

板厚方向にフーリエ級数展開した高次平板理論

GENERAL HIGHER-ORDER THEORY OF PLATE BY USE OF FOURIER
SERIES EXPANSION ALONG THE PLATE THICKNESS

平 島 健 一*・根 岸 嘉 和**

By Ken-ichi HIRASHIMA and Yoshikazu NEGISHI

1. 緒 言

平板理論の高精度化をめざして、著者らは幾つかの論文を発表し、従来までに提案されている代表的な諸種の理論の特性とそれらの位置付けならびに、著者ら自身の提案になる一般化高次理論の精度特性等を検討した^{1)~4)}。そこでは、対象とする平板の変位 u_j を板厚方向の座標 x_3 に関する無限項のベキ級数展開とした 2 次元化平板理論式を求め、その理論の静的および動的な精度特性について幾つかの項目に対し詳細な検討を行った。本論文では一般的な 3 次元変位 u_j ($j=1, 2, 3$) を、 x_3 に関して Fourier 級数 (三角級数) 展開した場合について同様の定式化を行い、その支配方程式、境界条件式の導出と等質ならびに層状性の等方性、異方性平板に対する二、三の静的および動的な計算例を通じて、その精度を古典解、厳密解、ベキ級数展開の理論解等と併せて検討することを試みようとしたものである。

従来より x_3 のベキ級数ないし Legendre 級数の有限項展開を実施して支配式を導出したものは多数見受けられるのに対し、Fourier 級数に展開して理論の構成を試みたものはあまり見当たらない。しかし、その一つとしてたとえば Lee & Nikodem のものが挙げられる^{5), 6)}。彼らは、平板の分散特性を解明するために板厚にわたる Fourier cosine のみの無限項展開を実施した定式化を行い、項数を有限項に限定した場合の精度特性を等質の等方ならびに異方性平板を対象にして調べているが、これは付録 A でみるように板の上下表面の境界条件が完全にはとり込めないとともに、問題によってはきわめて低精度の結果しか与えない不十分な近似手法である。本論文においては、その欠陥を補うことを目的とし Fourier cosine および sine の無限項級数展開を実施して完全な

形でかつ整合性のある基礎式 (支配方程式と境界条件式) を導くとともに、その特殊な場合として有限項を採用した場合の数値例を実施し、先に著者らの提案した理論 (一般化高次理論) との相互関係や Fourier cosine 展開による理論 (Lee & Nikodem 理論) の結果との比較および等質性ならびに層状性の平板の静的・動的解析結果の精度等について検討する。なお、平板は一定の厚さであると仮定する。

2. 理論式の誘導

いま、3 次元変位 $u_j(x_1, x_2, x_3; t)$ を次式のように Fourier 級数展開で表示できるものと仮定する。

$$u_j = \sum_{n=0}^{\infty} u_j^{(n)} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_j^{(n)} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta). \dots (1)$$

ここに、 $\eta = x_3/b$ ($2b$: 平板の厚さ) である。 $u_j^{(n)}$ および $\hat{u}_j^{(n)}$ ($j=1, 2, 3$) は平板面内の座標 (x_1, x_2) および時間 t の関数で一般に変位係数とよばれるものであり、これらの量の幾何学的内容 (板厚方向の変形モード) の一部が Fig. 1 に示されている。同図中には参考のため (板厚方向に基準化した座標 η に関して) ベキ級数展開した場合の結果も示されている。上式を線形弾性論の幾何学的関係式に代入整理するとひずみ成分が次式のように求められる。

$$\epsilon_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \epsilon_{ij}^{(n)} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) + \bar{\epsilon}_{ij}^{(n)} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_{ij}^{(n)} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) + \bar{\gamma}_{ij}^{(n)} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \right\}. \dots (2)$$

ここに、

* 正会員 工博 山梨大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 福島工業高等専門学校講師 土木工学科

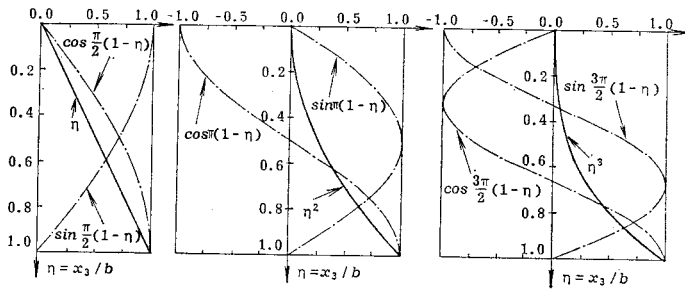


Fig. 1 Distributions along the thickness of trigonometric functions due to Fourier series expansion.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{(n)} &= \frac{1}{2} (\delta_{ia} u_{j,a}^{(n)} + \delta_{ja} u_{i,a}^{(n)}), \\ \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)} &= \frac{n\pi}{4b} (\delta_{i3} u_j^{(n)} + \delta_{j3} u_i^{(n)}), \\ \tau_{ij}^{(n)} &= \frac{1}{2} (\delta_{ia} \hat{u}_{j,a}^{(n)} + \delta_{ja} \hat{u}_{i,a}^{(n)}), \\ \bar{\tau}_{ij}^{(n)} &= -\frac{n\pi}{4b} (\delta_{i3} \hat{u}_j^{(n)} + \delta_{j3} \hat{u}_i^{(n)}). \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

上式中の δ_{ij} は Kronecker の delta であり、添字のうちギリシア文字は面内座標に関与するもので、1, 2 を、ラテン文字は 1, 2, 3 をとり、テンソルの和の規約を採用する。またコンマの後の記号はその記号の座標に関する偏微分を意味するものとする。

次に構成方程式として一般化 Hooke の法則が成立するものとすれば応力テンソル τ_{ij} とひずみテンソル ε_{ij} の間に次の関係式が成立する。

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \dots\dots\dots(4)$$

上式中の C_{ijkl} は弾性定数であり、一般的には 21 個の独立な定数となる。等方性材料の場合には次式のように 2 個の Lamé 定数 λ および G のみで表示される。

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \dots\dots\dots(5)$$

なお、上式の λ, G は弾性係数 E , ポアソン比 ν を用いて次のように表わされる。

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \dots\dots\dots(6)$$

式 (4) に (2) の関係式を代入すれば応力 τ_{ij} が変位係数 $u_j^{(n)}, \hat{u}_j^{(n)}$ を用いて次式のように表示される。

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_{ijal} u_{l,a}^{(n)} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \right. \\ & \left. + \frac{n\pi}{2b} C_{ij3l} u_l^{(n)} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \right\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{ijal} \hat{u}_{l,a}^{(n)} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \right. \\ & \left. - \frac{n\pi}{2b} C_{ij3l} \hat{u}_l^{(n)} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \right\} \dots\dots(7) \end{aligned}$$

さて、2次元化平板理論の支配方程式を求めるために次式で示される一般化 Hamilton 原理を考える

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V (T-U) dV$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \int_S t_j \delta u_j dS + \int_V f_j \delta u_j dV \right\} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

ここに、 $t_j (= \tau_{ij} n_j)$ は表面力、 f_j は単位体積当たりの物体力であり、 T および U は運動エネルギーおよびひずみエネルギーであって、それぞれ次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j, \quad U = \frac{1}{2} \tau_{ij} \varepsilon_{ij} \dots\dots\dots(9)$$

ここに、 ρ は密度を表わす。

いま、式 (8) に式 (1)~(3) および (9) を代入し、変分を実行して式を整理すると最終的に次式が求められる。

(支配方程式) :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\alpha j, \alpha}^{(n)} - \frac{n\pi}{2b} \bar{\tau}_{3j}^{(n)} + \frac{1}{b} (F_j^{(n)} + f_j^{(n)}) \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \{ \rho^{(m,n)} \ddot{u}_j^{(m)} + (1-\delta_{m0}) \bar{\rho}^{(m,n)} \ddot{\bar{u}}_j^{(m)} \}, \\ (n \geq 0); \\ \bar{\tau}_{\alpha j, \alpha}^{(n)} + \frac{n\pi}{2b} \tau_{3j}^{(n)} + \frac{1}{b} \bar{f}_j^{(n)} \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \{ \bar{\rho}^{(m,n)} \ddot{u}_j^{(m)} + (1-\delta_{m0}) \hat{\rho}^{(m,n)} \ddot{\hat{u}}_j^{(m)} \}. \\ (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

(境界条件式) :

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_j^{(n)} = b n_{\alpha} \tau_{\alpha j}^{(n)}, \quad \bar{T}_j^{(n)} = b n_{\alpha} \bar{\tau}_{\alpha j}^{(n)} \text{ on } C_3; \\ \bar{u}_j^{(n)} = u_j^{(n)}, \quad \bar{\hat{u}}_j^{(n)} = \hat{u}_j^{(n)} \text{ on } C. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

ここに、 $\bar{u}_j^{(n)}$ および $\bar{\hat{u}}_j^{(n)}$ は平板の側面(端面)境界 C で、与えられた表面変位 \bar{u}_j の Fourier 級数展開に対する第 n 次成分、すなわち次式のような関係量である。

$$\begin{aligned} \bar{u}_j = & \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_j^{(n)} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\hat{u}}_j^{(n)} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta). \dots\dots(12) \end{aligned}$$

また、式 (10) および (11) の他の記号は次に定義されるような量を表わしている。

$$\left. \begin{aligned} F_j^{(n)} &= \left[\tau_{3j} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \right]_{\eta=-1}^{\eta=1}, \\ f_j^{(n)} &= b \int_{-1}^1 f_j \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) d\eta, \\ \bar{f}_j^{(n)} &= b \int_{-1}^1 f_j \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) d\eta, \\ \bar{T}_j^{(n)} &= b \int_{-1}^1 (n_{\alpha} \tau_{\alpha j})_C \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) d\eta, \\ \bar{\hat{T}}_j^{(n)} &= b \int_{-1}^1 (n_{\alpha} \bar{\tau}_{\alpha j})_C \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) d\eta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{ij}^{(m)} &= \int_{-1}^1 \tau_{ij} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) d\eta = \sum_{m=0}^{\infty} \left(C_{ijal}^{(m,n)} u_{l,\alpha}^{(m)} + \frac{m\pi}{2b} \bar{C}_{ij3l}^{(m,n)} u_l^{(m)} \right) \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\bar{C}_{ijal}^{(m,n)} \hat{u}_{l,\alpha}^{(m)} - \frac{m\pi}{2b} C_{ij3l}^{(m,n)} \hat{u}_l^{(m)} \right), \\
 \bar{\tau}_{ij}^{(n)} &= \int_{-1}^1 \tau_{ij} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) d\eta = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\bar{C}_{ijal}^{(m,n)} u_{l,\alpha}^{(m)} + \frac{m\pi}{2b} \hat{C}_{ij3l}^{(m,n)} u_l^{(m)} \right) \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\hat{C}_{ijal}^{(m,n)} \hat{u}_{l,\alpha}^{(m)} - \frac{m\pi}{2b} \bar{C}_{ij3l}^{(m,n)} \hat{u}_l^{(m)} \right).
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned}
 [C_{ijkl}^{(m,n)}, \rho^{(m,n)}] &= \int_{-1}^1 [C_{ijkl}, \rho] \cos \frac{m\pi}{2} (1-\eta) \cdot \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) d\eta, \\
 [\bar{C}_{ijkl}^{(m,n)}, \bar{\rho}^{(m,n)}] &= \int_{-1}^1 [C_{ijkl}, \rho] \sin \frac{m\pi}{2} (1-\eta) \cdot \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) d\eta, \\
 [\hat{C}_{ijkl}^{(m,n)}, \hat{\rho}^{(m,n)}] &= \int_{-1}^1 [C_{ijkl}, \rho] \sin \frac{m\pi}{2} (1-\eta) \cdot \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) d\eta.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

したがって、支配方程式 (10) に上式までの関係式を代入し、整理すると変位係数 $u_j^{(m)}$ および $\hat{u}_j^{(n)}$ で示した平板の運動方程式が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ C_{\alpha j \beta l}^{(m,n)} u_{l,\alpha \beta}^{(m)} + \frac{\pi}{2b} (m \bar{C}_{\alpha j 3 l}^{(m,n)} - n \bar{C}_{3 j \alpha l}^{(m,n)}) u_{l,\alpha}^{(m)} - \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 m n \hat{C}_{3 j 3 l}^{(m,n)} u_l^{(m)} \right\} \\
 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{C}_{\alpha j \beta l}^{(m,n)} \hat{u}_{l,\alpha \beta}^{(m)} - \frac{\pi}{2b} (m C_{\alpha j 3 l}^{(m,n)} + n \hat{C}_{3 j \alpha l}^{(m,n)}) \hat{u}_{l,\alpha}^{(m)} + \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 m n \bar{C}_{3 j 3 l}^{(m,n)} \hat{u}_l^{(m)} \right\} \\
 + \frac{1}{b} (F_j^{(n)} + f_j^{(n)}) = \sum_{m=0}^{\infty} \{ \rho^{(m,n)} \ddot{u}_j^{(m)} + (1 - \delta_{m0}) \bar{\rho}^{(m,n)} \ddot{\hat{u}}_j^{(m)} \}, \quad (n \geq 0); \\
 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \bar{C}_{\alpha j \beta l}^{(m,n)} u_{l,\alpha \beta}^{(m)} + \frac{\pi}{2b} (m \hat{C}_{\alpha j 3 l}^{(m,n)} + n C_{3 j \alpha l}^{(m,n)}) u_{l,\alpha}^{(m)} + \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 m n \bar{C}_{3 j 3 l}^{(m,n)} u_l^{(m)} \right\} \\
 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \hat{C}_{\alpha j \beta l}^{(m,n)} \hat{u}_{l,\alpha \beta}^{(m)} - \frac{\pi}{2b} (m \bar{C}_{\alpha j 3 l}^{(m,n)} - n \bar{C}_{3 j \alpha l}^{(m,n)}) \hat{u}_{l,\alpha}^{(m)} - \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 m n C_{3 j 3 l}^{(m,n)} \hat{u}_l^{(m)} \right\} \\
 + \frac{1}{b} \bar{f}_j^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \{ \bar{\rho}^{(m,n)} \ddot{u}_j^{(m)} + (1 - \delta_{m0}) \hat{\rho}^{(m,n)} \ddot{\hat{u}}_j^{(m)} \}. \quad (n \geq 1).
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

上式は非均質性で、かつ異方性の平板の場合にも成立する最も一般的なものであるが、以下では二、三の特殊な場合について考えておこう。

まず、等質な平板の場合 $C_{ijkl}^{(m,n)}$, $\rho^{(m,n)}$ 等は、面内方向座標 x_α のみならず板厚方向の座標 x_3 に関しても変化しないことから、式 (15) は簡単になり次のような数式に書き直される。

$$\left. \begin{aligned}
 [C_{ijkl}^{(m,n)}, \rho^{(m,n)}] &= \delta_{mn} (1 + \delta_{n0}) [C_{ijkl}, \rho], \\
 [\bar{C}_{ijkl}^{(m,n)}, \bar{\rho}^{(m,n)}] &= \delta_{m+n} \cdot \frac{4}{\pi} \frac{m}{m^2 - n^2} [C_{ijkl}, \rho], \\
 [\hat{C}_{ijkl}^{(m,n)}, \hat{\rho}^{(m,n)}] &= \delta_{mn} (1 - \delta_{n0}) [C_{ijkl}, \rho].
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)'$$

ここに、

$$\delta_{m+n} = \frac{1}{2} \{ 1 - (-1)^{m+n} \}. \dots\dots\dots (17)$$

したがって、この場合の平板を支配する方程式はこれらの関係式を式 (16) に代入してやればよい。

さらに、等質で等方性の平板の場合には上式中の C_{ijkl} に式 (5) を代入整理してやればよいが、その具体的な支配方程式については紙面の都合上省略する。

上述した等質の等方性ならびに異方性の平板の場合、それらの式を具体的に展開してみればわかるが、面内

(伸縮) 挙動に関する $u_\alpha^{(2k)}$, $\hat{u}_\alpha^{(2k)}$, $u_3^{(2k+1)}$, $\hat{u}_3^{(2k+1)}$, ($k=0, 1, 2, \dots$) と面外 (曲げ) 挙動に関する $u_\alpha^{(2k+1)}$, $\hat{u}_\alpha^{(2k+1)}$, $u_3^{(2k)}$, $\hat{u}_3^{(2k)}$, ($k=0, 1, 2, \dots$) は連成せず、互いに独立な 2 群の方程式系を構成することが容易に示される。このことは一般的な層状性ないし非均質性の場合には成立せず、両者が連成して方程式系の分離が不可能となるのは既報の著者らの一般化高次理論^{2),3)} やその他の通常の線形平板理論³⁾ の場合ともちろん同一である。

上述した支配方程式を与えられた荷重、境界条件のもとで解くことができれば、平板内の任意点 (x_1, x_2, x_3) の変位、応力はそれぞれ式 (1), (7) から求められることになる。しかしながら既報論文^{2),3)} においても指摘したとおり、変位仮定から出発する場合、変位および面内応力は相対的に高精度の結果が得られるが、面外応力成分 τ_{13} , τ_{23} , τ_{33} は後の数値例でもみるように、板上下面の境界 (荷重) 条件を満たさないとともに、板厚方向の分布形もかなり精度の低い結果を与える。そこで面外応力成分の精度向上と上下面の境界 (荷重) 条件を満足させるように、 $\eta = -1$ (上表面) において、 $\tau_{33} = -p$, $\tau_{\alpha 3} = 0$; $\eta = +1$ (下表面) において $\tau_{i3} = 0$ とし、運動方程

式を用いてそれらの補正を行うと、等質性で板面 (x_1 , x_2 -平面) に関して monoclinic な対称性を有する異方

性平板に対し、最終的に次式のように求められる (ただし、脚注に示したような Voigt 規約を採用した弾性定数 C_{pq} を用いている)。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\alpha 3}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2b}{n\pi} \right) \left[\Gamma_{\alpha}^{(n)} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) - \hat{\Gamma}_1^{(n)} \left\{ \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) - \delta_{n+1}^{\circ} \right\} \right] - b\eta \Gamma_1^{(0)}, \\ \tau_{33}^* &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2b}{n\pi} \right)^2 \left[\left\{ \Gamma_{\alpha, \alpha}^{(n)} - \left(\frac{n\pi}{2b} \right) \rho \ddot{u}_3^{(n)} \right\} \left\{ \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) - (b\eta \delta_n^{\circ} + \delta_{n+1}^{\circ}) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \hat{\Gamma}_{\alpha, \alpha}^{(n)} + \left(\frac{n\pi}{2b} \right) \rho \ddot{u}_3^{(n)} \right\} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \right] + \frac{1}{2} b^2 (\eta^2 - 1) \Gamma_{\alpha, \alpha}^{(0)} + \frac{\rho}{2} (\eta - 1). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\Gamma}_1^{(n)} &= C_{16} u_{1,11}^{(n)} + (C_{66} + C_{12}) u_{1,12}^{(n)} + C_{26} u_{1,22}^{(n)} + C_{66} u_{2,11}^{(n)} + 2 C_{26} u_{2,12}^{(n)} + C_{22} u_{2,22}^{(n)} \\ &\quad - \left(\frac{n\pi}{2b} \right) (C_{36} \hat{u}_{3,1}^{(n)} + C_{23} \hat{u}_{3,2}^{(n)}) - \rho \hat{u}_1^{(n)}, \\ \hat{\Gamma}_1^{(n)} &= C_{16} \hat{u}_{1,11}^{(n)} + (C_{66} + C_{12}) \hat{u}_{1,12}^{(n)} + C_{26} \hat{u}_{1,22}^{(n)} + C_{66} \hat{u}_{2,11}^{(n)} + 2 C_{26} \hat{u}_{2,12}^{(n)} + C_{22} \hat{u}_{2,22}^{(n)} \\ &\quad + \left(\frac{n\pi}{2b} \right) (C_{36} u_{3,1}^{(n)} + C_{23} u_{3,2}^{(n)}) - \rho \hat{u}_1^{(n)}, \\ \Gamma_2^{(n)} &= C_{11} u_{1,11}^{(n)} + 2 C_{16} u_{1,12}^{(n)} + C_{66} u_{1,22}^{(n)} + C_{16} u_{2,11}^{(n)} + (C_{66} + C_{12}) u_{2,12}^{(n)} + C_{26} u_{2,22}^{(n)} \\ &\quad - \left(\frac{n\pi}{2b} \right) (C_{13} \hat{u}_{3,1}^{(n)} + C_{36} \hat{u}_{3,2}^{(n)}) - \rho \hat{u}_2^{(n)}, \\ \hat{\Gamma}_2^{(n)} &= C_{11} \hat{u}_{1,11}^{(n)} + 2 C_{16} \hat{u}_{1,12}^{(n)} + C_{66} \hat{u}_{1,22}^{(n)} + C_{16} \hat{u}_{2,11}^{(n)} + (C_{66} + C_{12}) \hat{u}_{2,12}^{(n)} + C_{26} \hat{u}_{2,22}^{(n)} \\ &\quad + \left(\frac{n\pi}{2b} \right) (C_{13} u_{3,1}^{(n)} + C_{36} u_{3,2}^{(n)}) - \rho \hat{u}_2^{(n)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

なお、等方性平板の場合には上式中の C_{pq} を脚注注1) の式 (d) のように置き換えてやればよい。

なお、Lee & Nikodem らの理論^{5),6)}は上述の定式化過程で変位成分 u_j の正弦関数の項を完全に除去 (i.e. $\hat{u}_j^{(n)} \equiv 0$) したものに相当するが、この項を無視することは付録Aに示したように、一般的な曲げや伸縮挙動を満たし得ないものであり、したがって特殊な理論体系に過ぎず、その使用に際しては注意深い適用可能性の検討をしておくことが必要であろう。著者らのここで示したものは変位場の Fourier 級数展開において cosine 展開, sine 展開をともに含んでいるという観点からいえば、数学的にも完全な系として構成されたものであり、もし板厚方向に変位を Fourier 級数展開するような理論系

を一般的な問題に適用する際には上述までに得られた基礎式を用いるべきである。このことの正当性が次節の数値例において具体的に実証される。

3. 数値計算例

前節で示した理論式は形式的に無限項の項数採用が可能であるが、数値計算を実施するためには有限項で打ち切る必要がある。ここでは式 (1) の代わりに

$$\left. \begin{aligned} u_{\alpha} &= \sum_{n=0}^N u_{\alpha}^{(n)} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N'} \hat{u}_{\alpha}^{(n)} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta), \\ u_3 &= \sum_{m=0}^M u_3^{(m)} \cos \frac{m\pi}{2} (1-\eta) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{M'} \hat{u}_3^{(m)} \sin \frac{m\pi}{2} (1-\eta). \end{aligned} \right\} (20)$$

とし、 $N=3, M=N'=M'=2$ としたものを (F-3-2 order); $N=M=3, N'=M'=2$ としたものを (F-3-2 order) とよぶことにする。したがって連成があるとして計算する際 (i.e. 非均質性の平板) の (F-3-2 order) のものは未知変位係数の数が 17 個であるから既報論文のべき級数展開の高次理論の (P-5 order) の場合と未知係数の数は等しく、したがって計算上の難易度は同等のレベルであるが、基礎式そのものは前者の方がやや複雑な構造をもっている。(F-3-2 order) のものは未知係数の個数は 18 となる。連成がない場合にはたとえば、

注 1) 一般化 Hooke の法則は式 (4) に示したように与えられるが、ここでは弾性定数 C_{ijkl} を Voigt 規約を用いて簡約に表現した場合について触れておく。すなわち

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} = C_{pq} \epsilon_{kl} \dots\dots\dots (a)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} ij, kl : & 11 \ 22 \ 33 \ 23, 32 \ 13, 31 \ 12, 21 \\ p, q : & 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (b)$$

のような対応する指標をとるものとする。このようにすると、たとえば 3 つの主弾性軸が座標軸と一致している直交異方性体の場合の構成方程式は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11} &= C_{11} \epsilon_{11} + C_{12} \epsilon_{22} + C_{13} \epsilon_{33}, \quad \tau_{23} = 2 C_{44} \epsilon_{23}, \\ \tau_{22} &= C_{12} \epsilon_{11} + C_{22} \epsilon_{22} + C_{23} \epsilon_{33}, \quad \tau_{13} = 2 C_{55} \epsilon_{13}, \\ \tau_{33} &= C_{13} \epsilon_{11} + C_{23} \epsilon_{22} + C_{33} \epsilon_{33}, \quad \tau_{12} = 2 C_{66} \epsilon_{12}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (c)$$

特に等方性体の場合には上式の C_{pq} に次のような値を代入してやればよい。

$$\left. \begin{aligned} C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \lambda + 2G, \quad C_{12} = C_{23} = C_{31} = \lambda, \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} &= G. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (d)$$

(F-3-2 order) は面外 (曲げ) に対して 9 個, 面内 (伸縮) に対して 8 個のそれぞれ独立な支配方程式となる. なお, $N'=M'=0$ とおいた $\hat{u}_j^{(m)} \equiv 0$ の場合の (F-3-0 order), (F-5-0 order) 等が Lee & Nikodem 理論に相当する (なお, 分散関係の計算例においては $N=M=N'=M'=3$ と置いた (F-3-3 order) の場合が取り上げられている).

(1) 上表面に静的な正弦関数荷重を受ける無限長平板の曲げ

以下では等質等方性平板において Fig. 2 のような上面載荷の荷重を受ける平板を考える. この例は Lo らが彼らの提案した高次理論^{7),8)} ((P-3 order)²⁾に相当) を検証するために採用したもので厳密解⁹⁾が存在するとともに, 簡便に精度検定が実施できる点で都合のよい例題である. 同様の例題を 3 層の層状性平板についても b) において取り上げる.

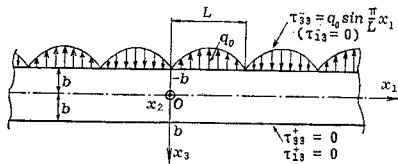


Fig. 2 Transverse loading of static sinusoidal distribution applied at the upper surface of infinite plate.

a) 等質等方性平板の場合

与えられた境界 (荷重) 条件を満足するように式 (20) の変位係数 $u_j^{(m)}$, $\hat{u}_j^{(m)}$ を次式のように仮定する.

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(m)} &= A_n \cos \frac{\pi}{L} x_1, & u_3^{(m)} &= C_n \sin \frac{\pi}{L} x_1, & u_2^{(m)} &= 0, \\ \hat{u}_1^{(m)} &= \hat{A}_n \cos \frac{\pi}{L} x_1, & \hat{u}_3^{(m)} &= \hat{C}_n \sin \frac{\pi}{L} x_1, & \hat{u}_2^{(m)} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

上式, 式 (15)', (5) および $\ddot{u}_j^{(m)} = \hat{u}_j^{(m)} = f_j^{(m)} = \bar{f}_j^{(m)} = 0$ を式 (16) に代入整理すれば A_n , \hat{A}_n , C_n および \hat{C}_n に関する二組の連立 1 次方程式の系が求められ, それを解き, 式 (21), (1), (7) に代入すれば, 板面内の変位, 応力が計算できることになる. それらの結果の一部をポアソン比 $\nu=0.25$ とした場合について Fig. 3~5 に示す. まず Fig. 3 は $2b/L=1.50$ の場合に対する曲げ応力 τ_{11} の, 板厚方向の分布であるが図中には古典解, 厳密解, ベキ級数展開の高次理論²⁾の (P-3 order) および (P-5 order) の結果も同時に示されている. これらのうち, (P-5 order) と (F-3-2 order) のものは厳密解のまわりにわずかに変動する程度で非常によく一致している. また参考のため $\hat{u}_j^{(m)} \equiv 0$ とおいた Lee & Nikodem 理論による場合の結果 (F-3-0 order) も

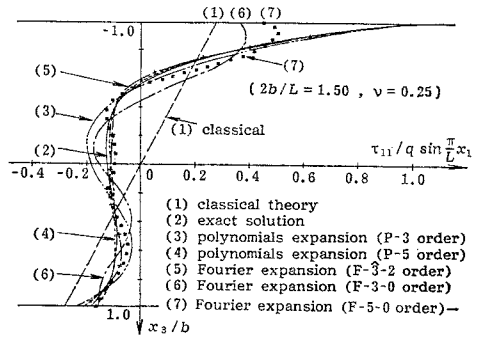


Fig. 3 Bending stress τ_{11} along the thickness for a homogeneous isotropic plate ($\nu=0.25$).

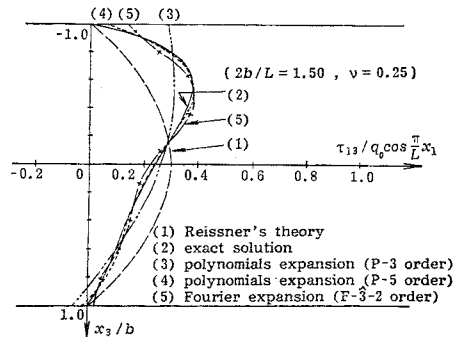


Fig. 4 Out-of-plane shear stress τ_{13} along the thickness for a homogeneous isotropic plate ($\nu=0.25$).

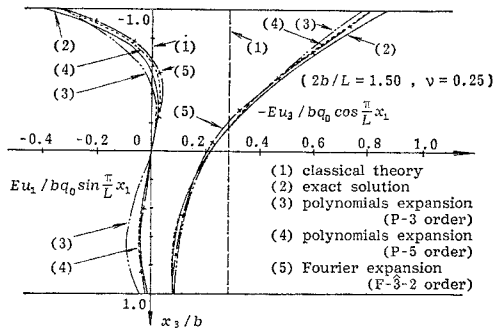


Fig. 5 Displacements u_1 and u_3 along the thickness for a homogeneous isotropic plate ($\nu=0.25$).

示してあるが図にみるようにこの場合には厳密解のまわりに大きく変動するとともに最大値 (板の上表面) は厳密解の約 1/3 程度の値しかとり得ないことをみても, 恒等的に $\hat{u}_j^{(m)} \equiv 0$ とした彼らの理論は不完全なものであることが推察されよう. (F-5-0 order) とした結果についても 図中に ■印で示されており多少精度は向上するもののほぼ同様の傾向を示す. 特に, この (F-5-0 order) の従属変数の個数は (P-5 order) および (F-3-2 order) のものより 1 個多いにもかかわらず, それら

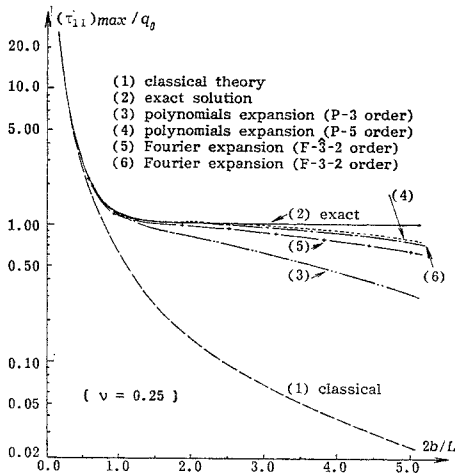


Fig. 6 Maximum bending stress $(\tau_{11})_{\max}$ with non-dimensional thickness parameter $2b/L$ for a homogeneous isotropic plate ($\nu=0.25$).

と比較して、最大値を示す位置での精度は大きく劣っていることが指摘できる。

次に面外方向のせん断応力 τ_{13} の分布図を Fig. 4 に示したがこれは上下表面にせん断荷重が作用していないことから、両表面で値が零となる必要があるが、近似理論のうち、面外せん断応力に2次放物線分布の仮定を設けた Reissner の理論¹⁾のみがこの条件を満たしているに過ぎない。(P-5 order) および (F-3-2 order) のものは全体的に厳密解に近い値をとるもののこの段階では上述の境界条件を完全に満たし得ない。これに対する補正法は面外応力成分を、つり合い(運動)方程式から求めた式すなわち、ここでの Fourier 級数展開法の場合には式 (18) を、またべき級数展開法のそれでは既報論文²⁾の式 (28) を用いることによって上下面の境界条件を満足させることができると同時に板面内分布における精度向上をはかることができる。すなわち、このことを (P-5 order) および (F-3-2 order) の場合に対して実行した結果は上下表面で零となるとともに、その間においても厳密解とほとんど差異がなくなる。したがって Fig. 4 の図上ではまったく厳密解の線と一致したものとなる(したがって図中ではその補正法を適用した結果の線を描くことは避ける)。この傾向は τ_{33} についても、ここには示さないが、まったく同様である。Fig. 5 は変位 u_1 および u_3 の板厚方向分布図であるが、面内応力の場合と同様な指摘ができる。すなわち、古典解以外はそれほど大きな差はなく、各理論とも厳密解のまわりに分布しており、(F-3-2 order) は (P-5 order) と (P-3 order) との間の精度を

もつ。Fig. 6 は板上表面 ($x_3 = -b$ の面) での曲げ応力すなわち、 $(\tau_{11})_{\max}$ と、板厚 $2b$ と荷重周期幅 L との比 $2b/L$ の関係を示したものである。(F-3-2 order) の結果がほぼ (P-5 order) のそれと同じ程度の精度を与えるものであることがこの図よりわかる。(F-3-2 order) はそれよりもやや精度が低い結果となっているが、それでも (P-3 order) よりはかなりよい精度の結果となっている。

b) 層状性(3層)の直交異方性板の場合

ここでは等厚で3層の直交異方性材料で構成された表記の平板に a) と同様の静的な鉛直荷重が作用する場合を考える。各層の異方性弾性定数は高い弾性係数を有する graphite/epoxy 複合材であって次式のような値をもつものとする⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} E_L/E_T &= 25.0, & G_{LT}/E_T &= 0.5 \\ G_{TT}/E_T &= 0.2, & \nu_{LT} &= \nu_{TT} = 0.25 \end{aligned} \right\} \dots\dots (22)$$

ここに、添字 L および T は fiber 方向およびそれに直角方向を表わし、たとえば E_L は fiber 方向の弾性係数を、 E_T はそれに直角な方向の弾性係数を表わし、また ν_{LT} は fiber 方向に一軸直応力を受けたときのその方向のひずみ ϵ_L によって、それに直角方向に生じるひずみ ϵ_T を除した値 ($=|\epsilon_T|/|\epsilon_L|$) すなわち、ポアソン比を表わすものとする。その他についても同様な記号法が使われている。いま等厚の3層のうち上・下の層は x_1 方向に fiber 方向 (L 方向) が一致し、中間層は x_1 方向に直角に fiber 方向が向いているものとしよう。

さて、このような層状板の場合にも $\ddot{u}_j^{(m)} = \ddot{u}_j^{(n)} = \dot{f}_j^{(m)} = \dot{f}_j^{(n)} = 0$ が成立する。変位係数 $u_j^{(m)}$, $\dot{u}_j^{(m)}$ も先の例と同様に式 (21) のように設定し、 $C_{pq}^{(m,n)}$ を上述の積層板に対して求め、連立1次方程式系を解いてやればよい。最終的な計算結果の例 ($2b/L=0.25$ の場合) を Fig. 7~9 に示す。

まず、Fig. 7 は曲げ応力 τ_{11} の分布図であるが、図

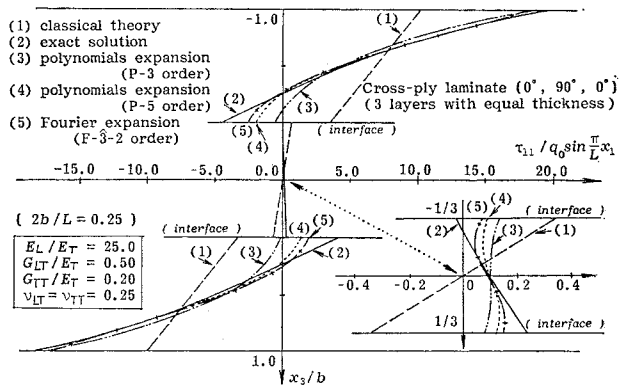


Fig. 7 Bending stress τ_{11} along the thickness for a three-layer laminated plate.

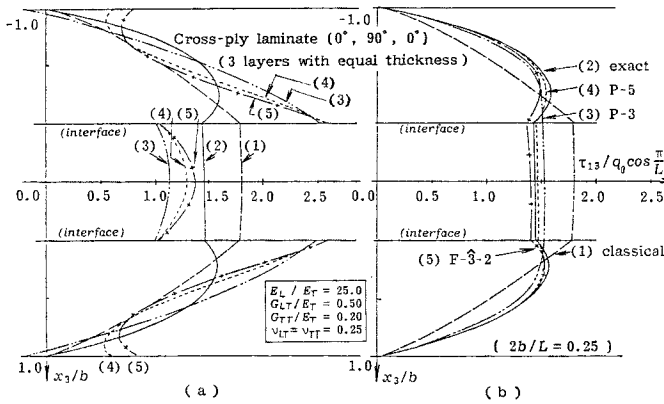


Fig. 8 Out-of-plane shear stress τ_{13} along the thickness for a three-layer laminated plate.

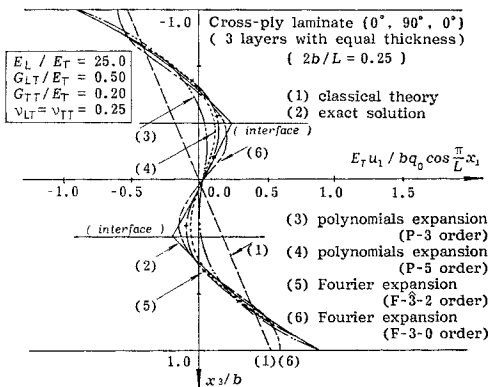


Fig. 9 In-plane displacement u_1 along the thickness for a three-layer laminated plate.

にみるように中間層の上下境界において応力の不連続が発生し中間層の内部で非常に小さな τ_{11} の値をとる。これは中間層の弾性係数が x_1 方向に対し、上下層に比べて $1/25$ になっていることからくるものであり、通常のサンドウィッチ平板の状況と類似の傾向である。ここでも (F-3-2 order) は (P-5 order) と同程度もしくは、中間層付近ではむしろ高精度の結果を与えている。(P-3 order) の結果は、もちろん Lo らの第 2 論文の結果⁹⁾ と一致するものであるが、上述の order のものに比べて精度は劣る。層状板に対する古典理論の結果¹¹⁾ は厳密解⁹⁾ の平均的な値を示していることが観察される。Fig. 8(a),(b) は面外せん断応力 τ_{13} の分布で図 (b) の方はベキ級数展開法および Fourier 級数展開法ともに、すでに述べたような境界条件とつり合い方程式により補正した計算式を用いてプロットし直した結果の図である。これら 2 つの図を比較すれば、この補正法の有効性がよく認識でき、面外応力についてもきわめて高精度の結果を与

え得るようになることが理解される。Fig. 9 は面内方向の変位 u_1 の板厚方向の分布図であるが、図にみるように厳密解⁹⁾ は層境界において、急角度の折線となるのに対し、各近似解は板厚にわたる一つのなめらかな曲線(または直線)となるため層境界付近では τ_{11} の分布の場合と同様やや精度が劣る結果を与えるものの最大・最小値をとる上下表面上では高次理論の結果はほぼ厳密解と一致している。この図には Lee & Nikodem 理論による (F-3-0 order) の結果も示されているが、厳密解に比べてかなり大きな差を生じることが読み取れる。

紙面の都合上ここには示さないが、このほかに静的な数値例として全辺単純支持の等質および 3 層の層状性平板およびサンドウィッチ状の矩形板に、正弦分布荷重が作用した場合の任意点の変位、応力状態を解析し厳密解との数値的な比較を実施しているが、それらもほぼ上述の例と類似な傾向を示している。

(2) 単純支持矩形板の固有振動数

板厚 $h(=2b)$ の中央面で 4 辺単純支持された矩形板 ($L_1 \times L_2 \times 2b$) を考える。この場合の境界条件は次式で表示される。

$$\left. \begin{aligned} u_2^{(n)} = \hat{u}_2^{(n)} = u_3^{(n)} = \hat{u}_3^{(n)} = 0, \\ \tau_{11}^{(n)} = \bar{\tau}_{11}^{(n)} = 0, \text{ at } x_1 = 0, L_1; \\ u_1^{(n)} = \hat{u}_1^{(n)} = u_3^{(n)} = \hat{u}_3^{(n)} = 0, \\ \tau_{22}^{(n)} = \bar{\tau}_{22}^{(n)} = 0, \text{ at } x_2 = 0, L_2. \end{aligned} \right\} \dots\dots (23)$$

これらの境界条件を満足する変位係数 $u_j^{(n)}, \hat{u}_j^{(n)}$ の固有振動解もベキ級数展開の場合(文献³⁾の式(32))と類似な形式で設定してやればよく、 $u_j^{(n)}, \hat{u}_j^{(n)}$ の未知係数に関する固有振動方程式から、固有振動数 ω を含む係数行列式が零と設定して ω の値を決定することができる。Table 1 は $\nu=0.30$ でモードパラメーター $\theta = (2bm/L_1)^2 + (2bn/L_2)^2 = 0.180$ の値を仮定したときの固有振動数パラメーター $\lambda_k = 2b\omega_k/\sqrt{G/\rho}$ ($k = \text{I, II, } \dots, \text{V}$) の値を面外(曲げ)および、面内(伸縮)振動

Table 1 Eigen value λ_k for a homogeneous isotropic plate ($\nu=0.30$) of simply supported edges with mode-parameter $\theta=0.180$.

Mode	Theories	I	II	III	IV	V
Flexural motion	Exact solution	0.688 93	3.412 6	3.931 0	9.417 4	—
	(P-5 order)	0.688 91	3.412 7	3.931 1	9.564 4	9.643 7
	(F-3-2 order)	0.689 20	3.412 7	3.968 9	9.518 6	9.729 4
	(F-3-0 order)	0.812 03	3.412 7	3.971 1	9.501 6	9.518 6
Extensional motion	Exact solution	1.332 9	2.217 1	5.490 3	6.423 0	7.119 9
	(P-5 order)	1.332 8	2.217 1	5.502 2	6.445 3	7.157 1
	(F-3-2 order)	1.332 8	2.219 3	5.490 7	6.423 0	7.124 3
	(F-3-0 order)	1.332 8	2.260 5	5.574 3	6.423 0	7.214 7

に対してそれぞれ5次までの数値結果を示したものである。同表中には (F-3-0 order) の結果も示してあるが、この程度の θ に対しては、どの近似理論によってもある程度よい精度の結果となっている。しかし紙面の都合上、ここには示さないが、板厚方向の変位、応力等の分布形 (板厚モード) は (P-5 order) のものが相対的によい精度となり、次に (F-3-2 order), (P-3 order) と続き、(F-3-0 order) のものは部分的にかなりの乱れが生じた板厚モードとなり、固有値そのものはある程度よい結果を与えはするが、モード等については必ずしも固有値ほどの精度は期待できないことが指摘できる。

(3) 等質等方性の平板に対する分散特性

表記の無限板中を SV 波および P 波が伝播する場合の分散関係を幾つかの理論により計算し、波数パラメーター $z (= 2b\xi/\pi)$ に対する振動数パラメーター $\Omega (= 2b\omega/\pi\sqrt{G/\rho})$ の関係として整理したものを Fig. 10, 11 に示す (ここに ξ, ω はそれぞれ伝播する波動の波数および円振動数を表わす)。

まず Fig. 10 には面外 (曲げ) の板厚モードを有する波動のうち1次 (A1) から5次 (A5) までの結果が示されている。これによると A1, A2 の両モードでは (F-5-0 order) のものが他よりも少し大き目の値を示す以外は、ほぼ同じ値を与え厳密解との差異も少ない。特に (F-3-3 order) の値は非常に厳密解に近く、図上では同一線形で表わされている。A3 のモードになると、各理論間の差異が生じはじめ、(F-3-3 order) のものでは z の増加に伴い厳密解を含めた各理論の中で最も小さい値を示すようになる。A4 のモードでは、厳密解を下限値として F-3-3, F-5-0, P-6, P-5 と順次大きな値を示しており、各理論間の差は z の増大とともに、ほぼ増大してゆくが、F-3-3 と F-5-0 とは非常に近い値を与えている。A5 のモードになると F-5-0 が $z=0$ の極限において厳密解に収束し、かつ全体的にも厳密解に近い性状を示す以外は、その他の理論は厳密解をかなり上回った値を与え、精度は低いものとなっている。特に P-5 のものはかなり大きい値となるため、この図上には現われていない。また F-3-3 は、これらのうちで F-5-0 に次いで厳密解に近い値を与えているが、精度的には必ずしも十分ではない。

Fig. 11 は面内 (伸縮) の板厚モードを有する波動の1次 (S1) から5次 (S5) までの結果を示している。この結果についても Fig. 10 の場合と類似な検討考察が可能であるが、紙面の都合上ここでは省略する。しかし Fig. 10, 11 を通じて、高次のモードほど、また z の値が大きくなるほど、近似理論による分散関係の精度は低下してゆく傾向がわかる。また、ここに示した各

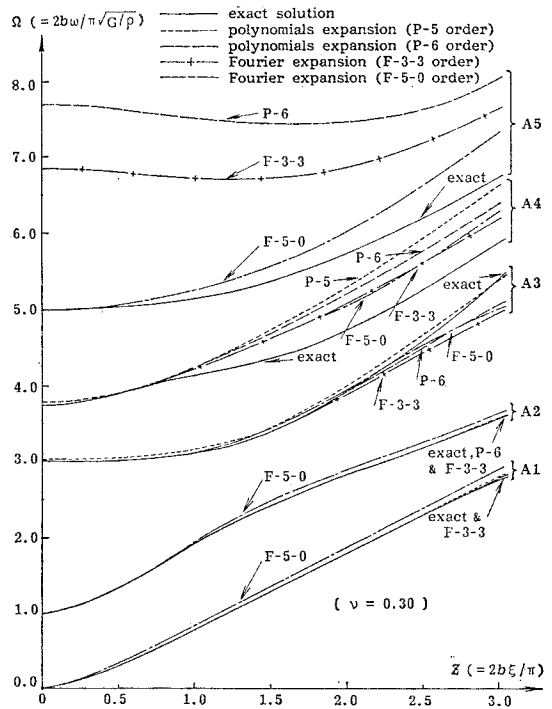


Fig. 10 Dispersion relation (frequency spectrum Ω versus non-dimensional wave number z) of a homogeneous isotropic plate ($\nu=0.30$) for the case of flexural motion.

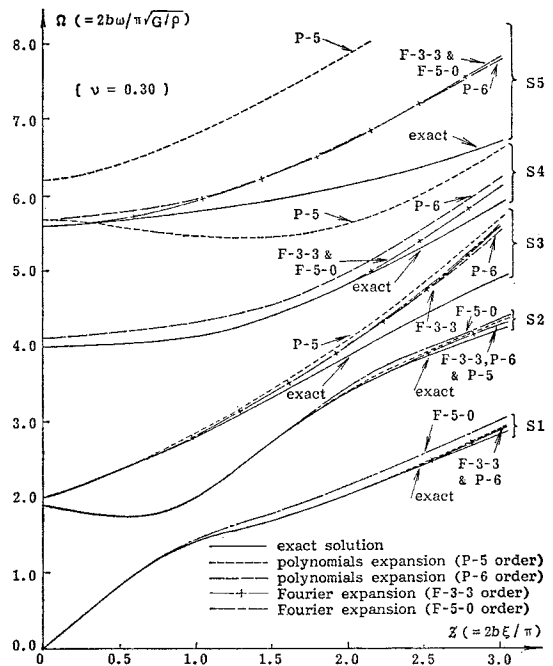


Fig. 11 Same as Fig. 10 for the case of extensional motion.

理論の中で (F-3-3 order) のものが比較的よい精度の値を与えていることが指摘できる。

4. 結 言

板厚方向に Fourier 級数展開した近似平板理論を定式化し、静的ならびに動的な二、三の数値例を通してその精度特性を検討して次のような結果を得た。

(1) Fourier cosine 展開のみを採用した Lee & Nikodem の近似理論^{5), 6)} は著者らのここでの定式化において Fourier sine の項を無視したものに完全に一致するが Lee & Nikodem 理論は不完全なものであり、外荷重の作用しない特殊な振動・波動の解析の場合を除いて一般に大きな誤差が生じる危険性があり、したがって、その適用にあたっては十分な注意が必要である。

(2) ベキ級数展開法による (P-5 order) とここでの Fourier 級数展開法によるもの (F-3-2 order) は未定係数の数は同数であるが、支配式の形は一般に後者の方がやや複雑であるとともに、ここで取り上げた静的・動的な例題においては相対的にやや劣った精度結果を与える。しかしながら、従来までに提案されている 2 次元化平板理論式に比較すれば (F-3-2 order) の数値結果ももちろんすぐれた精度となっている。

(3) 動的問題の計算例として挙げた、波動の分散関係の解析結果においては、全般的な傾向として (F-3-3 order) のものが高精度の値を与えている。

なお最後に、最近 Lee & Nikodem 理論の Fourier cosine 展開法を踏襲した二、三の論文が発表されているが^{12), 13)}、それらについても、ここでの指摘にしたがった十分な再検討を行う必要があると思われる。それらについては今後の研究課題である。

付録 A 曲げを受けた平板の上下表面および断面の変形状態

ここでは簡単のために等質等方性の平板で、板上下表面にせん断応力が作用しない状態で変形した場合を考える。式 (1) の u_3 を x_3 で微分すると

$$\alpha \equiv u_{3,\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ u_{3,\alpha}^{(n)} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) + \hat{u}_{3,\alpha}^{(n)} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \right\} \dots (A.1)$$

が得られる。これより上下表面に平行な fiber の傾きはそれぞれ次式で与えられる。

$$\alpha_{\pm} = u_{3,\alpha} \Big|_{\eta=\pm 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{3,\alpha}^{(n)}, \Big\}$$

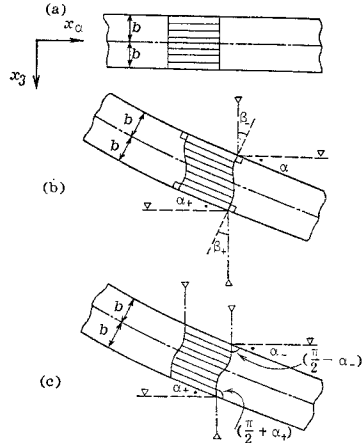


Fig. A.1 Mode shapes for the cases of (b) Fourier cosine & sine expansion and (c) Fourier sine expansion under the flexural loading type.

$$\alpha_{-} = u_{3,\alpha} \Big|_{\eta=-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{3,\alpha}^{(n)}. \Big\} \dots (A.2)$$

他方、上下表面の fiber および変形前の中立軸に垂直であった線素の傾きは次式から計算される。

$$\beta \equiv u_{\alpha,3} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{2b} \left\{ u_{\alpha}^{(n)} \sin \frac{n\pi}{2} (1-\eta) + \hat{u}_{\alpha}^{(n)} \cos \frac{n\pi}{2} (1-\eta) \right\} \dots (A.3)$$

上下表面での β すなわち、鉛直軸よりの傾斜角はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \beta_{+} = u_{\alpha,3} \Big|_{\eta=+1} &= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n\pi}{2b} \hat{u}_{\alpha}^{(n)}, \\ \beta_{-} = u_{\alpha,3} \Big|_{\eta=-1} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{2b} \hat{u}_{\alpha}^{(n)}. \end{aligned} \right\} \dots (A.4)$$

ところで、上下表面にはせん断荷重が作用していないから $\alpha_{\pm} = \beta_{\pm}$ が成立しなければならない。すなわち式 (A.2), (A.4) より

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n\pi}{2b} \hat{u}_{\alpha}^{(n)} - u_{3,\alpha}^{(n)} \right) &= 0 \quad \text{at } \eta = -1; \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{2b} \hat{u}_{\alpha}^{(n)} - u_{3,\alpha}^{(n)} \right) &= 0 \quad \text{at } \eta = 1, \end{aligned} \right\} \dots (A.5)$$

しかるに、上下表面におけるせん断応力を式 (7) から求めると

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\alpha 3} \Big|_{\eta=-1} &= -G \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n\pi}{2b} \hat{u}_{\alpha}^{(n)} - u_{3,\alpha}^{(n)} \right), \\ \tau_{\alpha 3} \Big|_{\eta=1} &= -G \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{2b} \hat{u}_{\alpha}^{(n)} - u_{3,\alpha}^{(n)} \right). \end{aligned} \right\} \dots (A.6)$$

となるが、これは式 (A.5) よりともに零となり、上下境界でせん断応力が作用していないことを表わし、は

じめに設定した仮定と整合している（この変形状態は **Fig. A・1** の (b) 図に対応する）。

これに対して Lee & Niokdem 理論におけるように $\hat{u}_j^{(n)} \equiv 0$ としてしまうと

$$\left. \begin{aligned} \alpha_+ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{3,\alpha}^{(n)}, \quad \alpha_- = \sum_{n=0}^{\infty} u_{3,\alpha}^{(n)}, \\ \beta_{\pm} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{A}\cdot 7)$$

となって、上下表面の fiber に垂直な線分は変形後も何ら傾斜角の変化がなく表面上での直角保持が乱された状態に相当したものとなる (**Fig. A・1** の (c) 図参照)。他方、この理論に対する上下表面でのせん断応力は式 (A・6) で $\hat{u}_\alpha^{(n)} = 0$ とおけばよく、その結果は式 (A・7) となって、 $\tau_{\alpha 3}|_{\gamma=\pm 1} = 0$ の条件を使うと $\alpha_{\pm} = 0$ すなわち、上下表面の fiber も少しも傾斜しないというきわめて特異な変形状態（たとえば著者らの既報論文³⁾ に示した **Fig. 2** および **Fig. 4** の A-II モード (thickness-twist mode) がこの特殊な場合に対応する) しか表現できないことになる。以上のような意味で、Lee & Nikodem の理論は不完全なものであることが結論づけられる。

参 考 文 献

- 1) 根岸嘉和・平島健一：せん断変形を考慮した一連の平板曲げの理論について，山梨大学工学部研究報告，No. 32，pp. 28~42，1981.
- 2) 平島健一・根岸嘉和：板厚方向の成分を考慮した代表的な2次元化平板理論の精度に関する考察，土木学会論文報告集，No. 330，pp. 1~14，1983.
- 3) 平島健一・根岸嘉和：数種の平板理論の動特性（自由振動と分散特性）に関する研究，土木学会論文報告集，No. 333，pp. 21~34，1983.
- 4) 平島健一・根岸嘉和：幾何学的非線形性を考慮した等質ならびに層状性平板の解析理論，土木学会論文報告集，No. 336，pp. 9~20，1983.
- 5) Lee, P.C.Y. and Z. Nikodem : An approximate theory for high-frequency vibrations of elastic plates, Int. J. Solids Struct., Vol. 8, pp. 581~612, 1972.
- 6) Nikodem, Z. and P.C.Y. Lee : Approximate theory of vibration of crystal plates at high frequencies, Int. J. Solids Struct., Vol. 10, pp. 177~196, 1974.
- 7) Lo, K.H., R.M. Christensen and E.M. Wu : A high-order theory of plate deformation, Part 1 : Homogeneous plates, J. Appl. Mech., pp. 663~668, 1977.
- 8) Lo, K.H., R.M. Christensen and E.M. Wu : A high-order theory of plate deformation, Part 2 : Laminated plates, J. Appl. Mech., pp. 669~676, 1977.
- 9) Pagano, N.J. : Exact solution for composite laminates in cylindrical bending, J. Comp. Mat., Vol. 3, pp. 398~411, 1969.
- 10) Reissner, E. : The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech., pp. A 69~A 77, 1945.
- 11) Reissner, E. and Y. Stavsky : Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates, J. Appl. Mech., pp. 402~408, 1961.
- 12) Bugdayci, N. and D.B. Bogy : A two-dimensional theory for piezoelectric layers used in electro-mechanical transducers, I. Derivations, II. Applications, Int. J. Solids Struct., Vol. 17, pp. 1159~1202, 1981.
- 13) Mindlin, R.D. : Third overtone quartz resonator, Int. J. Solids Struct., Vol. 18, pp. 809~817, 1982.

(1983.6.14・受付)