

面内曲げを受ける長方形板の動的安定性

DYNAMIC STABILITY OF A RECTANGULAR PLATE
SUBJECTED TO INPLANE FORCING

高橋和雄*・田川 賢**・池田虎彦**・松川 徹***

By Kazuo TAKAHASHI, Masaru TAGAWA, Torahiko IKEDA
and Tooru MATSUKAWA

1. ま え が き

プレートガーダー橋の腹板に列車荷重などの動的な荷重が作用すると腹板上部と圧縮フランジとの溶接部に疲労クラックが生ずることや腹板の振動による騒音が発生することが知られている。この原因はプレートガーダー橋の腹板に面外の曲げ変形が生ずることによるとされている。面外変形の要因としては初期変形^{1),2)}や面外係数励振振動³⁾(あるいは動的不安定現象, パラメーター励振)が挙げられている。このうち, 初期変形の影響についてはかなり詳しい研究が前田^{1),2)}らによって行われている。一方, 面外係数励振振動については倉西³⁾らによって初期変形に重きを置いた時間応答解析が行われているのみで, 解析的な取扱いは見受けられないようである。また, 本題に対して面外係数励振振動による不安定振動が存在するかどうかは確認されていないようである。

そこで, 本研究は面内変動曲げモーメントを受けるプレートガーダー橋の腹板の面外係数励振振動の存在の可能性を検討するために, 面内変動曲げモーメントを受ける長方形板の動的安定性を解析したものである。解析にあたっては垂直補剛材と上下フランジで囲まれた腹板の一部を, 1枚の独立した長方形板とみなし, これに面内静的および変動曲げモーメントが作用する構造系にモデル化した。なお, 境界条件は荷重辺を単純支持, 他辺を単純支持もしくは固定とした注1)。

本研究では面内変動曲げモーメントを受ける初期変形のない長方形板の曲げ振動を微小変形の仮定のもとに解

析するものである注2)。本題の運動方程式は基準座標に対して連立の Mathieu の方程式に変換され, 動的安定性が文献4)の方法を用いて明らかにされる。本研究は文献5)に Bolotin によって定式化された長方形板の係数励振振動問題を単純共振のみならず結合共振も含めて具体的に解析することに対応するものである。

数値解析では固有振動数に及ぼす静的曲げモーメントの影響, 面外係数励振振動の不安定領域に及ぼす境界条件, 負荷条件, 静的曲げモーメント, 辺長比および減衰力の影響を明らかにするものである注3)。

2. 基礎式および境界条件

図-1に示すような長方形板に xy 座標系を導入し, xy 平面に対して直角方向を z 軸とする。この長方形板の面外方向の変位を $w(x, y, t)$ とする。 $x=0, a$ の2辺上に図-1のように静的曲げモーメント M_0 と変動

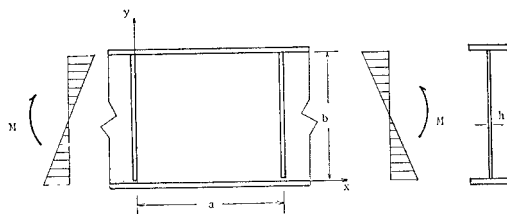


図-1 一般図および座標系

注2) 不安定振動は振幅が時間とともに発散する振動である。平板の場合, 振幅が板厚程度になると板中央面に生ずる面内力による幾何学的非線形項が効いてくるために, 振幅は有限な大きさとなる。この振幅の大きさを決定するためには幾何学的非線形振動問題として非線形分岐応答解析を行う必要がある。しかし, どの種類の不安定振動が存在して, 支配的であるかを明らかにするためには, 分岐点近傍の解の挙動が判明すれば十分であるから, 本論文では微小振動論による解析を行うものである。

注3) 不安定領域に及ぼす初期変形の影響については, 本論文の解法を直接適用することが無理であるから, 別途評価する必要がある。

注1) フランジと腹板の接合部の境界条件は溶接プレートガーダー橋では固定, リベット接合では単純支持と固定の中間と考えられるために, 2つの境界条件を設定した。

* 正会員 工修 長崎大学助教授 工学部土木工学科

** 学生会員 長崎大学大学院工学研究科土木工学専攻

*** 学生会員 長崎大学研究生

曲げモーメント $M_t \cos \Omega t$ の和からなる曲げモーメント M が作用すると、平板中央面内の力 N_x は次のように表わされる。

$$N_x = \frac{6}{b^2} \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) (M_0 + M_t \cos \Omega t) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 b ：荷重辺の長さ、 Ω ：励振円振動数、 M_t ：変動曲げモーメントの振幅

変動曲げモーメント $M_t \cos \Omega t$ の作用下では平板には通常中央面に面内力 N_x による応力が生ずるのみであるが、不安定領域で面外変形が生ずる。安定を失った直後すなわち分岐点近傍では平板の面外変形は微小であるから、微小変形理論が適用できる。したがって、安定を失った直後の長方形板の曲げ振動の基礎方程式は面内力を受ける長方形板の運動方程式を用いて次のように表わされる（文献 6），p. 324 Eq. (8-25)）。

$$L(w) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - \frac{6}{b^2} \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) \cdot (M_0 + M_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 ρ ：板の密度、 h ：板厚、 $D = Eh^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$ ：板剛度、 E ：ヤング率、 ν ：ポアソン比、 $\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2$

境界条件として、次のような 2 ケースについて考える。すなわち、

case I：全周辺単純支持

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x=0, a, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y=0, b \dots\dots\dots (3 \cdot a)$$

case II：荷重辺単純支持，他辺固定

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x=0, a, \quad w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad y=0, b \dots\dots\dots (3 \cdot b)$$

3. 解 法

式 (2) の解を次のように仮定する。

$$w = h \sum_{n=1}^{\infty} T_{Mn}(t) W_{Mn}(x, y) \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 T_{Mn} ：未知の時間関数、 W_{Mn} ：境界条件を満足する座標関数、 $M=1, 2, \dots$ ： x 方向の波数

式 (4) の座標関数 W_{Mn} として静的曲げモーメント M_0 が作用しない長方形の曲げ振動の基準関数を用いるものとすれば、 W_{Mn} は次のように定義される⁷⁾。

$$\text{case I} : W_{Mn} = \sin \frac{M\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \dots\dots\dots (5 \cdot a)$$

$$\text{case II} : W_{Mn} = \sin \frac{M\pi x}{a} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i^n \left\{ \cos \frac{(i-1)\pi y}{b} - \cos \frac{(i+1)\pi y}{b} \right\} \dots\dots\dots (5 \cdot b)$$

式 (5・a)、(5・b) に示すように、荷重辺方向の波形はいずれのケースも正弦波で与えられる。

式 (5・a)、(5・b) を式 (2) に代入して、Galerkin 法を適用する。

$$\int_0^a \int_0^b L(w) W_{Rs}(x, y) dx dy = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $R=1, 2, \dots, s=1, 2, \dots$

すなわち、

case I :

$$\frac{\rho h b^4}{\pi^4 D} \ddot{T}_{Ms} + (M^2/\mu^2 + s^2)^2 T_{Ms} + \frac{12}{\pi^2 b} M^2 (M_0 + M_t \cos \Omega t) \sum_{n=1}^{\infty} I_{ns}^1 T_{Mn} = 0 \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

case II :

$$\frac{\rho h b^4}{\pi^4 D} \sum_{n=1}^{\infty} I_{ns}^2 \ddot{T}_{Mn} + \sum_{n=1}^{\infty} I_{Mns}^3 T_{Mn} + \frac{6}{\pi^2 D} M (M_0 + M_t \cos \Omega t) \sum_{n=1}^{\infty} I_{ns}^4 T_{Mn} = 0 \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

ここに、 $\mu = a/b$ ：辺長比（縦横比）、 $I_{ns}^1, I_{ns}^2, I_{Mns}^3, I_{ns}^4$ ：Galerkin 法の積分項（Appendix A 参照）

上式において左辺第 1 項は慣性項、第 2 項および第 3 項の M_0 を含む項は復元力項、残りの第 3 項は係数励振項である。

式 (7・a)、(7・b) を無次元化のうえ、行列表示すれば、次式が得られる。

$$[A] \{ \ddot{T}_M \} + \frac{1}{\bar{\omega}^2} ([B] + \bar{M}_0 [C]) \{ T_M \} + \frac{1}{\bar{\omega}^2} \bar{M}_t [C] \cos \tau \{ T_M \} = \{ 0 \} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $[A], [B], [C]$ ：係数行列（Appendix B 参照）、 $\bar{M}_0 = M_0/M_{cr}$ ：無次元静曲げモーメント、 $M_{cr} = \lambda_{cr} \cdot \pi^2 D/6$ ：座屈曲げモーメント、 λ_{cr} ：座屈固有値、 $\bar{M}_t = M_t/M_{cr}$ ：無次元変動曲げモーメント、 $\bar{\omega} = \Omega/\Omega_1^1$ ：無次元加振振動数、 $\Omega_1^1 = \alpha_1^1 (\pi^2/b^2) \sqrt{D/\rho h}$ ：長方形板の x 方向の波数 1 の場合の最低次固有円振動数、 α_1^1 ：1 次の振動の固有値、 $\{ T_M \} = \{ T_{M1}, T_{M2}, \dots \}^T$ 、 $\tau = \Omega_1^1 t$ ：無次元時間

式 (8) の解を次のように仮定する⁴⁾。

$$\{ T_M \} = e^{i\tau} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{b}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\mathbf{a}_m \sin m\tau + \mathbf{b}_m \cos m\tau) \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 λ ：未定定数、 $\mathbf{b}_0, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m$ ：未知ベクトル

式 (9) を式 (8) に代入して、調和バランス法を適用すれば、次のような $\mathbf{b}_0, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m$ を求めるための同次方程式が得られる。

$$[D] \{ X \} = \{ 0 \} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\{ X \} = \{ \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \}^T$ 、 $[D]$ ：係数行列

行列 $[D]$ の性質から行列 $[D]$ は次のような3個の行列に分解される。

$$[D] = [M_0] - \lambda[M_1] - \lambda^2[M_2] \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 $[M_0]$ 、 $[M_1]$ 、 $[M_2]$: λ の 0, 1, 2 次の係数行列

ここで、 $\{Y\} = \lambda\{X\}$ なる新しいベクトルを導入すれば、式 (10) は2倍サイズの固有値問題に変換される。

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2^{-1}][M_0] & -[M_2^{-1}][M_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (12)$$

式 (12) は非対称行列の固有値問題の基礎式である。得られた固有値の実数部 $R_e(\lambda)$ の値がすべて負ならば、式 (9) の一般解に含まれる $e^{\lambda t}$ が時間とともに収束するために安定、逆に一つでも正ならば $e^{\lambda t}$ が発散するために不安定である。式 (8) に含まれるパラメーターである励振振動数 $\bar{\omega}$ と変動曲げモーメント \bar{M}_t の組合せによって、長方形板の面外振動は安定もしくは不安定となる。不安定な状態において長方形板に面外振動が生じ、時間とともに振幅が増大することになる。

4. 面内曲げを受ける長方形板の面外係数励振振動の性質

式 (8) の微分方程式の不安定領域には次の2種類がある⁴⁾。

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= 2\omega_i^M/k \text{ の付近に生ずる単純共振} \dots \dots (13) \\ \bar{\omega} &= (\omega_i^M \pm \omega_j^M)/k \text{ の付近に生ずる結合共振} \\ &\quad (+ : \text{和形}, - : \text{差形}) \end{aligned}$$

ここに、 $k=1$: 主不安定領域、 $k \geq 2$: 副不安定領域、 ω_i^M : 無次元固有円振動数 (M : x 方向の波数、 i : 次数)

つまり、無次元加振振動数 $\bar{\omega}$ が固有振動数の2倍 ($2\omega_i^M$) の整数分の1 ($1/k$) 付近に生ずる単純共振と、無次元加振振動数 $\bar{\omega}$ が2個の固有振動数の和、または差 ($\omega_i^M \pm \omega_j^M$) の整数分の1 ($1/k$) 付近に生ずる結合共振である。式 (13) の不安定振動のうち、どれが重要であるかは式 (8) の微分方程式の係数励振行列 $[C]$ の要素構成によって定まる。

静的曲げモーメント $\bar{M}_0=0$ の長方形板を対象に本題の曲げモーメント \bar{M}_t を受ける場合と、一様圧縮荷重 \bar{q}_t を受ける場合に対して、行列 $[C]$ の要素構成を示せ

ば次のとおりである。

式 (14・a) のように曲げモーメント \bar{M}_t の場合、対角要素 $C_{ii}=0$ で、かつ $[A]$ 、 $[B]$ も対角行列であるから、基準座標は直接項 C_{ii} によっては連成せず、 C_{ij} ($i \neq j$) の間接項を介して連成することになる。したがって、直接項 C_{ii} より定まる単純共振は重要でない (たとえば文献7) の pp. 153~154 参照)。一方、 $C_{ij} \neq 0$ の要素が存在するから、基準座標は間接項 C_{ij} を介して連成が生ずる。また、 $C_{ij}=C_{ji}$ であるから、結合共振は+の符号の和形のみが存在する。行列 $[C]$ の要素のうち、 $C_{12}(C_{21})$ 、 $C_{14}(C_{41})$ 、 $C_{23}(C_{32})$ 、 $C_{25}(C_{52}) \neq 0$ であるから、結合共振については $(\omega_1^M + \omega_2^M)/k$ 、 $(\omega_1^M + \omega_4^M)/k$ 、 $(\omega_2^M + \omega_3^M)/k$ 、 $(\omega_2^M + \omega_5^M)/k$ などのように i と j の和が奇数の結合共振が存在する。しかし、たとえば $(\omega_1^M + \omega_3^M)/k$ 、 $(\omega_2^M + \omega_4^M)/k$ などの i と j の和が偶数の結合共振は存在しない。これに対して、一様圧縮荷重 \bar{q}_t の場合には式 (14・b) のように、 $C_{ii} \neq 0$ 、 $C_{ij}=0$ ($i \neq j$) より、基準座標間に連成はなく、各自由度ごとに分離することができる。つまり、各基準座標は1自由度系として取り扱うことができる。したがって、結合共振は存在し得ず、単純共振のみが存在する。このように負荷形式によって、現われる不安定現象が異なるといえる。変動曲げモーメント \bar{M}_t による長方形板の不安定領域は通常1自由度系で表わされる Mathieu の方程式の不安定領域と著しく異なることが予想される。

なお、静的曲げモーメント \bar{M}_0 が作用する場合には、行列 $[C]$ は case I の場合には式 (14・a) と同じである。一方、case II は全要素がゼロ以外の数値をもつ。 $\bar{M}_0 \neq 0$ であるから式 (8) の復元力の項の係数行列 $[B] + \bar{M}_0[C]$ および係数励振の項の係数行列 $[C]$ を介して、基準座標間の連成が直接項をもった形で生じてくる。したがって、静的曲げモーメント \bar{M}_0 が作用する場合には単純共振および結合共振が同時に生ずることが予想される。

5. 固有振動解析

不安定振動解析に先立って、固有振動数に及ぼす静的曲げモーメント \bar{M}_0 の影響を明らかにする。すなわち、式 (8) において $\bar{M}_t=0$ とおけば、静的曲げモーメント \bar{M}_0 を受ける長方形板の運動方程式が得られる。case II の正方形板 ($\mu=1.0$) に対する計算結果は、図-2 に示すとおりである。なお、計算にあたっては式 (5・b) の級数の項数を10としたが、この結果は文献7) の表-2とまったく一致した。図において横軸 $\bar{\omega} = \omega_s^M / \omega_1^M$ は各次の固有円振動数 ω_s^M を静的曲

	曲げモーメント \bar{M}_t	一様圧縮荷重 \bar{q}_t
$[C]$	$\begin{bmatrix} 0 & C_{12} & 0 & C_{14} & 0 & \dots \\ C_{21} & 0 & C_{23} & 0 & C_{25} & \dots \\ 0 & C_{32} & 0 & C_{34} & 0 & \dots \\ C_{41} & 0 & C_{43} & 0 & C_{45} & \dots \\ 0 & C_{52} & 0 & C_{54} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} C_{ij} = C_{ji} \dots (14\cdot a)$	$\begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \dots (14\cdot b)$

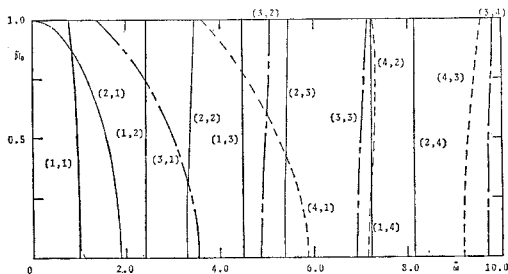


図-2 正方形板の無次元固有振動数 ω_j^M に及ぼす静的曲げモーメント \bar{M}_0 の影響

げモーメント \bar{M}_0 が作用しない場合の固有円振動数 ω_i^1 で基準化した無次元固有振動数である。また、縦軸 \bar{M}_0 は無次元静的曲げモーメントである。図中の記号 (M, s) は ω_s^M , すなわち, x 方向の波数 M, y 方向の波数 (次数) s の振動形をもつ無次元固有振動数を意味する。本例では x 方向の波数 $M=2$ が最低次の座屈荷重を与える (文献 6) の p. 378, Fig. 9-20 参照)。図のように y 方向の波数 $s=1$ の場合の $(M, 1)$ の振動形をもつ固有振動数 ω_i^M は静的曲げモーメント \bar{M}_0 の増加とともに減少する。特に $(2, 1)$ 型, $(3, 1)$ 型, $(4, 1)$ 型の固有振動数の減少が著しい。座屈波形に相当する $(2, 1)$ 型の場合には, $\bar{M}_0=1$ で $\bar{\omega}=0$ となる。荷重方向すなわち x 方向の波数に比べてそれと直角方向の波数が相当大きい場合, $(1, 3)$ 型, $(1, 4)$ 型, $(2, 4)$ 型などでは固有振動数は変化しない。しかし, 他の振動形 $(1, 2)$ 型, $(2, 2)$ 型, $(3, 2)$ 型, $(2, 3)$ 型, $(3, 3)$ 型などではわずかではあるが, 固有振動数は増加している。このことは一様圧

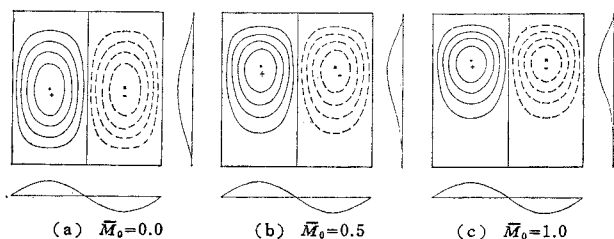


図-3 静的曲げモーメント \bar{M}_0 による正方形板 $(2, 1)$ 型の固有振動形の変動

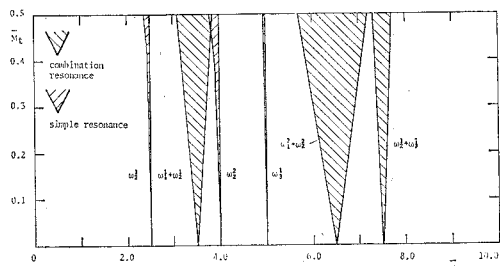


図-4 変動曲げモーメント \bar{M}_t を受ける正方形板の不安定領域 (case I, $\bar{M}_0=0$)

縮荷重 \bar{q}_0 の場合⁷⁾には見受けられない曲げモーメント \bar{M}_0 を受ける場合の固有の特性と思われる。固有振動数の変動が著しい $(2, 1)$ 型の場合について, 固有振動形の \bar{M}_0 による変化を示せば, 図-3 のとおりである。静的曲げモーメント \bar{M}_0 が增大すると, 固有振動形は対応する正方形板の座屈波形に近づいてくる。つまり, 引張力側では振幅が減少し, 逆に圧縮側では振幅が増大する。

6. 面外不安定領域

(1) 計算自由度について

数値解析にあたっては式 (14・a) の行列 $[C]$ の性質から連成項がある自由度のみを対象として不安定領域を求めた。すなわち, $T_{M_1}+T_{M_2}, T_{M_2}+T_{M_3}, T_{M_2}+T_{M_5}$ のような結合共振を生ずる行列要素を用いて安定判別を行う。このような取扱いで式 (14・a) を全体系で解析した結果とまったく同じ結果が得られる。結合共振は 2 つの自由度間の連成振動であるから, 2 つの自由度のみに注目すればよいものと考えられる。また, 単純共振は 1 つの自由度の不安定振動であるから対応する行列要素のみを取り出せばよい。以上のような計算方法を用いて, 1 次の固有振動数の 10 倍までの振動数の範囲で不安定領域を求めることにする。また, 本論では, $\bar{M}_t=0.5$ で不安定領域の幅が 0.1 以上のものをプロットし, 0.1 以下の幅の狭い不安定領域は省略するものである。

(2) 正方形板の面外不安定領域

図-4 および 5 は case I と case II の正方形板 ($\mu=1.0$) の面外不安定領域を $\bar{M}_0=0$ に対して示したものである。また, 各ケースの無次元固有円振動数 ω_s^M および式 (8) の定数 α_i^1 および λ_{cr} を表-1 に示す。図中において横軸 $\bar{\omega}=\omega/\omega_i^1$ は無次元加振振動数を, 縦軸 \bar{M}_t は無次元変動曲げモーメントの振幅である。図中の右下がりの斜線部が結合共振を, 右上がりの斜線部が単純共振の不安定領域を意味する。不安定領域に示

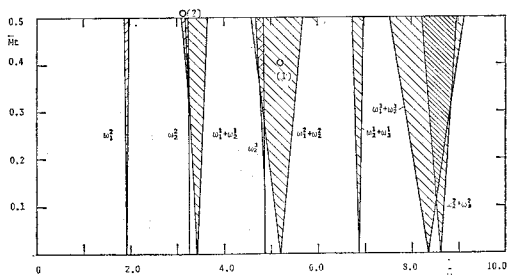


図-5 変動曲げモーメント \bar{M}_t を受ける正方形板の不安定領域 (case II, $\bar{M}_0=0$)

表一 正方形板の無次元固有振動数 ω_s^M および定数 α_1^1 および λ_{cr} ($\bar{M}_0=0.0$)

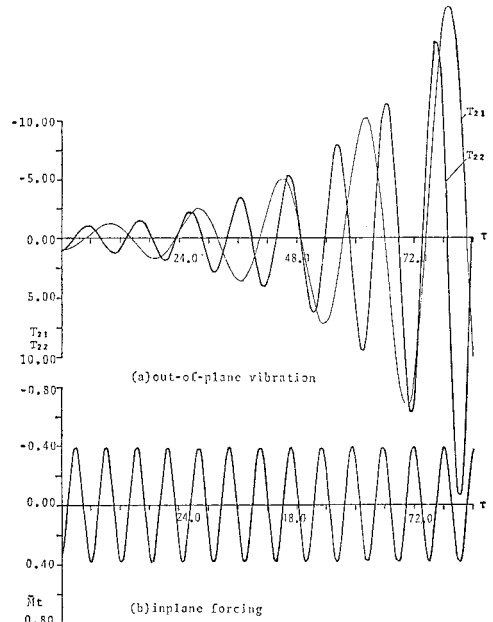
case	I			II			
	M	1	2	3	1	2	3
order							
1	1.000	2.500	5.000	1.000	1.891	3.530	
2	2.500	4.000	6.500	2.396	3.270	4.847	
3	5.000	6.500	9.000	4.468	5.359	6.920	
4	8.500	10.000	12.500	7.217	8.127	9.691	
α_1^1		2.0			2.935 02		
λ_{cr}		25.552 84			39.218 68		

した記号 $(\omega_i^M + \omega_j^M)/k$, $2\omega_i^M/k$ はそれぞれ結合共振, 単純共振の種類を意味する。これらの斜線部において面内変動曲げモーメント \bar{M}_t の作用下において平板には面外振動が生ずる。式 (2) の微小変形の仮定の運動方程式のもとではこの面外振動は発散する。しかし, 注 2) で述べたように, 平板では幾何学的非線形項の存在によって, この振幅は有限な大ききとなる。本論文の微小変形理論による解析では, この振幅の大ききを決定することができない。本論文の解法とは異なった取扱いを必要とするために, この問題については別の機会に報告する。

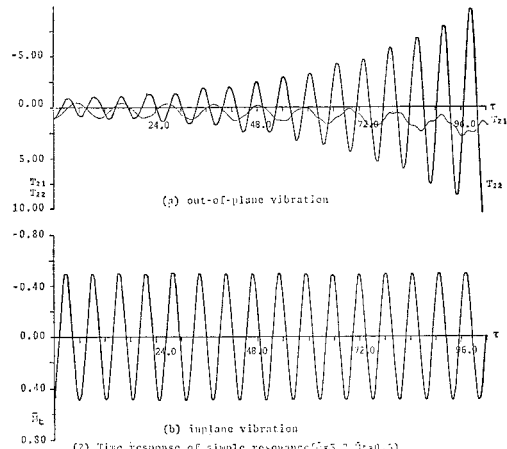
式 (14・a) の行列の対角線要素はゼロであるが, 連成項を介して, 本例にも図に示すように ω_1^2 , ω_2^2 などの単純共振の副不安定領域が存在する。これらの図から明らかかなように単純共振の不安定領域は結合共振の場合よりもかなり狭い。したがって, 曲げモーメントを受ける長方形板の不安定領域は結合共振が単純共振よりも重要である。次に結合共振の幅に注目すれば, $\omega_1^M + \omega_2^M$, $\omega_2^M + \omega_3^M$ のように固有振動数が接近している場合には結合共振が存在するが, $\omega_1^M + \omega_4^M$ のように固有振動数が離れている場合には結合共振は生じない。case I と case II の区別なく, 結合共振の不安定領域の幅は $\omega_1^2 + \omega_2^2$ (case I), $\omega_1^3 + \omega_2^3$ (case II) のように固有振動数の比が接近している場合に広がる。座屈波形を与える $M=2$ の場合が必ずしも最も広くならないことに注意を要する。

図-6 (1), (2) は 図-5 の不安定領域内の点 (1), (2) の $(\bar{\omega}, \bar{M}_t)$ について, 式 (8) を直接 Runge-Kutta-Gill 法を用いて数値積分することによって得られた不安定振動の時間応答である。曲げモーメント \bar{M}_t を受ける長方形板の場合, 結合共振が支配的であるから, 結合共振の発散が早く, 逆に幅の狭い単純共振の発散は緩やかである。

また, 図-5 の $\omega_1^2 + \omega_2^2$ の結合共振の安定と不安定との境界線を Runge-Kutta-Gill 法によって検討した結果を 図-7 に示す。図中において×印の座標 $(\bar{\omega}, \bar{M}_t)$ は面外振動が 図-6 (1) のように発散する不安定な点である。これに対して○印の座標 $(\bar{\omega}, \bar{M}_t)$ は面外振動が発散しない安定な点である。この不安定な点と安定な点



(1) Time response of combination resonance ($\bar{\omega}=5.3, \bar{M}_t=0.4$)



(2) Time response of simple resonance ($\bar{\omega}=5.2, \bar{M}_t=0.2$)

図-6 不安定振動の時間応答

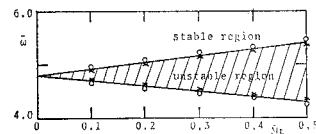
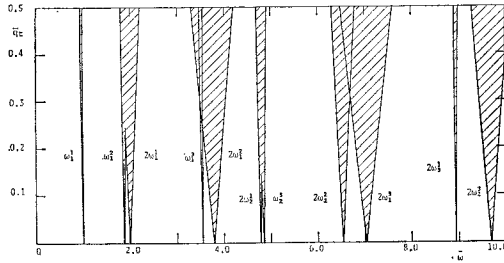


図-7 不安定領域の精度

の間に境界線が存在する。図のように時間積分による境界線は本法による解析解と一致しており, 本法の結果は十分な精度を有することが確認される。

(3) 負荷条件の影響

曲げモーメント \bar{M}_t と一様圧縮荷重 \bar{q}_t の2つの負荷条件の相違による不安定領域の変動を比較するために,

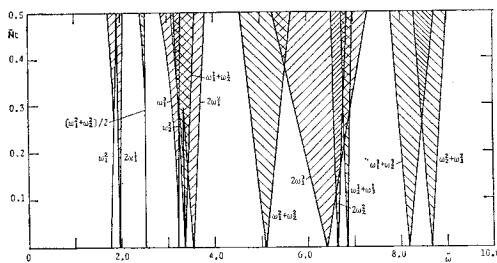


図—8 一様圧縮荷重 \bar{q}_c を受ける正方形板の不安定領域 (case II, $\bar{q}_0=0$)

case II の一様圧縮荷重 \bar{q}_c を受ける正方形板の面外不安定領域を 図—8 に示す。式 (14·b) で示したように、図—8 の一様圧縮荷重 \bar{q}_c の場合、単純共振の主および副不安定領域のみが存在する。結合共振は存在しない。この結果は式 (14·b) の結果から予想されるとおりである。図—5, 8 の比較から明らかなように負荷条件によって不安定領域が著しく異なるといえる。

(4) 静的曲げモーメント \bar{M}_0 の影響

図—9 は case II の正方形板に対して静的曲げモーメント $\bar{M}_0=0.3$ の場合の不安定領域を示したものである。本例の無次元固有振動数 ω_s^M および式 (8) の定数 α_1^1 および λ_{cr} は 表—2 に示すとおりである。本節では静的曲げモーメント \bar{M}_0 の存在の影響を評価することを目的としたものである。表—1, 2 の比較から明らかなように $\bar{M}_0=0.3$ は各次の固有振動数に大きな影響を及ぼさない大きさである。図—5, 9 の比較から明らかなように、静的曲げモーメント \bar{M}_0 が存在すると単純共振の主不安定領域すなわち $2\omega_1^1, 2\omega_2^1, 2\omega_3^1$ などが現われて



図—9 変動曲げモーメント \bar{M}_t を受ける正方形板の不安定領域 (case II, $\bar{M}_0=0.3$)

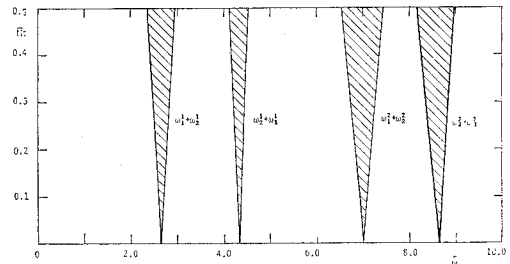
表—2 正方形板の無次元固有振動数 ω_s^M および定数 α_1^1 および λ_{cr} (case II, $\bar{M}_0=0.3$)

order	M	1	2	3
1		0.982	1.782	3.336
2		2.400	3.298	4.901
3		4.469	5.368	6.944
4		7.212	8.130	9.700
α_1^1			2.935 02	
λ_{cr}			39.218 68	

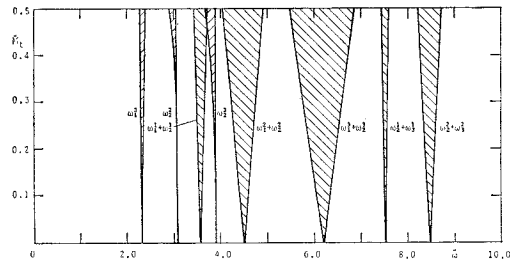
く。この事実は 4. の不安定領域の性質で述べたように基準座標の連成が復元力の項および係数励振の項から直接項を介しても生ずることに対応している。次に結合共振に注目すると、最も幅の広い $\omega_1^3 + \omega_2^3$ 型の不安定領域が静的曲げモーメントの影響を受けて狭くなっている。表—1, 2 の比較から明らかなように、 $\bar{M}_0=0.3$ の場合 ω_1^3 と ω_2^3 の 2 つの固有振動数が離れてきたことによるものである。

(5) 辺長比の影響

図—10 および 11 に case II の辺長比 $\mu=0.47$ および 1.43 の不安定領域を示す。また、表—3 に各辺長比の無次元固有振動数および式 (8) の定数 α_1^1 および λ_{cr} を示す。 $\mu=0.47$ が $M=1$ の座屈波形を、 $\mu=1.43$ が $M=3$ の座屈波形をもつ。文献 6) の p. 378 の Fig 9-20 に示されているように、 $\mu=0.47, 1.43$ は同じ座屈荷重をもつ場合である。図—5, 10, 11 から明らかなように不安定領域は辺長比によって異なるといえる。いず



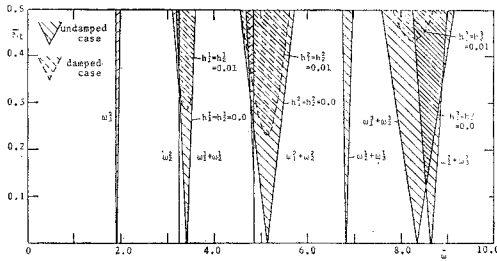
図—10 変動曲げモーメント \bar{M}_t を受ける長方形板 ($\mu=0.47$) の不安定領域 (case II, $\bar{M}_0=0.0$)



図—11 変動曲げモーメント \bar{M}_t を受ける長方形板 ($\mu=1.43$) の不安定領域 (case II, $\bar{M}_0=0.0$)

表—3 長方形板の無次元固有振動数 ω_s^M および定数 α_1^1 および λ_{cr} (case II, $\bar{M}_0=0.0$)

order	M	0.47			1.43		
		1	2	3	1	2	3
1		1.000	3.203	6.935	1.000	1.445	2.310
2		1.666	3.810	7.510	2.580	3.045	3.878
3		2.680	4.796	8.465	4.938	5.424	6.265
4		4.025	6.132	9.776	8.072	8.574	9.429
5		5.714	7.828	11.464			
α_1^1			6.045 66		2.569 13		
λ_{cr}			39.718 1		39.716 4		



図—12 不安定領域に及ぼす減衰力の影響 (case II, $\bar{M}_0=0.0, \mu=1.0, h_i^M=h_j^M=0.01$)

れの辺長比の場合にも固有振動数の比が接近した結合共振の幅が最も広いといえる。

(6) 減衰力の影響

不安定領域に及ぼす減衰力の影響を明らかにするために、式 (8) に線形の減衰項を加え、各基準座標ごとの減衰定数 h_i^M の形に整理する。図—12 は非減衰の場合と減衰定数 $h_i^M=0.01$ の場合の不安定領域を示したものである。減衰力の効果は一般に幅の狭い不安定領域を安定領域に変える。本題の曲げモーメント \bar{M}_t を受ける構造系では結合共振が支配的であるから、減衰の大きさの組合せによっては不安定領域は広められることがあるので注意を要する。

7. ま と め

本研究は静的および変動曲げモーメントを受ける荷重辺が単純支持された長方形板の動的安定問題を解析したものである。本研究で明らかになったことをまとめると次のとおりである。

(1) 静的曲げモーメントを受ける正方形板の固有振動数は荷重辺と直角方向の波数が1の場合に静的曲げモーメントの増加とともに減少する。しかし、一様圧縮荷重の場合と異なって固有振動数が増大する振動次数がある。

(2) 曲げモーメントを受ける長方形板の面外不安定領域は振動次数の和が奇数の結合共振が支配的である。この事実は単純共振のみが存在する一様圧縮荷重の場合と根本的に異なる。不安定領域の幅は境界条件の区別および辺長比に無関係に固有振動数が接近している場合に広く、両者が離れている場合には狭い。

(3) 静的曲げモーメントの影響は静的曲げモーメントが作用しない場合に狭い単純共振の不安定領域を広める効果をもつ。特に、単純共振の主不安定領域が現われてくる。

鉄道橋溶接プレートガーダー橋数例について設計例から静的曲げモーメント M_0 (死荷重による曲げモーメント)

ト) および変動曲げモーメント M_t (活荷重による曲げモーメント) を計算して、無次元化したところ、 $\bar{M}_0=0.18\sim 0.25, \bar{M}_t=0.10\sim 0.13$ 程度であった。また、振動数比 $\bar{\omega}=0.3\sim 5.0$ 程度である。 $(\bar{\omega}, \bar{M}_t)$ の組合せが不安定領域内にあれば、腹板には面外振動が生ずる。本論文の不安定領域の計算結果によって、プレートガーダー橋の腹板に面外振動が生ずる可能性があることが理論的に確認された。今後、実橋における振動計測や模型実験などによって現象を確認することが必要である。係数励振振動が面外変形発生の原因であれば、本研究で示した安定領域に振動数比を設定することによって、面外変形を防ぐことができる。面外不安定振動に及ぼす長方形板の初期変形の影響、幾何学的非線形項の評価など重要な問題が残されているが、これらについては稿を改めて報告する予定である。

数値解析にあたっては松園正人氏(現・小松建設工業(株))の援助を得た。数値計算には長崎大学の情報処理センターの FACOM M-180 AD II を使用したことを付記する。

Appendix A

$$I_{ns^1} = \int_0^1 (1-2\eta) \sin n\pi\eta \sin s\pi\eta d\eta$$

$$I_{ns^2} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^n \{ \cos(i-1)\pi\eta - \cos(i+1)\pi\eta \} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} a_j^s \{ \cos(j-1)\pi\eta - \cos(j+1)\pi\eta \} d\eta$$

$$I_{Mns^3} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^n [\{ M^2/\mu^2 + (i-1)^2 \} \cos(i-1)\pi\eta - \{ M^2/\mu^2 + (i+1)^2 \} \cos(i+1)\pi\eta] \cdot \sum_{j=1}^{\infty} a_j^s \{ \cos(j-1)\pi\eta - \cos(j+1)\pi\eta \} d\eta$$

$$I_{ns^4} = \int_0^1 (1-2\eta) \sum_{i=1}^{\infty} a_i^n \{ \cos(i-1)\pi\eta - \cos(i+1)\pi\eta \} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} a_j^s \{ \cos(j-1)\pi\eta - \cos(j+1)\pi\eta \} d\eta$$

$$\eta = y/b$$

Appendix B

case I :

$$[A] = [I] \text{ 単位行列}$$

$$[B] = \text{diag} \{ M^2/\mu^2 + s^2 \}^2$$

$$[C] = 2 M^2 \lambda_{cr} \begin{bmatrix} I_{11}^1 & I_{21}^1 & I_{31}^1 & \dots \\ I_{12}^1 & I_{22}^1 & I_{32}^1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

case II :

$$[A] = \begin{bmatrix} I_{11}^2 & I_{21}^2 & I_{31}^2 & \dots \\ I_{12}^2 & I_{22}^2 & I_{32}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} I_{11}^3 & I_{21}^3 & I_{31}^3 & \dots \\ I_{12}^3 & I_{22}^3 & I_{32}^3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$[C] = M^2 \lambda_{cr} \begin{bmatrix} I_{11}^4 & I_{21}^4 & I_{31}^4 & \dots \\ I_{12}^4 & I_{22}^4 & I_{32}^4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

参 考 文 献

- 1) 前田・大倉：プレートガーダーウェブの初期たわみと疲労亀裂発生の相関に関する研究，土木学会論文報告集，第319号，pp. 1~12, 1982.
- 2) 前田・大倉：薄板の面外変形に起因する疲労亀裂に与える初期たわみの影響，土木学会論文報告集，第329号，pp. 1~12, 1983.
- 3) 倉西・嶋：曲げによるプレートガーダーウェブの振動についての研究，第37回土木学会年次学術講演会概要集，第1部，I-61，pp. 121~122, 1982.
- 4) Takahashi, K.: Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping, J. of Sound and Vibration, Vol. 85, pp. 257~262, 1982.
- 5) Bolotin, V.V.: The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, Inc., pp. 382~416, 1964.
- 6) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd edition, McGRAW-HILL BOOK CO., INC., 1961.
- 7) 八巻・永井：周期的な圧縮荷重を受ける矩形板の動的安定，東北大学高速力学研究所報告，第36巻，第351号，pp. 147~168, 1975.

(1983.6.16・受付)