土木学会論文報告集
第 341 号・1984 年 1 月
【論　　文】

相関のある不規則分布荷重を受けるはりの解析

ANALYSIS OF BEAMS WITH CORRELATED STOCHASTIC DISTRIBUTED LOAD

岡林隆敏*・浦川剛志**・吉田啓三***
By Takatoshi OKABAYASHI, Takeshi URAKAWA and Keizo YOSHIDA

1. はじめに

構造物の安全性を信頼性理論により評価するために，構造物に作用する荷重の調査と，確率論的な観点からの荷重のモデル化が試みられている[1]．このような研究の進展に伴って，変動のある荷重を受ける構造物の応答の，確率論的な評価が重要な課題になっている．著者の1人は，不規則分布荷重を受けるはりの確率論手法による応答の解法を，すでに報告している[2),3)]．前報では，分布荷重を白色雑音過程でモデル化しており，実用的な観点よりむしろ，数理モデルとての解析の可能性を示した．さらに，不規則境界値問題の基本的性質および，解法に伴う困難な点を指摘した．しかし，構造物に作用する実在の荷重は，空間的な相関を有している．ルジャニッイン[4)]は風荷重を空間的に相関のある不規則な静的荷重でモデル化し，このような荷重を受けるはりの解析を行っている．また，松保・白木・高岡[5)]は，渋帯時の車両列を相関のある不規則分布荷重でモデル化し，道路橋の信頼性解析を行った．また，不規則な初期たわみを有する圧縮部材の解析は，以前から注目されている課題[6)~9)]である．この初期たわみは，空間的に相関のある確率過程でモデル化されている．

実在の分布荷重では，確率特性は空間的な自己相関関数または，波数に対するパワースペクトル密度により規定される．ルジャニッイン[4)]は，このような荷重に対するはりの解析を行っている．しかし，この解法は，相関を単純な指数関数で表わした場合に限定したものであり，また解析的な手法である．荷重系を一般的なパワースペクトル密度を有する場合に，構造物系をはり以外のより複雑な構造系に，解析の対象を拡張するためには，数値解析に適した解法を構成する必要がある．

このような観点から，本論文では，任意のパワースペクトル密度を有する不規則分布荷重による，はりの断面力および変形の分散・共分散応答を解析する理論を示した．すなわち，不規則分布荷重を白色雑音過程を入力とする線形微分方程式で記述される荷重系の定常解過程でモデル化する．この荷重系とはりの方程式を合成した系は，伊藤形の確率微分方程式で表現することができる．この方程式より，任意のパワースペクトル密度を有する不規則分布荷重を受けるはりの，断面力と変形の応答の分散・共分散を支配する共分散方程式を誘導することができた．この共分散方程式は，共分散領域で境界値問題になっている．はり系に対しては伝達マトリックス法を適用し，荷重系には初期値問題の処理を行うことにより，共分散方程式を解くことができた．解析例として，2つの異なる荷重モデルに本解法を適用した．第1は分布荷重を自己相関関数が指数関数で表わされる確率過程でモデル化した場合であり，第2はそれが指数・余弦関数で表わされる確率過程でモデル化した場合である．

本論文で　示した解法は，任意のパワースペクトル密度を有する分布荷重に適用できる．また，解法が数値解析に適した算法になっているために，数値解析の手法が有効に利用できる．したがって，構造系として本解法ははりだけでなく，複合した構造物にも適用が可能である．

2. はりの基礎方程式と荷重のモデル化

(1) はりの基礎方程式

Fig. 1 を変断面ばりの要素と考えると，分布荷重 $q(x)$ が作用するはりでは，x 点のたわみ $y(x)$，たわみ角 $\phi(x)$，曲げモーメント $M(x)$，およびせん断力 $Q(x)$ は，次式で表わされる．

* 正会員　工修　長崎大学助手　工学部土木工学科
** 正会員　長崎県庁
*** 学生会員　長崎大学大学院

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}y(x)=\phi(x) \\ &\frac{d}{dx}\phi(x)=-\frac{1}{EI(x)}M(x) \\ &\frac{d}{dx}M(x)=Q(x) \\ &\frac{d}{dx}Q(x)=-q(x) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここに，E：弾性係数，$I(x)$：x 点の断面二次モーメントである．これらの式は，状態ベクトル

$$\boldsymbol{Y}(x)=[y(x)\ \phi(x)\ M(x)\ Q(x)]^T \cdots\cdots\cdots(2)$$

を用いて，次のように表示できる．

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{Y}(x)=\boldsymbol{A_Y}(x)\boldsymbol{Y}(x)+\boldsymbol{F_Y}(x) \cdots\cdots\cdots(3)$$

境界条件：$\boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{Y}_0$, $\boldsymbol{Y}(l)=\boldsymbol{Y}_l$

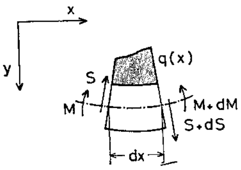


Fig. 1 Forces acting on beam element.

ここに，$\boldsymbol{A_Y}(x)$ は (4×4) 行列，$\boldsymbol{F_Y}(x)$ は4次元ベクトルである．

次に，この系の状態遷移行列について説明する．式(3) の状態遷移行列は，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\boldsymbol{\Phi_Y}(x,\ \lambda_1)=\boldsymbol{A_Y}(x)\boldsymbol{\Phi_Y}(x,\ \lambda_1) \\ &\boldsymbol{\Phi_Y}(\lambda_1,\ \lambda_1)=\boldsymbol{I} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(4)$$

の解で構成される行列である．これは伝達マトリックス法では，格間伝達マトリックスとよばれる．一様断面ばりでは，これは $(\lambda_2-\lambda_1)=\lambda$ の関数となり，次式で表わされる．

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi_Y}(\lambda_2,\ \lambda_1)&=e\boldsymbol{A_Y}^{(\lambda_2-\lambda_1)} \\ &=\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -\lambda^2/2\,EI & -\lambda^3/6\,EI \\ 0 & 1 & -\lambda/EI & -\lambda^2/2\,EI \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(5)$$

次に，応答の確率特性について説明する．不規則分布荷重は，一般性を失うことなく，

$$q(x)=\mathrm{E}[q(x)]+\hat{q}(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

のように，平均値の平均値回りの変動に分離することができる．外力ベクトルも同様に

$$\boldsymbol{F_Y}(x)=\mathrm{E}[\boldsymbol{F_Y}(x)]+\hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{Y}}(x) \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

となる．なお，E[ ] は集合平均の演算子であり，^の記号は平均値回りの変動を表わす．外力が正規確率過程である場合，線形系の応答は正規過程となる．したがって，応答の確率特性は，平均値応答 $\mathrm{E}[\boldsymbol{Y}(x)]$ と共分散応答

$$\boldsymbol{R_Y}(x)=\mathrm{E}[\hat{\boldsymbol{Y}}(x)\ \hat{\boldsymbol{Y}}(x)^T] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

で規定される．ここに，^{T} は転置行列の記号である．平均値応答は，従来の構造力学の問題であるので，平均値回りの変動に着目すると，はりの基礎方程式は，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\hat{\boldsymbol{Y}}(x)=\boldsymbol{A_Y}(x)\hat{\boldsymbol{Y}}(x)+\hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{Y}}(x) \\ &\qquad\qquad(0\le x\le l) \\ &\text{境界条件：}\hat{\boldsymbol{Y}}(0)=\hat{\boldsymbol{Y}}_0,\ \hat{\boldsymbol{Y}}(l)=\hat{\boldsymbol{Y}}_l \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(9)$$

となる．なお，境界条件は正規確率変数である．本論文では，平均値回りの変動のみに着目し，式 (9) の共分散応答を得るための解法を提案する．

(2) 不規則分布荷重の表現

はりに作用する不規則分布荷重 $q(x)$ を，正規定常確率過程 $r(x)$ と分散の空間的変化を示す確定関数 $g(x)$ の積

$$q(x)=g(x)\cdot r(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

で表わされる非定常確率過程でモデル化する．なお，不規則分布荷重を $0\le x\le l$ 区間で定常と考える場合は，$g(x)=1$ となる．

ここでは，定常確率過程 $r(x)$ の表現について述べる．空間的に不規則に分布する荷重がある場合，これらの確率特性は，自己相関関数またはパワースペクトル密度で表わされる．通常，これらの自己相関関数およびパワースペクトル密度は，いくつかのパラメーターを有する簡単な関数で近似的に表現される．さらに，本論文では，自己相関関数およびパワースペクトル密度関数が与えられた場合，このような特性を有する定常確率過程を白色雑音過程を入力とする線形系の定常解過程で実現する．しかし，線形系よりその伝達関数を求める問題に比べて，この問題はそれほど容易ではなく，システム・制御理論[14]では，実現問題とか成形フィルターの問題として取り扱われている．以下に，その一般的な処理の概要を示す．

定常確率過程 $r(x)$ の自己相関関数 $R_r(x)$ またはパワースペクトル密度関数 $S_r(\omega)$ が与えられた場合，以下のような手順で荷重系を決定することができる．Wiener-Khintchine の定理より，次式が得られる．

$$S_r(\omega)=\int_0^\infty R_r(\lambda)e^{-i\omega\lambda}d\lambda+\int_0^\infty R_r(\lambda)e^{i\omega\lambda}d\lambda \cdots\cdots(11)$$

$$=\phi_r(i\omega)+\phi_r(-i\omega) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

なお，i は虚数単位である．ここで，

$$\phi_r(i\omega)=\boldsymbol{L}(i\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A_Z})^{-1}\boldsymbol{B_Z} \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

で表わされる．

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{B_Z}^T\boldsymbol{T_Z} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$\boldsymbol{A_Z}^T\boldsymbol{T_Z}+\boldsymbol{T_Z}\boldsymbol{A_Z}=-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

になる $\boldsymbol{C}$ が存在するならば，この定常確率過程は，状態ベクトル

$$\boldsymbol{Z}(x)=[Z_1(x)\cdots Z_n(x)]^T \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

で表わされる荷重系

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\boldsymbol{Z}(x)=\boldsymbol{A_Z}\boldsymbol{Z}(x)+\boldsymbol{B_Z}w(x)\\&r(x)=\boldsymbol{CZ}(x)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(17)$$

の定常解過程で表わすことができる．ここに，$w(x)$ を平均値 0，パワースペクトル密度 1 で規定される白色雑音過程とする．記述を一般化するために，式 (17) の外力項を

$$\boldsymbol{N_Z}(x)=\boldsymbol{B_Z}w(x)\quad\cdots\cdots(18)$$

で表わす．この $\boldsymbol{N_Z}(x)$ は，次のような確率特性を有する正規白色雑音過程ベクトルである．

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\quad \mathrm{E}[\boldsymbol{N_Z}(x)]=\boldsymbol{0}\\&\text{(ii)}\quad \mathrm{E}[\boldsymbol{N_Z}(x_1)\boldsymbol{N_Z}(x_2)^T]=\boldsymbol{Q_Z}(x_1)\delta(x_1-x_2)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(19)$$

ここに，$\boldsymbol{A_Z}$ および $\boldsymbol{T_Z}$ は $(n\times n)$ 行列，$\boldsymbol{B_Z}$ は n 次元の列ベクトル，$\boldsymbol{L}$ および $\boldsymbol{C}$ は n 次元の行ベクトル，$\boldsymbol{Q_Z}(x)$ は $(n\times n)$ 行列である．さらに，$\delta(x_1-x_2)$ は Dirac のデルタ関数である．計算例を付録 (2) に示した．

本論文では，式 (17) の方程式を荷重系と称し，この定常解過程の $0\leq x\leq l$ 区間を不規則荷重のモデルとして用いる．ここでは，分布荷重のみについて述べたが，モーメント荷重についても同様な取扱いができる．

3. はり-荷重系の方程式と境界条件

(1) はり-荷重系の方程式とその無次元化

はりの状態変数 $\boldsymbol{Y}(x)$ と荷重系の状態変数 $\boldsymbol{Z}(x)$ を合成して，はり-荷重系の状態変数を

$$\boldsymbol{X}(x)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}(x)\\\boldsymbol{Z}(x)\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(20)$$

のように表わす．この変数を用いると式 (3)，(10)，(17) より，はり-荷重系は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\boldsymbol{X}(x)=\boldsymbol{A_X}(x)\boldsymbol{X}(x)+\boldsymbol{N_X}(x)\\&\qquad\qquad(0\leq x\leq l)\\&\text{境界条件：}\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0,\ \boldsymbol{X}(l)=\boldsymbol{X}_l\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(21)$$

で表わすことができる．$\boldsymbol{N_X}(x)$ は正規白色雑音過程ベクトルとなり，その共分散は

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{N_X}(x_1)\boldsymbol{N_X}(x_2)^T]=\boldsymbol{Q_X}(x_1)\delta(x_1-x_2)\quad\cdots\cdots(22)$$

で与えられる．なお，$\boldsymbol{A_X}(x)$ は $(4+n)\times(4+n)$ 行列，さらに $\boldsymbol{Q_X}(x)$ は，

$$\boldsymbol{Q_X}(x)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_{44} & \boldsymbol{O}_{4n}\\\boldsymbol{O}_{n4} & \boldsymbol{Q_Z}(x_1)\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(23)$$

のように分割される．ここに，$\boldsymbol{O}_{kl}$ は $(k\times l)$ の $\boldsymbol{O}$ 行列を表わすものとする．

一方，はり-荷重系の境界条件は，

$$\boldsymbol{X}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_0\\\boldsymbol{Z}_0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}_l=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_l\\\boldsymbol{Z}_l\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(24)$$

のように表わすことができる．さらに，この系の状態遷移行列は，次のように表わされる．

$$\boldsymbol{\Phi_X}(\lambda_2,\lambda_1)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi_Y}(\lambda_2,\lambda_1) & \boldsymbol{\Phi_{YZ}}(\lambda_2,\lambda_1)\\\boldsymbol{O}_{n4} & \boldsymbol{\Phi_Z}(\lambda_2,\lambda_1)\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(25)$$

ここで，$\boldsymbol{\Phi_{YZ}}(\lambda_2,\lambda_1)$ は，荷重系に単位の入力を加えたときの，はりの応答より構成される行列である．

次に，はり-荷重系の方程式を無次元表示する．変数 x を，はりの長さ l で規準化した無次元量 $x'=x/l$ で表わす．はりについては等分布荷重 q を用いると，たわみ，たわみ角，曲げモーメントおよびせん断力は，次のように無次元表示[13]できる．

$$\left.\begin{aligned}&y(x)=y'(x')ql^4/EI,\ \phi(x)=\phi'(x')ql^3/EI\\&M(x)=M'(x')ql^2,\ Q(x)=Q'(x')ql\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(26)$$

さらに，荷重系の変数は

$$Z_k(x)=Z_k'(x')q/l^{(k-1)}\quad\cdots\cdots(27)$$

によって無次元表示できる．また，白色雑音過程については，変数を x で表わしたものと x' で表わしたものの間に，

$$n(x)=n(x')/\sqrt{l}\quad\cdots\cdots(28)$$

の関係がある．したがって式 (18) の $\boldsymbol{N_Z}(x)$ の要素については，

$$n_k(x)=n_k'(x')q/\sqrt{l}\quad\cdots\cdots(29)$$

のように表わすことができる．白色雑音過程 $n(x)$ のパワースペクトル密度は 1 としているので，$n_k(x)$ のパワースペクトル密度 σ^2 は，

$$\sigma^2=l/q^2\quad\cdots\cdots(30)$$

となる．なお，白色雑音過程の座標変換については，付録 (1) で説明した．

(2) 境界条件と境界マトリックス

はりの左端と右端の境界条件 $\boldsymbol{Y}_0$ と $\boldsymbol{Y}_l$ の要素は，

$$\boldsymbol{Y}_0=[y_0\ \phi_0\ M_0\ Q_0]^T\quad\cdots\cdots(31)$$

$$\boldsymbol{Y}_l=[y_l\ \phi_l\ M_l\ Q_l]^T\quad\cdots\cdots(32)$$

で表わされる．他方，荷重系の左端と右端の境界条件は，

$$\boldsymbol{Z}_0=[Z_{01}\cdots Z_{0n}]^T\quad\cdots\cdots(33)$$

$$\boldsymbol{Z}_l=[Z_{l1}\cdots Z_{ln}]^T\quad\cdots\cdots(34)$$

で表わすものとする．

はりの左端では，**Fig. 2** で示される回転支点，固定支点および自由端に対して，それぞれ次のような自由度がある．

$$\begin{bmatrix}\phi_0\\Q_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_0\\Q_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_0\\\phi_0\end{bmatrix}$$

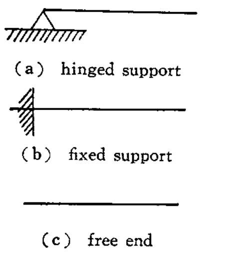


Fig. 2 Left-hand boundary conditions.

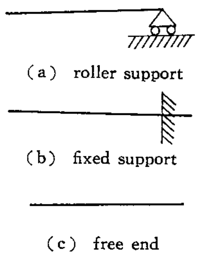


Fig. 3 Right-hand boundary conditions.

これを $\tilde{\boldsymbol{Y}}_0$ で表わすと，左端境界条件は

$$\boldsymbol{Y}_0=\boldsymbol{B}_Y\tilde{\boldsymbol{Y}}_0 \cdots\cdots(35)$$

で表わされる．ここに，$\boldsymbol{B}_Y$ ははりの左端境界マトリックスであり，回転支点，固定支点および自由端に対して，それぞれ

$$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

のようになる．はり-荷重系については，伝達マトリックス法で用いられる境界マトリックスを拡張して，次のような左端境界条件と左端境界マトリックスを定義する．

$$\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{B}_X\tilde{\boldsymbol{X}}_0 \cdots\cdots(36)$$

$$\boldsymbol{X}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_0\\\boldsymbol{Z}_0\end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{X}}_0=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{Y}}_0\\\boldsymbol{Z}_0\end{bmatrix} \cdots\cdots(37)$$

$$\boldsymbol{B}_X=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_Y&\boldsymbol{O}_{4n}\\\boldsymbol{O}_{n2}&\boldsymbol{I}_{nn}\end{bmatrix} \cdots\cdots(38)$$

こに…，$\boldsymbol{I}_{nn}$ は $(n\times n)$ の単位行列である．

はりの右端については，**Fig. 3** に示されるような移動支点，固定支点および自由端について，それぞれ次の変数が 0 となる．

$$\begin{bmatrix}y_l\\M_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_l\\\phi_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_l\\Q_l\end{bmatrix}$$

これらを $\tilde{\boldsymbol{Y}}_l$ で表わすと，右端境界条件の中で 0 となる変数を

$$\boldsymbol{B}_Y'\boldsymbol{Y}_l=\tilde{\boldsymbol{Y}}_l=\boldsymbol{0} \cdots\cdots(39)$$

のように抽出できる．ここに，$\boldsymbol{B}_Y'$ ははりの右端の境界マトリックスであり，移動支点，固定支点および自由端について，それぞれ

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

のようになる．はり-荷重系については，右端境界条件に対応して，次のような右端境界条件と右端境界マトリックスを定義する．

$$\boldsymbol{B}_X'\boldsymbol{X}_l=\tilde{\boldsymbol{X}}_l \cdots\cdots(40)$$

$$\boldsymbol{X}_l=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_l\\\boldsymbol{Z}_l\end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{X}}_l=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_{21}\\\boldsymbol{Z}_l\end{bmatrix} \cdots\cdots(41)$$

$$\boldsymbol{B}_X'=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_Y'&\boldsymbol{O}_{2n}\\\boldsymbol{O}_{4n}&\boldsymbol{I}_{nn}\end{bmatrix} \cdots\cdots(42)$$

4. 不規則応答解析

(1) 共分散方程式

はり-荷重系 $\boldsymbol{X}(x)$ の共分散 $\boldsymbol{R}_X(x)$ は，次のように分割される．

$$\boldsymbol{R}_X(x)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_Y(x)&\boldsymbol{R}_{YZ}(x)\\\boldsymbol{R}_{ZY}(x)&\boldsymbol{R}_Z(x)\end{bmatrix} \cdots\cdots(43)$$

はりの共分散応答 $\boldsymbol{R}_Y(x)$ は，はり-荷重系の共分散応答 $\boldsymbol{R}_X(x)$ の要素として得られる．

はり-荷重系の方程式 (21) 式の解過程は，線形微分方程式の理論より

$$\boldsymbol{X}(x)=\boldsymbol{\Phi}_X(x,\ 0)\boldsymbol{X}_0+\int_0^x\boldsymbol{\Phi}_X(x,\ \lambda)\boldsymbol{N}_X(\lambda)\,d\lambda \quad (0\leq x\leq l) \cdots\cdots(44)$$

となる．共分散の定義と式 (22) の白色雑音過程ベクトルの性質より，$\boldsymbol{X}(x)$ の共分散 $\boldsymbol{R}_X(x)$ は，次式で与えられる[2),3)]．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_X(x)=&\boldsymbol{\Phi}_X(x,\ 0)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Phi}_X(x,\ 0)^T\\&+\boldsymbol{\Phi}_X(x,\ 0)\int_0^x\mathrm{E}[\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{N}_X(\lambda)^T]\boldsymbol{\Phi}_X(x,\ \lambda)^T d\lambda\\&+\int_0^x\boldsymbol{\Phi}_X(x,\ \lambda)\mathrm{E}[\boldsymbol{N}_X(x)\boldsymbol{X}_0{}^T]d\lambda\boldsymbol{\Phi}_X(x,\ 0)^T\\&+\int_0^x\boldsymbol{\Phi}_X(x,\ \lambda)\boldsymbol{Q}_X(\lambda)\boldsymbol{\Phi}_X(x,\ \lambda)^T d\lambda \cdots(45)\end{aligned}$$

この両辺を x で微分すると，次の共分散方程式を得る．

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}\boldsymbol{R}_X(x)=&\boldsymbol{A}_X(x)\boldsymbol{R}_X(x)+\boldsymbol{R}_X(x)\boldsymbol{A}_X{}^T(x)\\&+\boldsymbol{\Phi}_X(x,\ 0)\mathrm{E}[\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{N}_X(x)^T]\\&+\mathrm{E}[\boldsymbol{N}_X(x)\boldsymbol{X}_0{}^T]\boldsymbol{\Phi}_X(x,\ 0)+\boldsymbol{Q}^T{}_X(x)\\&\qquad(0\leq x\leq l)\\\text{境界条件：}&\boldsymbol{R}_X(0)=\boldsymbol{R}_{X_0},\ \boldsymbol{R}_X(l)=\boldsymbol{R}_{X_l}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(46)$$

このように，応答の共分散の解析は，共分散方程式の境界値問題に帰着する．この方程式を解くためには，まず，(1) 初期条件と外力の相関関数，(2) 初期条件の共分散を求める必要がある．

次に荷重系の共分散の取扱いについて述べる．はり-荷重系の方程式 (21) と同じ形をした荷重系の方程式 (17) は，初期値問題となっている．この場合，初期条件と外力が独立

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{Z}_0\boldsymbol{N}_Z(x)^T]=\mathrm{E}[\boldsymbol{N}_Z(x)\boldsymbol{Z}_0{}^T]=\boldsymbol{0} \cdots\cdots(47)$$

となることと，定常解過程を考えていることより，共分散方程式は，

$$\boldsymbol{A}_Z\boldsymbol{R}_Z+\boldsymbol{R}_Z\boldsymbol{A}_Z{}^T+\boldsymbol{Q}_Z=\boldsymbol{0} \cdots\cdots(48)$$

のような連立方程式になる．したがって，$0\leq x\leq l$ の区間において共分散は変化しないので，荷重系の端点の共分散は

$$R_{Z_0}=R_{Z_l}=R_Z \quad\cdots\cdots(49)$$

で与えられる．

（2） 初期条件と外力の相関関数；$\mathrm{E}[X_0 N_X(x)^T]$，$\mathrm{E}[N_X(x)X_0^T]$

式 (44) において，$x=l$ として右辺に $N_X(x)^T$ を掛ける．次に白色雑音過程の性質式 (22) を用いて積分を実行すると，

$$\mathrm{E}[X_l N_X(x)^T]=\Phi_X(l,0)\mathrm{E}[X_0 N_X(x)^T]+\Phi_X(l,x)Q_X(x) \quad\cdots\cdots(50)$$

を得る．左辺より式 (42) の B_X' を掛け式 (36) の関係より，上式は，

$$B_X'\mathrm{E}[X_l N_X(x)^T]=B_X'\Phi_X(l,0)B_X\mathrm{E}[\tilde{X}_0 N_X(x)^T]+B_X'\Phi_X(l,x)Q_X(x) \quad\cdots\cdots(51)$$

となる．ここに，

$$\mathrm{E}[X_l N_X(x)^T]=\begin{bmatrix} O_{44} & \mathrm{E}[Y_l N_Z(x)^T] \\ O_{n4} & \mathrm{E}[Z_l N_Z(x)^T]\end{bmatrix}\cdots(52)$$

であり，また，式 (47) の関係より

$$\mathrm{E}[\tilde{X}_0 N_X(x)^T]=\begin{bmatrix} O_{24} & \mathrm{E}[\tilde{Y}_0 N_Z(x)^T] \\ O_{n4} & O_{nn}\end{bmatrix}\cdots(53)$$

である．これらを用いると，式 (51) の要素より

$$B_Y'\Phi_Y(l,0)B_Y\mathrm{E}[\tilde{Y}_0 N_Z(x)^T]+B_Y'\Phi_{YZ}(l,x)Q_Z(x)=O_{2n} \quad\cdots\cdots(54)$$

の関係を得る．これより $\mathrm{E}[\tilde{Y}_0 N_Z(x)^T]$ が求められる．$\mathrm{E}[X_0 N_X(x)^T]$ は，$B_X\mathrm{E}[\tilde{X}_0 N_X(x)^T]$ より得られる．さらに，$\mathrm{E}[N_X(x)X_0^T]$ は，

$$\mathrm{E}[N_X(x)X_0^T]=\mathrm{E}[X_0 N_X(x)^T]^T \quad\cdots\cdots(55)$$

の関係より決定できる．

（3） 境界条件の共分散；R_0

$x=l$ における応答の共分散は，式 (45) より

$$R_X(l)=\Phi_X(l,0)R_{X_0}\Phi_X(l,0)^T+P(l)\cdots(56)$$

となる．ここに，$P(l)$ は荷重項とよぶもので，境界条件と外力の相関および外力の共分散が応答に寄与する成分を表わしている．共分散方程式で説明すると，これは初期条件 $R_0=0$ としたときの解である．

式 (56) の左辺より B_X'，右辺より $B_X'^T$ を掛け，式 (36) により X_0 を表わすと，

$$B_X'R_{X_l}B_X'^T=B_X'\Phi_X(l,0)B_X\tilde{R}X_0B_X^T\Phi_X(l,0)^TB_X'^T+B_X'P_X(l)B_X'^T \quad\cdots\cdots(57)$$

となる．ここで，$\tilde{R}_{X_0}$ は $\tilde{X}_0$ の共分散であり，次のように分割できる．

$$\tilde{R}_{X_0}=\begin{bmatrix}\tilde{R}_{Y_0} & \tilde{R}_{YZ_0} \\ \tilde{R}_{ZY_0} & R_{Z_0}\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(58)$$

また，荷重項 $P_X(l)$ も，次のように分割できる．

$$P_X(l)=\begin{bmatrix}P_Y(l) & P_{YZ}(l) \\ P_{ZY}(l) & P_Z(l)\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(59)$$

なお，$\tilde{R}_{X_0}$ と $P_X(l)$ は対称行列である．また，式 (42) の関係より

$$B_X'R_{X_l}B_X'^T=\begin{bmatrix}O_{22} & O_{2n} \\ O_{n2} & R_Z\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(60)$$

となる．ここで，R_Z は式 (48) より得られる既知の量である．これらの行列を用いると，式 (57) は $\tilde{R}_{Y_0}$ と $\tilde{R}_{ZY_0}$ の連立方程式となる．

$$A_1\tilde{R}_{Y_0}A_1^T+A_2\tilde{R}_{ZY_0}A_1^T+A_1\tilde{R}_{YZ_0}A_2^T+A_2R_{Z_0}A_2^T+B_YP_Y(l)B_Y'=O_{22}\quad\cdots\cdots(61)$$

$$\Phi_Z(l,0)\tilde{R}_{ZY_0}A_1^T+\Phi_Z(l,0)R_{Z_0}A_2^T+P_{ZY}(l)B_Y'^T=O_{n2}\cdots(62)$$

ここに，A_1 と A_2 は次の行列を表わしている．

$$A_1=B_Y'\Phi_Y(l,0)B_Y,\quad A_2=B_Y'\Phi_{YZ}(l,0)$$

$\tilde{R}_{Y_0}$ $\tilde{R}_{ZY_0}$ とが得られると，境界条件の共分散 R_0 は，

$$R_0=\begin{bmatrix}B_Y\tilde{R}_{Y_0}B_Y^T & B_Y\tilde{R}_{YZ_0} \\ \tilde{R}_{ZY_0}B_Y^T & R_Z\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(63)$$

により構成できる．

5．数値解析

（1） 不規則分布荷重の解析モデル

数値解析例は，自己相関関数が指数関数あるいは指数・余弦関数で表わされる確率過程でモデル化された，定常な不規則分布荷重を受ける単純ばりである．この節では，それぞれの荷重モデルについて，荷重系の方程式，荷重系の状態遷移行列および端点の条件を示す．

a） 自己相関関数が指数関数で表わされる確率過程による荷重のモデル化

自己相関関数とパワースペクトル密度関数は，

$$R_r(\lambda)=\sigma^2e^{-\Omega|\lambda|}\quad\cdots\cdots(64)$$

$$S_r(\omega)=\frac{2\,\Omega\sigma^2}{\Omega^2+\omega^2}\quad\cdots\cdots(65)$$

で表わされる．対応する荷重系の方程式は，

$$\frac{d}{dx}Z(x)=-\Omega Z(x)+\sigma n(x)\quad\cdots\cdots(66)$$

$$r(x)=\sqrt{2\,\Omega}\,Z(x)$$

で与えられる．この系の状態遷移行列は，

$$\Phi_Z(\lambda_2,\lambda_1)=e^{-\Omega|\lambda_2-\lambda_1|}\quad\cdots\cdots(67)$$

となる．さらに共分散方程式の定常解は，式 (48) より

$$R_Z=\sigma^2/2\,\Omega\quad\cdots\cdots(68)$$

を得る．

b) 自己相関関数が指数・余弦関数で表わされる確率過程による荷重のモデル化

自己相関関数が，

$$R_r(\lambda)=\sigma^2 e^{-\beta|\lambda|}\cos\Omega\lambda \quad\cdots\cdots(69)$$

で与えられる場合を考える．このパワースペクトル密度関数は，

$$S_r(\omega)=\frac{2\beta(\Omega^2+\beta^2+\omega^2)\sigma^2}{(\Omega^2+\beta^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2} \quad\cdots\cdots(70)$$

となる．対応する荷重系の方程式は，式 (17), (18) において

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{Z}(x)=[Z_1(x)Z_2(x)]^T\\ &\boldsymbol{A_Z}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -(\Omega^2+\beta^2) & -2\beta\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B_Z}=\begin{bmatrix}0\\ \sigma\end{bmatrix}\\ &\boldsymbol{C}=[\sqrt{2\beta}\ \sqrt{\Omega^2+\beta^2}\quad \sqrt{2\beta}\,] \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(71)$$

としたものである．この系の $\boldsymbol{Z}(x)$ に関する状態遷移行列は，

$$\boldsymbol{\Phi_Z}(\lambda_2,\lambda_1)$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-\beta(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\cos\Omega(\lambda_2-\lambda_1)+\dfrac{\beta}{\Omega}\sin\Omega(\lambda_2-\lambda_1)\right] & \dfrac{1}{\Omega}e^{-\beta(\lambda_2-\lambda_1)}\sin\Omega(\lambda_2-\lambda_1)\\ -\dfrac{\Omega^2+\beta^2}{\Omega}e^{-\beta(\lambda_2-\lambda_1)}\sin\Omega(\lambda_2-\lambda_1) & e^{-\beta(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\cos\Omega(\lambda_2-\lambda_1)-\dfrac{\beta}{\Omega}\sin\Omega(\lambda_2-\lambda_1)\right] \end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(72)$$

で与えられる．また，$\boldsymbol{Z}(x)$ の共分散応答は，式 (48) より

$$\boldsymbol{R_Z}=\begin{bmatrix}\sigma^2/4\beta(\Omega^2+\beta^2) & 0\\ 0 & \sigma^2/4\beta\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(73)$$

となる．

次に，この荷重モデルについて解析を行った結果を示す．数値解析において，方程式は無次元化し，荷重強度については，

$$\sigma^2 l/q^2=1 \quad\cdots\cdots(74)$$

とした．

(2) 指数関数形の自己相関関数を有する荷重モデルによる応答

荷重系の特性は，パラメーター $k=\Omega/2\pi l$ により規定される，k は，パワースペクトル密度 $S_r(\omega)$ を $S_r(0)$ のときの値の 1/2 に減少させる波数である．これは相関関数の観点からみると，空間的な相関の程度を表わすパラメーターである．図—**4** に，k=0.1, 1.0 および 3.0 における，荷重系の相関関数 $R_r(\lambda)$ を示した．図—**5** は，この荷重に対する，たわみ，たわみ角，曲げモーメントおよびせん断力の応答の標準偏差を示したものである．横軸ははりの長さであり，縦軸は，それぞれの応答を等分布荷重 q による応答の最大値で規準化したものである．$k\to 0$ では，等分布荷重の荷重強度が不規則な等分布荷重に漸近する．応答の最大値は 1 に近づく．またせん断力は，はりの中点では 0 になるような応答の形状に漸近する．一方，$k\to\infty$ とすると，不規則分布荷重は白色雑音過程に漸近する．しかし，本論文の荷重モデルは，式 (64) のように，k の変化に関係なくパワーを一定 σ^2 としているので，この荷重のパワースペクトル密度のレベルは低下する．したがって，k の増加に伴って応答の形状は白色雑音過程の荷重による応答に漸近するが，応答の値は減少することになる．前報[2] の白色雑音過程による応答を得るためには，k の変化に対して荷重のパワースペクトル密度のレベルを一定に保つような，$(\Omega/2)R_r(\tau)$ で表わされる自己相関関数を有する荷重モデルを考えればよい．

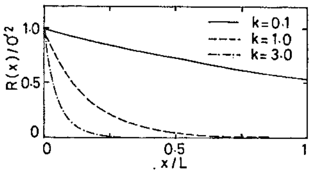
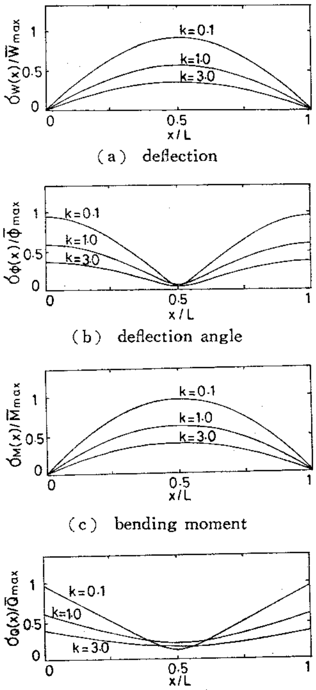


Fig. 4 Autocorrelation functions of band-limited processes.



(a) deflection

(b) deflection angle

(c) bending moment

(d) shearing force

Fig. 5 Standard deviation of responses to band-limited processes.

次に，せん断力の変化について説明する．$k\to 0$ の不規則な等分布荷重によるせん断力応答のサンプル関数は，はりの中点で 0 となり，その傾きが変化するだけである．k の増加に伴って，応答のサンプル関数は中点で 0 となるとは限らなくなる．この結果応答の標準偏差は図のような傾向を示す．

(3) 指数・余弦形の自己相関関数を有する荷重モデルによる応答

荷重の特性は，2 つのパラメーター $k=\Omega/2\pi l$ と $h=\beta/2\pi l$ により規定される．k は，不規則分布荷重のパワースペクトル密度関数の中心周波数を表わすパラメータ

ーであり，h は，パワースペクトル密度の幅に関係するパラメーターである．このとき，k の値は前節の自己相関関数が指数関数形の確率過程の場合と同じく，パワースペクトル密度関数の遮断周波数の目安を示す．自己相関関数の観点からみた場合，k は自己相関関数の変動の周期を，h はその減衰を表わすパラメーターである．

Fig. 6 は，$h=0.1$ と固定し，$k=0.1$, 1.0 および 3.0 と変化させたときの自己相関関数を示したものである．**Fig. 7** は，自己相関関数において，$h=0.1$ を固定し，$k=0.1$, 0.6, 1.0 および 3.0 と変化させたときのそれぞれの応答を図示したものである．縦軸と横軸は，前節の図と同じ表現である．前節の荷重モデルと同じく，$k\to 0$ では，応答は荷重強度が不規則に変化する等分布荷重の応答に漸近し，また $k\to\infty$ では，白色雑音過程による応答に漸近する．$k>1.0$ における応答は，前節の k の値による応答の傾向に対して，k の増加に伴って急激に減少する．これは次のような理由による．不規則分布荷重のパワースペクトルは，この荷重モデルの場合，波数が k の近傍でピークになる．k が増加すると，はりの変形に寄与する不規則荷重のパワーの ω の小さい成分は，自己相関関数が指数形の確率過程の場合よりさらに減少するためである．

Fig. 8 は，$k=0.1$ で固定し，$h=0.05$, 0.1 および 0.5 と変化させた自己相関関数を示したものである．また，**Fig. 9** は，対応するそれぞれの応答を図示したものである．応答の傾向としては，h を大きくすると，不規則荷重のパワースペクトルのピークが低くなり，ピーク近傍に集中していたパワーが，低い周波数成分のパワーも取り込むようになる．このために，応答は，若干全体的に増加する．しかし，著しい変化は認められない．

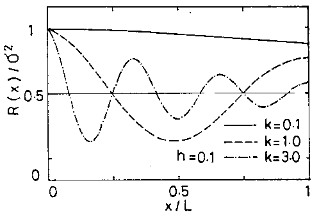


Fig. 6 Autocorrelation functions of narrow-band processes, $h=0.1$.

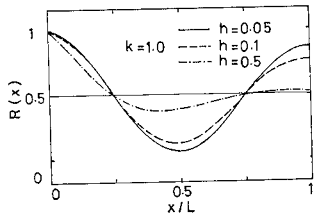
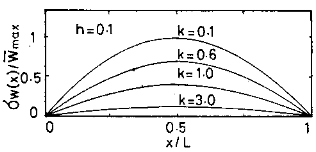
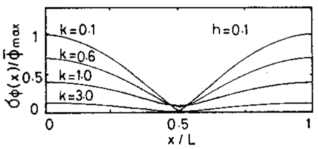


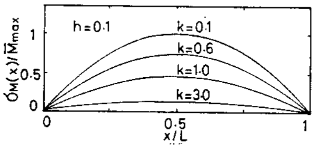
Fig. 8 Autocorrelation functions of narrow-band processes, $k=1.0$.



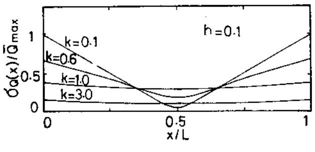
(a) deflection



(b) deflection angle

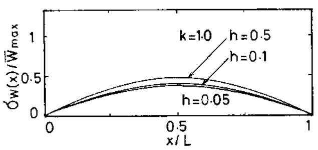


(c) bending moment

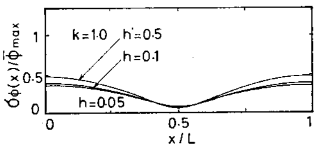


(d) shearing force

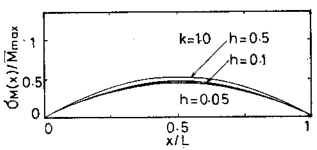
Fig. 7 Standard deviation of responses to narrow-band processes, $h=0.1$.



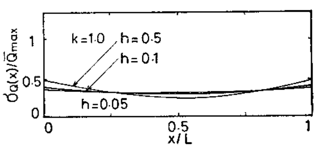
(a) deflection



(b) deflection angle



(c) bending moment



(d) shearing force

Fig. 9 Standard deviation of responses to narrow-band processes, $k=1.0$.

6. おわりに

はりの任意のパワースペクトル密度を有する不規則な分布荷重が作用した場合，はりの断面力および変形の分散・共分散応答を得るための解析手法を提案した．さらに，本解法を，自己相関関数が指数関数および指数・余弦関数で表わされる確率過程でモデル化した荷重の問題に適用し，本解法の有効性を確認した．本論文で得られた結果は，次のように要約することができる．

不規則分布荷重のパワースペクトル密度関数が有理関数で表現できる場合，この荷重は，白色雑音過程を入力とする一種のフィルターである荷重系の定常解過程でモデル化することができる．この荷重系とはりの方程式を合成することにより，このような不規則分布荷重を受けるはりの断面力および変形の挙動を，伊藤形の確率微分方程式で表現することができた．この方程式を基礎に，はりの応答の分散・共分散を支配する共分散方程式を誘導した．

また，この共分散方程式は，共分散領域における境界値問題になっている．この共分散方程式の解析法を提案した．は

り系には伝達マトリックス法の理論を拡張して適用し，また荷重系には初期値問題としての処理を行うことにより，この方程式を解くことができた．本解法は，数値解析に適した算法を基礎にしており，数値計算の手法が有効に利用できる利点がある．

本解法を2つの荷重モデルのはりの解析に適用した．第1は自己相関関数が指数関数形の確率過程でモデル化された場合であり，第2はそれが指数・余弦関数形の確率過程の場合である．数値解析では，荷重の空間的相関に関係するパラメーターと，はりの断面力および変形の分散応答の関係についていくつかの知見を得た．

最後に，本研究にあたり有益な助言をいただいた，広島大学 花井正実教授および三菱重工長崎研究所 入江良彦氏に深甚の謝意を表します．

なお，本研究の計算には，本学情報処理センター計算機（FACOM M 180-2/40）を使用したことを付記する．

【付録 1】 白色雑音過程の座標変換[11)]

Wiener 過程を考える．この微小増分の分散は次式で与えられる．

$$\mathrm{E}[dw(x)^2]=dx \qquad \text{(A・1)}$$

座標を $x'=x/l$ とした場合，x' に対する Wiener 過程の分散は，

$$\mathrm{E}[dw(x')^2]=dx' \qquad \text{(A・2)}$$

となる．したがって

$$w(x)=\sqrt{l}\,w(x') \qquad \text{(A・3)}$$

の関係が得られる．白色雑音過程は形式的に

$$n(x)=\frac{dw(x)}{dx} \qquad \text{(A・4)}$$

で表わすことができるので，x から x' に変換することにより，

$$n(x)=n(x')/\sqrt{l} \qquad \text{(A・5)}$$

を得る．

【付録 2】 定常確率過程の実現

式 (69) の自己相関関数について考える．式 (11) より

$$\phi_r(i\omega)=\frac{\beta+i\omega}{(\beta+i\omega)^2+\Omega^2}\sigma^2 \qquad \text{(B・1)}$$

となる．式 (13) により $\phi_r(i\omega)$ は，次のマトリックスを用いて表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned} A_Z&=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\beta^2+\Omega^2) & -2\beta \end{bmatrix} \\ B_Z&=\begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \end{bmatrix},\ L^T=\begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix}\sigma \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B・2)}$$

式 (14),(15) の $\boldsymbol{T_Z}$ と $\boldsymbol{C}$ の要素を

$$\boldsymbol{T_Z}=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(B・3)}$$

のように表わす．式 (14) より

$$P_{21}=P_{12}=\beta,\ P_{22}=1$$

を得る．さらに，これを式 (15) に代入すると，式 (15) より

$$C_1{}^2=2(\beta^2+\Omega^2)P_{12}=2\beta(\beta^2+\Omega^2)$$

$$C_2{}^2=-2(P_{12}-2\beta P_{22})=2\beta$$

を得る．したがって，行列 $\boldsymbol{C}$ は

$$\boldsymbol{C}=[\sqrt{2\beta}(\beta^2+\Omega^2)\quad \sqrt{2\beta} \qquad \text{(B・4)}$$

となる．

参 考 文 献

1) 土木学会編：構造物の安全性・信頼性，土木学会，1976年．
2) 岡林隆敏：不規則な分布荷重を受けるはりの解析，土木学会論文報告集，第316号，pp. 11～21, 1981年12月．
3) 高岡・白木・松保：“不規則な分布荷重を受けるはりの解析”への討議，土木学会論文報告集，第327号，pp. 167～172, 1982年11月．
4) ルジャニッツイン 著・高岡宣善 訳：構造物の信頼性解析，丸善，1980年12月．
5) 松保・白木・高岡：不規則関数論に基づく道路橋の信頼性解析，土木学会第36回年次学術講演会一般講演概要集，pp. 638～639, 1981年10月．
6) Fraser, W.B. and B. Budiansky : The Buckling of a Column With Random Initial Deflections, Trans. ASME, Jour. Appl. Mech., Vol. 36, pp. 232～240, June, 1969.
7) Jacquot, R.G. : Nonstationary Random Column Buckling Problem, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 98, No. EM 5, pp. 1173～1182, Oct., 1972.
8) Elishakoff, I. : Buckling of a Stochastically Imperfec Finite Column on a Nonlinear Elastic Foundation, Trans. ASME, Jour. Appl. Mech., Vol. 46, pp. 411～416, June, 1979.
9) 白木・高岡：非定常不規則な初期たわみを有する圧縮部材の信頼性解析，土木学会論文報告集，第297号，pp. 37～46, 1980年5月．
10) 伊藤 清：確率論，岩波書店，1969年．
11) Arnold, L. : Stochastic Differential Equations, John Wiley & Sons, 1974年．
12) Pestel, E.C. and F.A. Leckie : Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, 1963.
13) 成岡・遠田：伝達マトリックス法（コンピュータによる構造工学講座），培風館，1970年．
14) たとえば，古田勝久：線形システムの観測と同定，コロナ社，pp. 135～139, 1972年，木村英紀：動的シスムテの理論，産業図書，pp. 201～208, 1974年，有本 卓：カルマンフィルター，産業図書，pp. 156～158, 1977年．

（1983.6.13・受付）