_2 & k_2 e_1 \\ -k_1 e_2 & k_2 e_1 & k_3 + k_1 e_2^2 + k_2 e_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M & & \\ & M & \\ & & I_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1(t) \\ \ddot{z}_2(t) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (31)$$

表-1 ねじれ振動モデルの諸元

$M =$	$9.80 \times 10^2 \text{ kg}$
$I_G =$	$1.18 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$k_1 = k_2 =$	$3.92 \times 10 \text{ kN/m}$
$k_3 =$	$3.92 \times 10^2 \text{ kN} \cdot \text{m}$
$e_1 =$	$60, e_2 = 120 \text{ cm}$
$\beta_i =$	$0.05 (i=1, 2, 3)$
$\ddot{z}_1 =$	$E-W \quad \ddot{z}_2 = N-S$

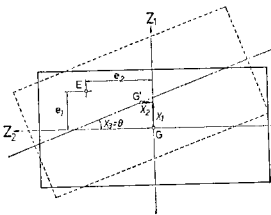


図-1 ねじれ振動モデル¹³⁾

式 (31) における諸元は、表-1 に示すとおりである。

次に、1971 年 2 月、San Fernando 地震の Millikan Library (Calf. Inst. of Tech.) における加速度記録¹⁴⁾ のうち、水平 2 成分 (E-W, N-S, 図-2) を 2 次元 AR

モデル ($m=2$) でモデル化して、図-1 の主軸に作用させた。AR モデルの次数 M に関しては、星谷・千葉⁹⁾ が実地震波形の AR モデル化を行う際に検討

$$\ddot{z}_i(k) = \sum_{p=1}^i \sum_{j=1}^4 b_{ip}(j, k) \ddot{z}_p(k-j) + \varepsilon_i(k) \quad i=1; E-W \text{ 成分}, i=2; N-S \text{ 成分} \dots \dots \dots (32)$$

のモデルを用いた。なお、モデル化の際に必要な AR 係数 $b_{ip}(j, k)$ および非常ホワイトノイズ $\varepsilon_i(k)$ の共分散 $\sigma_{ij}^2(k)$ の計算方法に関する詳細は文献 9) に譲ることとする。

図-3, 4 には、AR 係数 $b_{ip}(j, k)$ 、非常ホワイトノイズの共分散 $\sigma_{ij}^2(k)$ をそれぞれ時刻歴で示した。ま

た、図-3, 4 の AR モデルを用いて算出した、図-1 のモデルの相対変位・相対速度・絶対加速度の水平 2 成分と回転成分の R.M.S. 応答を図-5~7 にそれぞれ示した。本例題では、応答共分散漸化式の妥当性を検討するために式 (32) を用いて 50 波のサンプル波形を作成し、シミュレーション法により求めた解を図-5~7 にそれぞれ点線で示した。なお、50 波のサンプル波を作成する際、式(32)の非常ホワイトノイズ $\varepsilon_i(k)$ は、非常ホワイトノイズ共分散マトリックス $\sigma^2(k)$ を三角分解して得られる下三角マトリックスと平均 0、分散 1 の正規乱数の積により求めた⁹⁾。

応答共分散漸化式から得られた応答は、シミュレーション解と全継続時間において、よく一致していることがわかる。これは、本漸化式、および式 (30) の初期条件の妥当性を表わすものである。

(2) 最大応答理論への応用例

不規則振動論を用いた構造解析における終局の目的もまた、決定論的手法によるそれと同様に最大応答の検討、安全性の評価にあることは明らかである。そこで、本節では複雑な振幅・周波数特性を有する入力に対する応答を応答共分散漸化式で計算し、これを最大応答理論の入力として使用することにより最大応答の確率分布の計算例を示したものである。なお、本例題は共分散応答が、最大応答理論を用いることにより、設計レベルの問題に対しても有益な情報を与えることができるのを示すことが目的であり、最大応答理論の詳細は文献 15) を参照いただきたい。

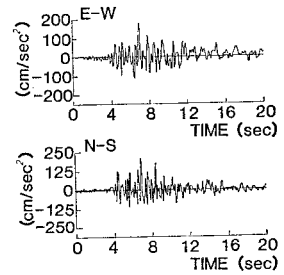


図-2 Millikan Library の加速度波形 (E-W, N-S 成分)

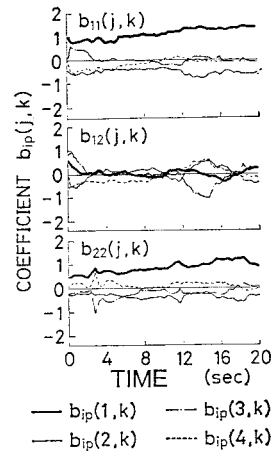


図-3 AR 係数 $b_{ip}(j, k)$

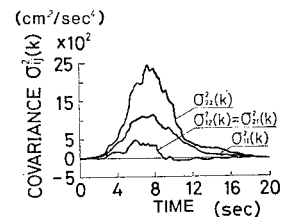


図-4 ホワイトノイズの共分散 $\sigma_{ij}^2(k)$

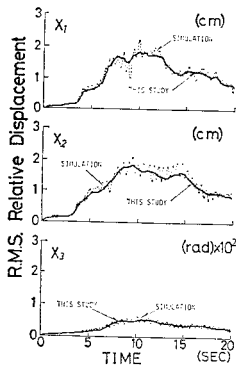


図-5 相対変位の R.M.S. 応答

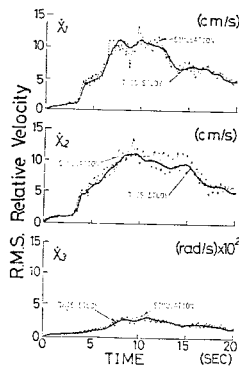


図-6 相対速度の R.M.S. 応答

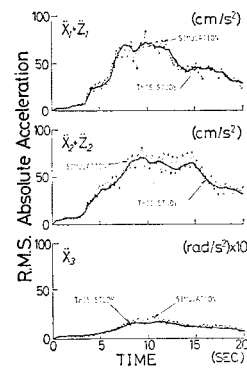


図-7 絶対加速度の R.M.S. 応答

これまでに、最大応答理論に関する多くの研究^{15)~17)}が発表されているが、本論文では Yang と Liu¹⁵⁾ によって提案された手法を用いた。文献 15) では、確率過程入力が入絡線関数と定常確率過程の積で表わされる場合の最大応答に関して検討を行っているが、本例題では、より一般化した入力に対する BWR 型原子炉建屋の応答を応答共分散漸化式により計算し、こ

の結果を用いて最大応答の確率分布を算出した。

構造モデルとしては、図-8 に示すような Sway-Rocking¹⁸⁾ モデルを使用した。なお、モデルの各質点の重量 W 、回転慣性モーメント I_s 、せん断々面積 A_s 、断面 2 次モーメント I 、減衰定数 h 、そして、地盤のせん断波速度 $V_s=500$ m/s の場合の地盤ばね定数 k_{ss} 、 k_s 、 k_θ 、減衰定数 h は図-8 に示すとおりである。運動方程式の減衰係数マトリックスは各部減衰定数よりひずみエネルギー比例型として、モード減衰定数を求め、それに等価なマトリックスを作成した。剛性マトリックスは、図-8 の建屋定数を用いて作成した。次に、入力は太崎が提案した設計用スペクトル¹⁹⁾ (マグニチュード $M=7.0$ 、震央距離 $d=20$ km) をもとに作成した修正人工地震波を AR モデルでモデル化して用いた。

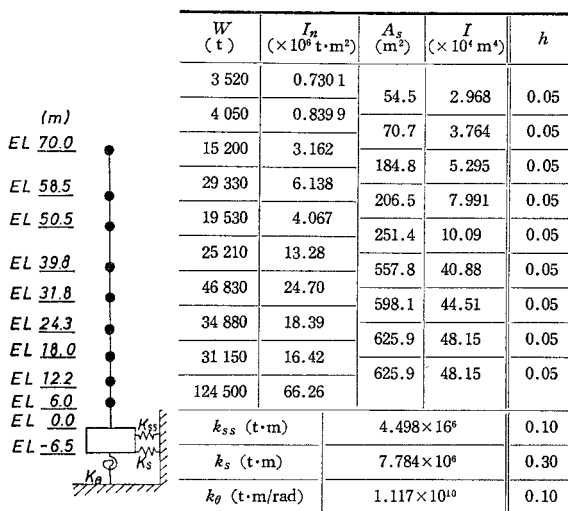


図-8 BWR 型原子炉建屋 Sway-Rocking モデル¹⁸⁾

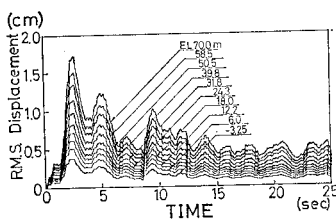


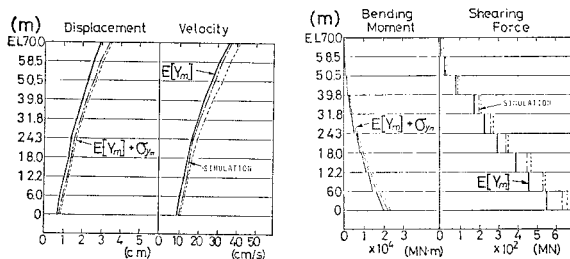
図-9 相対変位の R.M.S. 応答

図-9 は、各質点の相対変位の R.M.S. 応答を示したものである。図-10(a), (b) は、最大応答理論によって算出した相対変位・相対速度・曲げモーメント・せん断力のそれぞれの平均最大応答 $E[y_m]$ および平均最大応答の $+1\sigma_m$ (標準偏差) を示した図である。なお、図-10 には、20 波のサンプル波形を用いてシミュレーション法により求めた平均最大応答のシミュレーション解も示した。

このように、共分散漸化式の出力を最大応答理論の入力として使用することにより、複雑な系の最大応答の確率分布を容易に、かつ効率よく算出することができるのである。

4. 結 び

本論文は、多次元非定常確率過程入力が入作用する多質点系線形構造物の応答共分散を効率よく算出することができる、漸化理論式の提案を行った。また、数値計算例を解き、シミュレーション解による漸化式の検



(a) 相対変位・相対速度 (b) 曲げモーメント・せん断力

図-10 最大 応答

証を行った。本論文の内容を要約すると、以下のようになる。

(1) 振動方程式を各モードに分解して、それぞれの解を線形加速度法を用いて求めて、その解をマトリックス表示した。

(2) 多次元非定常自己回帰モデルで確率過程入力を表わした。さらに、AR モデルを状態空間表現することにより、各時刻の非定常ホワイトノイズを入力とする漸化式で表わした。

(3) 振動方程式の解と AR モデルを結合して、入力-応答を要素とする状態ベクトルに関する状態方程式を作成した。さらに、状態方程式から応答共分散漸化式を誘導した。

(4) 漸化理論式を用いて求めた応答共分散値をもとにして、最大応答理論から最大応答(変位・速度・せん断力・曲げモーメントなど)の平均値・標準偏差などを求める応用例を示した。

最後に、本研究では、第1著者が理論の誘導、第2・第3著者は理論の整理と拡張および計算を担当した。

なお、計算には、東京大学大型計算機センターの M-280 H/200 H 計算システムを利用した。

参 考 文 献

- 1) 星谷 勝：確率論手法による振動解析，鹿島出版会，1974年。
- 2) たとえば，Roberts, J.B. : The Covariance Response of Linear Systems to Nonstationary Random Excitation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 14, No. 3, pp. 385~400, 1971.
- 3) Gasparini, D.A. : Response of MDOF Systems to Nonstationary Random Excitation, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 105, No. EM 1, pp. 13~27, February, 1979.
- 4) Gasparini D.A. and A. DebChaudhury : Dynamic Response to Nonstationary Nonwhite Excitation, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.

- 106, No. EM 6, pp. 1233~1248, December, 1980.
- 5) DebChaudhury, A. and D.A. Gasparini : Response of MDOF Systems to Vector Random Excitation, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 108, No. EM 2, pp. 367~385, April, 1982.
- 6) 岡林隆敏：単一走行車両による道路橋の二乗平均応答解析，土木学会論文報告集，第 286 号，pp. 15~27, 1979年 9 月。
- 7) 岡林隆敏ほか：高次振動を考慮した道路橋の単一走行車両による非定常 r.m.s. 応答，土木学会論文報告集，第 296 号，pp. 13~24, 1980 年 4 月。
- 8) 岡林隆敏：不規則な分布荷重を受けるはりの解析，土木学会論文報告集，第316号，pp. 11~21, 1981 年 2 月。
- 9) Hoshiya, M. and T. Chiba : Simulation Methods of Multi-Dimensional Nonstationary Stochastic Processes by Time Domain Models, Proc. of JSCE, No. 296, April, 1980.
- 10) Hoshiya, M. : Recursive Formulation of Response Covariance Matrix in Earthquake Random Vibration, U.S.-Japan Seminar, Hawaii, March, 1982.
- 11) 赤池弘次・中川東一郎：ダイナミックシステムの統計的解析と制御，サイエンス社，1972 年。
- 12) 有本 卓：カルマンフィルター，産業図書，1977 年。
- 13) 田治見宏：建築振動学，コロナ社，1965 年。
- 14) CIT. EERL-Report, Strong Motion Earthquake Accelerograms, Digitized and Plotted Data, Vol. 2, 1973.
- 15) Yang, J.N. and S.C. Liu : Distribution of Maximum and Statistical Response Spectra, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 107, No. EM 6, pp. 1089~1102, December, 1981.
- 16) Shinozuka, M. and J.M. Yang : Peak Structural Response to Non-Stationary Random Excitation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 16, No. 4, pp. 505~517, 1971.
- 17) Yang, J.N. : First-Excursion Probability in Non-Stationary Random Vibration, Journal of Sound and Vibration, Vol. 27, No. 2, pp. 165~182, 1973.
- 18) 市川隆之ほか：埋込みを有する構造物の設計入力地震動に関する考察，第 6 回日本地震工学シンポジウム講演集，1981 年。
- 19) 大崎順彦：設計入力地震動，コンクリート工学，Vol. 19, No. 7, pp. 11~16, July, 1981.

(1983.6.17・受付)