土木学会論文報告集
第341号・1984年1月
【論　文】

斜板の曲げおよび振動解析へのSpline帯板法の適用について

APPLICATION OF SPLINE STRIP METHOD TO ANALYSE BENDING AND VIBRATION OF SKEW PLATES

水澤富作*・梶田建夫**
By Tomisaku MIZUSAWA and Tateo KAJITA

1. まえがき

Finite Strip Method[1),2)]がY.K. Cheungらにより提案されてから久しいが，その後種々の改良[3)~10)]や応用が行われて現在では構造解析手法の一つとしてほぼ確立されたものとなっている．しかし，適用する問題によっては，解析精度とか経済性などについて検討すべき点が多く残っているように思われる．たとえば，弾塑性解析とか，ここで取り上げる斜板のような問題である．これらの問題はFinite Strip Methodの大きな特徴である級数の直交性が利用できなくなるという点から，Finite Strip Methodを適用することの利点が少なくなる．しかし，次元数を一つ下げることができるという点ではその有用性が残されていると思われる．

斜板の曲げ解析へのFinite Strip Methodの適用を行ったBrownら[11)]，Mukhopadhyay[12)]，Thangam Babuら[13),15)]，Srinivasanら[14)]の研究があるが，解析精度を高めるために，多くの帯板分割と級数項を取ると，未知数が多くなってしまうことより，あまり精度のよい結果が得られていない．

著者らは[16)~18)]，高次の連続性と補間特性をもつB-Spline関数を区分的領域の基底関数として用いた離散化手法(Spline要素法)により，斜板に関する一連の研究を行ってきた．このB-Spline関数は数値解析において数値安定性がよく，条件の悪い問題にも容易に適用できるものである．

Finite Strip Methodでは，帯板の長手方向の基底関数に，はりの固有関数を仮定し，その横方向にはHermite多項式が用いられ，またその基本的な概念はRayleigh-Ritz法と同じと考えられる．したがって，仮定される座標関数の性質により，種々の帯板モデルが定式化できる．

最近，Cheungら[4)]は，B-Spline関数を用いたSpline有限帯板法(Spline Finite Strip Method)を提案し，長方形板や箱桁の曲げ解析に適用している．CheungらのSpline有限帯板法では，帯板の長手方向の基底関数に3次のB-Spline関数を仮定し，またその横方向には，従来のFinite Strip Methodと同じように3次のHermite多項式を用いている．この帯板要素では，長手方向にB-Spline関数を用いるので，帯板の節線上に区分点を取らねばならず，一般にこの区分点の数を多くとると，未知数も増大してくることになる．

本論文では，B-Spline関数とFourier級数を用いたSpline帯板法について提案する．この帯板要素では，長手方向には，従来のFinite Strip Methodと同じようにはりの固有関数を仮定しているが，横方向の基底関数にB-Spline関数を用いる．本手法は基本的にはRayleigh-Ritz法の一手法であるが，帯板の基底関数として区分的多項式を用いているので，従来のFinite Strip Methodと同様な帯板の概念も含まれている．また，本Spline帯板法では，未知パラメーターとして，従来のFinite Strip Methodのような節線での変位パラメーターを用いるのではなく，帯板要素内で仮定されるB-Spline関数の係数パラメーターが用いられる．この帯板でのSpline次数は任意に変化させられる．

ここでは，斜板の曲げおよび自由振動解析へのSpline帯板法の適用について述べ，また本法の数値安定性，精度および有用性について，従来のFinite Strip Methodや他の数値解析法との比較検討を行っている．

2. Spline帯板法による定式化

斜板の離散化要素として，**Fig. 1**に示すような斜帯板要素を考える．この帯板要素の座標関数として，y軸方向には，はりの固有関数$Y_m(y)$を仮定し，また，x

* 正会員　工博　大同工業大学講師　工学部建設工学科
** 正会員　工博　名古屋大学助教授　工学部土木工学科

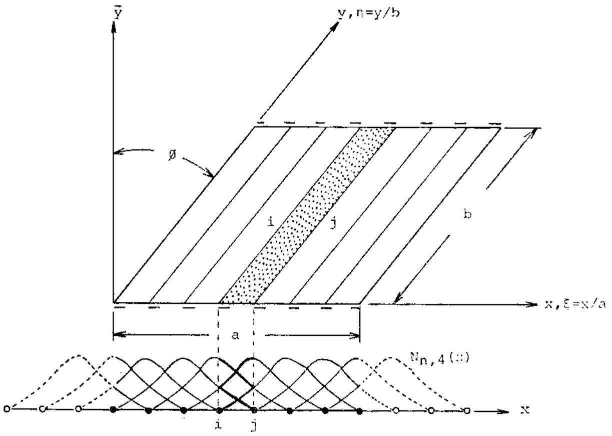


Fig. 1 Spline strip idealization for skew plate.

軸方向に，Spline 関数 $S(x)$ を用いる．したがって，この帯板要素の変位関数 W は，次式で与えられる．

$$W=\sum_{m=1}^{r}S(x)Y_m(y) \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで，Spline 関数は，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{i_x}C_nN_{n,k}(x),\ i_x=k+M_x-1 \quad \cdots\cdots(2)$$

で定義され，$N_{n,k}(x)$ は正規化された B-Spline 関数，$k-1$ は B-Spline 関数の次数，M_x は帯板要素の数，また C_n は B-Spline 関数の係数パラメーターである．B-Spline 関数の表現およびその代数学的特性については，著者らの論文[16)]に示しているので省略する．

したがって，式 (2) を式 (1) に代入すると，変位関数は，

$$W=\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{i_x}C_{nm}N_{n,k}(x)Y_m(y) \quad \cdots\cdots(3)$$

で表わされる．ここで，はりの固有関数 $Y_m(y)$ は，次のように示される．

$$Y_m(y)=A_1\sin(\mu_m y/b)+A_2\cos(\mu_m y/b)+A_3\sinh(\mu_m y/b)+A_4\cosh(\mu_m y/b) \quad \cdots\cdots(4)$$

r は級数の項数であり，μ_m はパラメーターを示す．また A_1, A_2, A_3, A_4 は与えられた境界条件を満たすように決定される．

さらに，式 (3) を書きかえると，次のようにも表わされる．

$$W=\sum_{m=1}^{r}[\Phi]Y_m\{\delta\}_m \quad \cdots\cdots(5)$$

ここで，

$$[\Phi]=[N_{1,k}(x),\ N_{2,k}(x),\ \cdots,\ N_{i_x,k}(x)] \quad \cdots(6)$$

$$\{\delta\}_m{}^T=\{C_{1m},\ C_{2m},\ C_{3m},\ \cdots,\ C_{i_xm}\} \quad \cdots\cdots(7)$$

である．

$[Z]_m=[\Phi]Y_m(y)$ とおけば，

$$W=\sum_{m=1}^{r}[Z]_m\{\delta\}_m=[Z]\{\delta\} \quad \cdots\cdots(8)$$

が得られる．

帯板要素 i, j で仮定される B-Spline 関数が **Fig. 1** に示されているが，従来の Finite Strip Method と異なり，節線変位パラメーターの代わりに，Spline 帯板法では，この帯板要素内で定義される基底関数の係数パラメーターを未知数にとることになる．

次に，等方性斜板のひずみ $\{\bar{\varepsilon}\}$ は，座標変換を行うことにより，次式で表わされる．すなわち，

$$\{\bar{\varepsilon}\}=\begin{Bmatrix}-\partial^2W/\partial\bar{x}^2\\-\partial^2W/\partial\bar{y}^2\\2\,\partial^2W/\partial\bar{x}\partial\bar{y}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\tan^2\phi&\sec^2\phi&\tan\phi\sec\phi\\2\tan\phi&0&\sec\phi\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}-\partial^2W/\partial x^2\\-\partial^2W/\partial y^2\\2\,\partial^2W/\partial x\partial y\end{Bmatrix}$$

$$=[H]\{\varepsilon\}=\sum_{m=1}^{r}[H][B]_m\{\delta\}_m \quad \cdots\cdots(9)$$

ここで，$\bar{x}-\bar{y}$ は直交座標系を，また $x-y$ は斜交座標系を示す．ϕ は斜角であり，$[B]_m$ はひずみマトリックスであり，次式で与えられる．

$$[B]_m=\begin{bmatrix}-(\partial^2[\Phi]/\partial x^2)Y_m\\-[\Phi](\partial^2Y_m/\partial y^2)\\2(\partial[\Phi]/\partial x)(\partial Y_m/\partial y)\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(10)$$

応力 $\{\bar{\sigma}\}$ とひずみ $\{\bar{\varepsilon}\}$ との関係式は，次式で表わされる．

$$\{\bar{\sigma}\}=\begin{Bmatrix}M_{\bar{x}}\\M_{\bar{y}}\\M_{\bar{x}\bar{y}}\end{Bmatrix}=[D]\{\bar{\varepsilon}\}=[D]\sum_{m=1}^{r}[H][B]_m\{\delta\}_m \quad \cdots\cdots(11)$$

ここで，$[D]$ は弾性マトリックスであり，等方性板の場合には，次のようになる．

$$[D]=D\begin{bmatrix}1&\nu&0\\\nu&1&0\\0&0&\frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(12)$$

$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ は板の曲げ剛性であり，また ν はポアソン比，h は板厚，E はヤング係数である．

したがって，等方性斜板のひずみエネルギー U_p，運動エネルギー T および等分布荷重による外力ポテンシャル V は，それぞれ無次元化された斜交座標系 ($\xi-\eta$) で，次のように表わされる．すなわち，ひずみエネルギーは，

$$U_p=(1/2)\{\delta\}^T\int_0^a\int_0^b[B]^T[H]^T[D][H][B]dxdy\{\delta\}$$

$$=(D/2)(b/a^3)\sec^3\phi\int_0^1\int_0^1[(\partial^2W/\partial\xi^2$$

$$-2\lambda\sin\phi\,\partial^2W/\partial\xi\partial\eta+\lambda^2\partial^2W/\partial\eta^2)^2$$
$$-2(1-\nu)\cos^2\phi\,\lambda^2\{(\partial^2W/\partial\xi^2)(\partial^2W/\partial\eta^2)$$
$$-(\partial^2W/\partial\xi\partial\eta)^2\}]d\xi d\eta$$
$$=(1/2)\{\delta\}^T[K]\{\delta\}\cdots\cdots(13)$$

で示される．ここで，$\lambda=a/b$，$\xi=x/a$，$\eta=y/b$，また $[K]$ は剛性マトリックスである．

運動エネルギーは，

$$T=(\rho h/2)\omega^2\{\delta\}^T\int_0^a\int_0^b[Z]^T[Z]dxdy\{\delta\}$$
$$=(1/2)\rho hab\omega^2\cos\phi\int_0^1\int_0^1W^2d\xi d\eta$$
$$=(1/2)\omega^2\{\delta\}^T[M]\{\delta\}\cdots\cdots(14)$$

で与えられる．ただし，ρ は密度，h は板厚，ω は円振動数 (rad/s)，また $[M]$ は質量マトリックスである．

また，外力ポテンシャルは，次のように示される．

$$V=(1/2)\{\delta\}^T\int_0^a\int_0^b[Z]^Tq\,dxdy$$
$$=(1/2)ab\cos\phi\int_0^1\int_0^1q\cdot Wd\xi d\eta$$
$$=(1/2)\{\delta\}^T\{F\}\cdots\cdots(15)$$

ここで，q は等分布荷重強度，$\{F\}$ は外力ベクトルを示す．

式 (1) で定義した変位関数において，Spline 関数 $S(x)$ は与えられた境界条件を満たさない任意の関数であるので，一般的な境界条件の取り扱いを考慮して，先に著者らが斜板の解析で適用した仮想ばね法[16]を用いる．すなわち，与えられた幾何学的境界条件に対応する仮想のばねを導入し，たわみ W と回転角 $\partial W/\partial x$ に相当するばねの定数をそれぞれ α，β とする．

この仮想のばねによるひずみエネルギー U_b は，次式で与えられる．

$$U_b=(b/2)\left[\int_0^1\{\alpha W^2+(\beta/a^2)(\partial W/\partial\xi)^2\}d\eta|_{\xi=0}+\int_0^1\{\alpha W^2+(\beta/a^2)(\partial W/\partial\xi)^2\}d\eta|_{\xi=1}\right]\cdots\cdots(16)$$

変位関数を次のように仮定すれば，

$$\left.\begin{aligned}W_{mn}&=\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{i_x}C_{nm}N_{n,k}(\xi)Y_m(\eta)\\W_{sd}&=\sum_{s=1}^{r}\sum_{d=1}^{i_x}C_{ds}N_{d,k}(\xi)Y_s(\eta)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(17)$$

これらを式 (13)，(14)，(15)，(16) に代入すると，斜板の全ひずみエネルギー U は，

$$U=U_p+U_b$$
$$=(D/2)(b/a^3)\sec^3\phi\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{i_x}\sum_{s=1}^{r}\sum_{d=1}^{i_x}C_{nm}C_{ds}[I_{nd}^{22}J_{ms}^{00}$$
$$+\lambda^4I_{nd}^{00}J_{ms}^{22}-2\lambda\sin\phi\{I_{nd}^{12}J_{ms}^{10}+I_{nd}^{21}J_{ms}^{01}$$
$$+\lambda^2(I_{nd}^{01}J_{ms}^{21}+I_{nd}^{10}J_{ms}^{12})\}+\lambda^2(\sin^2\phi$$
$$+\nu\cos^2\phi)(I_{nd}^{02}J_{ms}^{20}+I_{nd}^{20}J_{ms}^{02})$$
$$+2\lambda^2(1+\sin^2\phi-\nu\cos^2\phi)I_{nd}^{11}J_{ms}^{11}]$$
$$+(b/2)\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{i_x}\sum_{s=1}^{r}\sum_{d=1}^{i_x}C_{nm}C_{ds}[\{\alpha N_{nd}^{00}J_{ms}^{00}$$
$$+(\beta/a^2)N_{nd}^{11}J_{ms}^{00}\}|_{\xi=0}$$
$$+\{\alpha N_{nd}^{00}J_{ms}^{00}+(\beta/a^2)N_{nd}^{11}J_{ms}^{00}\}|_{\xi=1}]\cdots\cdots(18)$$

で表わされ，また T，V も次のように示される．

$$T=(1/2)\rho h\omega^2ab\cos\phi\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{i_x}\sum_{s=1}^{r}\sum_{d=1}^{i_x}\cdot C_{nm}C_{ds}I_{nd}^{00}J_{ms}^{00}\cdots\cdots(19)$$

$$V=(1/2)abq\cos\phi\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{i_x}L_n^0\cdot H_m^0\cdots\cdots(20)$$

ただし，定積分 I_{nd}^{pq}，J_{ms}^{pq}，L_n^p，H_m^q は，偏微分の階数を p，q とすると，

$$\left.\begin{aligned}I_{nd}^{pq}&=\int_0^1N_{n,k}^{(p)}(\xi)\cdot N_{d,k}^{(q)}(\xi)d\xi\\J_{ms}^{pq}&=\int_0^1Y_m^{(p)}(\eta)\cdot Y_s^{(q)}(\eta)d\eta\\L_n^p&=\int_0^1N_{n,k}^{(p)}(\xi)d\xi\\H_m^p&=\int_0^1Y_m^{(p)}(\eta)d\eta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(21)$$

で定義される．また，N_{nd}^{pq} は，

$$N_{nd}^{pq}=N_{n,k}^{(p)}(\xi)\cdot N_{d,k}^{(q)}(\xi)\cdots\cdots(22)$$

である．

したがって，斜板の自由振動問題における全ポテンシャルエネルギー Π は，次式で与えられる．

$$\Pi=U+U_b-T\cdots\cdots(23)$$

エネルギー変分法を用いて，式 (23) を極値化すると，次の関係式が得られ，

$$\partial\Pi/\partial\{\delta\}=\partial(U+U_b-T)/\partial\{\delta\}=0\cdots\cdots(24)$$

これをマトリックス表示すると，

$$[K]\{\delta\}-\mu^2[M]\{\delta\}=0\cdots\cdots(25)$$

で与えられる．ここで，$\mu=\frac{\omega a^2}{\pi^2}\sqrt{\rho h/D}$ は振動数パラメーターである．また，式 (18)，(19) より得られる剛性マトリックス $[K]$ と質量マトリックス $[M]$ は，それぞれ次のように表わされる．

$$[K]=\begin{bmatrix}[K]_{11}&[K]_{12}&\cdots&[K]_{1r}\\[K]_{21}&[K]_{22}&\cdots&[K]_{2r}\\\vdots&&&\vdots\\[K]_{r1}&[K]_{r2}&\cdots&[K]_{rr}\end{bmatrix}\cdots\cdots(26)$$

$$[M]=\begin{bmatrix}[M]_{11}&[M]_{12}&\cdots&[M]_{1r}\\[M]_{21}&[M]_{22}&\cdots&[M]_{2r}\\\vdots&&&\vdots\\[M]_{r1}&[M]_{r2}&\cdots&[M]_{rr}\end{bmatrix}\cdots\cdots(27)$$

サブマトリックス $[K]_{ij}$，$[M]_{ij}$ の次数は，$k+M_x-1$ で与えられるので，$[K]$，$[M]$ のマトリックスの次数は $(k+M_x-1)\times r$ になる．ただし，$k-1$ は B-Spline 関数の次数，M_x は帯板要素の数である．

Spline 帯板法での系の未知数 $(\mathrm{DOF})_s$ は，一般に次のように示される．

$$(\mathrm{DOF})_s=(k+M_x-1)\times r \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

一方，Finite Strip Method の場合は，

$$(\mathrm{DOF})_f=NP\times(M_x+1)\times r \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

で与えられる．ここで，M_x は帯板要素の数，r は級数の項数，また NP は節線変位パラメーターの自由度数であり，仮定される多項式の次数 $k-1$ と関係づけられ，$NP=k-2$ で示される．

3. 数値計算例および考察

Spline 帯板法を用いた斜板の曲げおよび自由振動解析における，解の収束性，精度および有用性について示すために，他の数値解析法との比較検討を行う．

本数値計算例では，帯板要素の両端での境界条件として，単純支持された場合のみについて取り扱う．

したがって，基底関数 $Y_m(y)$ は，

$$Y_m(y)=\sin(m\pi y/b) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

で与えられる．ここで，b は帯板要素の長さである．

(1) 斜板の曲げ解析への適用

等分布荷重を受ける斜板の曲げ解析への Spline 帯板法の適用について示し，解の収束性および精度に与える Spline 次数 $k-1$，帯板要素の数 M_x，級数の項数 r の影響について検討を行った．

Table 1 では，相対する2辺がそれぞれ自由と単純支持された斜板（$\lambda=1.0$, $\nu=0.3$）の中央断面でのたわみ W と主モーメント M_1, M_2 の収束性に与える帯板要素の数の影響について示した．ただし，ϕ は 0°, 30°, 45° にとり，$k-1=3$, $r=11$ とした．また，帯板要素の数を2から 12 まで変化させている．これより，斜角に関係なく，帯板要素の数を増大することにより，安定した収束状態が示されている．得られた結果を，Timoshenko による解析解や著者らによる Spline 要素法を用いた数値解[17]と比較すると，よく一致した結果が得られた．

Table 2 には，**Table 1** で述べた問題について，解の収束性に与える級数の項数の影響が示されている．ただし，$k-1=3$, $M_x=4$, また級数の項数は1から 31 まで変化させている．これより，斜角の増大とともに，級数項を増大しても，一様な収束性が得られていないが，Spline 要素法による数値解へ収束していく傾向が示されている．

また，Spline 次数を高めることにより，高次の帯板要素を作り出すことができるので，**Table 3** では，先に述べた問題の解に与える Spline 次数による影響について検討を行った．ただし，$M_x=4$, $r=11$ とした．これより，一般に Spline 次数を高めることにより，精度の改善がみられるが，その影響は顕著にみられない．

(2) 斜板の自由振動解析への適用

ここでは，Spline 帯板法の有用性を示すために，斜板の自由振動解析への適用について検討を行っている．

Table 1 The effect of the number of strips on the results of skew plate ($\lambda=1.0$ and $\nu=0.3$) with two parallel edges simply supported and the other two free to uniform load. $k-1=3$ and $r=11$.

Skew angle ϕ	Number of strips M_x	Order of matrix (DOF)	W $(a/2, a/2)$	W $(0, a/2)$	M_1 $(a/2, a/2)$	M_2 $(a/2, a/2)$	M_1 $(0, a/2)$
0°	2	55	1.3119	1.5015	1.244	3.289	1.333
	4	77	1.3095	1.5012	1.228	2.803	1.318
	6	99	1.3094	1.5011	1.227	2.753	1.314
	8	121	1.3094	1.5011	1.226	2.733	1.313
	10	143	1.3094	1.5011	1.226	2.724	1.312
	12	165	1.3094	1.5011	1.226	2.718	1.311
	Timoshenko's values		1.309	1.509	1.225	2.71	1.318
30°	2	55	0.7834	0.9819	0.9681	1.762	0.9739
	4	77	0.7885	0.9888	0.9627	1.701	0.9658
	6	99	0.7893	0.9907	0.9574	1.654	0.9727
	8	121	0.7896	0.9914	0.9611	1.660	0.9737
	10	143	0.7897	0.9917	0.9579	1.627	0.9734
	12	165	0.7898	0.9919	0.9584	1.629	0.9731
	Spline Element Method†	324	0.7909	0.9989	0.9619	—	0.9321
45°	2	55	0.3748	0.5541	0.6615	0.04952	0.6179
	4	77	0.3839	0.5701	0.6707	0.05364	0.6287
	6	99	0.3869	0.5761	0.6711	0.05629	0.6499
	8	121	0.3881	0.5786	0.6835	0.06322	0.6538
	10	143	0.3886	0.5787	0.6762	0.05788	0.6518
	12	165	0.3889	0.5803	0.6764	0.05803	0.6485
	Spline Element Method†	324	0.3925	0.5973	0.6886	—	0.5917
	Multipliers		$(10^{-2}\,qa^4/D)$		$10^{-1}\,qa^2$	$10^{-2}\,qa^2$	$10^{-1}\,qa^2$

† The values obtained by the spline element method are in [17].

Table 2 The effect of increment of series terms in basic functions, r on the results of skew plate ($\lambda=1.0$ and $\nu=0.3$) with two parallel edges simply supported and the other two free to uniform load. $M_x=4$ and $k-1=3$.

Skew angle ϕ	Number of series r	Order of matrix (DOF)	W $(a/2, a/2)$	W $(0, a/2)$	M_1 $(a/2, a/2)$	M_2 $(a/2, a/2)$	M_1 $(0, a/2)$
0°	1	7	1.314 5	1.507 0	1.268	2.920	1.362
	3	21	1.309 2	1.500 8	1.221	2.782	1.310
	5	35	1.309 6	1.501 2	1.227	2.801	1.317
	7	49	1.309 5	1.501 1	1.227	2.801	1.317
	9	63	1.309 5	1.501 2	1.229	2.806	1.319
	11	77	1.309 5	1.501 2	1.228	2.803	1.318
	15	105	1.309 5	1.501 2	1.228	2.804	1.318
	21	147	1.309 5	1.501 2	1.228	2.804	1.318
	Timoshenko's values		1.309	1.509	1.225	2.710	1.318
	Spline element method†		1.309	1.501	1.225	2.708	1.318
30°	1	7	0.777 2	0.923 7	0.981 8	2.330	0.991 2
	3	21	0.786 7	0.980 2	0.961 9	1.993	1.010
	5	35	0.787 6	0.981 2	0.962 6	1.729	0.878 3
	7	49	0.788 1	0.986 1	0.965 0	1.754	0.976 4
	9	63	0.788 3	0.987 1	0.966 8	1.727	0.888 7
	11	77	0.788 5	0.988 8	0.962 7	1.701	0.965 8
	15	105	0.788 6	0.990 2	0.962 7	1.684	0.958 0
	21	147	0.788 8	0.991 4	0.967 5	1.686	0.910 0
	Spline element method†		0.790 9	0.998 9	0.961 9	—	0.932 1
45°	1	7	0.372 2	0.453 5	0.691 0	0.174 6	0.611 0
	3	21	0.381 1	0.541 9	0.688 9	0.105 9	0.622 5
	5	35	0.381 2	0.554 3	0.674 8	0.069 63	0.490 5
	7	49	0.382 7	0.562 9	0.676 2	0.064 46	0.646 0
	9	63	0.383 5	0.566 9	0.690 7	0.064 55	0.519 3
	11	77	0.383 9	0.570 1	0.670 7	0.053 64	0.628 7
	15	105	0.384 5	0.573 5	0.671 6	0.050 10	0.618 9
	21	147	0.384 9	0.576 2	0.688 8	0.052 46	0.550 7
	Spline element method†		0.392 5	0.597 3	0.688 6	0.039 78	0.591 7
	Multipliers		$10^{-2}\,qa^4/D$		$10^{-1}\,qa^2$	$10^{-2}\,qa^2$	$10^{-1}\,qa^2$

† The values obtained by the Spline element method are in [17].

Table 3 The effect of degrees of B-Spline functions, $k-1$ on the results of skew plate ($\lambda=1.0$ and $\nu=0.3$) with two parallel edges simply supported and the other two free to uniform load. $M_x=4$ and $r=11$.

Skew angle ϕ	Degrees of B-Spline $k-1$	Order of Matrix (DOF)	W $(a/2, a/2)$	W $(0, a/2)$	M_1 $(a/2, a/2)$	M_2 $(a/2, a/2)$	M_1 $(0, a/2)$
0°	3	77	1.309 5	1.501 2	1.228	2.803	1.318
	4	88	1.309 4	1.501 1	1.225	2.712	1.311
	5	99	1.309 4	1.501 1	1.225	2.705	1.311
	6	110	1.309 4	1.501 1	1.225	2.705	1.311
30°	3	77	0.788 5	0.988 8	0.962 7	1.702	0.965 8
	4	88	0.789 3	0.990 9	0.956 5	1.600	0.973 7
	5	99	0.789 8	0.991 7	0.955 5	1.608	0.974 3
	6	110	0.789 8	0.991 7	0.954 8	1.603	0.970 9
45°	3	77	0.383 9	0.570 1	0.670 7	0.053 63	0.628 7
	4	88	0.386 9	0.576 7	0.670 4	0.050 35	0.657 5
	5	99	0.388 2	0.579 1	0.673 9	0.054 88	0.657 3
	6	110	0.388 8	0.580 4	0.671 0	0.053 38	0.641 9
	Multipliers		$(10^{-2}\,qa^4/D)$		$10^{-1}\,qa^2$	$10^{-2}\,qa^2$	$10^{-1}\,qa^2$

Table 4 では，相対する2辺がそれぞれ自由と単純支持された斜板の振動数パラメーター，μ の収束性に与える Spline 次数 $k-1$ の影響について示した．ここで，斜角は $\phi=45°$，帯板要素の数は $M_x=12$ とし，級数項は1から 15 まで変化させている．これより，解に与える Spline 次数の影響はさほど顕著にみられないが，この次数を高めることにより，高次の振動数に対しても安定した収束状態が得られており，また Spline 要素法により得られた数値解[21]とよく一致した結果が示された．

Table 5 には，**Table 4** で述べた斜板の振動数パラ

Table 4 The effect of degrees of B-Spline functions, $k-1$ on the natural frequency parameters, μ for skew plate with two edges simply supported and the other two free; $M_x=12$, $\phi=45°$ and $\lambda=1.0$.

Degrees of B-Spline $k-1$	Number of series r	Order of matrix	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th
3	1	15	1.818	4.082	—	9.190	—
	3	45	1.728	2.464	4.538	7.131	9.520
	9	135	1.687	2.209	4.175	6.305	8.249
	15	225	1.678	2.156	4.117	6.208	8.148
4	1	16	1.818	4.082	—	9.189	—
	3	48	1.728	2.464	4.538	7.130	9.520
	9	144	1.686	2.208	4.175	6.302	8.243
	15	240	1.677	2.154	4.117	6.203	8.138
5	1	17	1.818	4.081	—	9.188	—
	3	51	1.728	2.464	4.538	7.130	9.520
	9	153	1.686	2.208	4.175	6.302	8.243
	15	255	1.676	2.153	4.117	6.202	8.136
Spline element method [21]			1.663	2.068	4.017	6.046	7.986

Table 5 The effect of finite strip idealization, M_x on the natural frequency parameters, μ for skew plate with two edges simply supported and the other two free; $k-1=5$, $\phi=45°$ and $\lambda=1.0$.

Number of series r	Number of strips M_x	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th
1	2	1.824	4.135	—	9.245	—
	4	1.819	4.086	—	9.224	—
	8	1.818	4.082	—	9.190	—
	12	1.818	4.082	—	9.189	—
	14	1.818	4.081	—	9.188	—
9	2	1.694	2.222	4.176	6.345	8.353
	4	1.688	2.211	4.175	6.309	8.259
	8	1.686	2.208	4.175	6.302	8.244
	12	1.686	2.208	4.175	6.302	8.243
	14	1.686	2.208	4.175	6.302	8.243

Table 6 The effect of increment of series terms in basic functions, r on natural frequency parameter of skew plate ($\lambda=1.0$) with two parallel edges simply supported and the other two free; $k-1=6$ and $M_x=4$.

Skew angle ϕ	Number of series r	Order of matrix (DOF)	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th
0°	1	10	0.975 86	1.634 8	3.721 1	—	—
	3	30	0.975 86	1.634 8	3.721 1	3.946 0	4.735 6
Leissa's values [19]			0.975 86	1.634 8	3.721 1	3.946 0	4.735 6
FSM(4 DOF) {8 strips, $r=1$} †		16	0.976 6	1.636	3.723	—	—
30°	1	10	1.262	2.468	—	5.575	—
	3	30	1.240	1.925	3.801	5.088	6.594
	9	90	1.234	1.840	3.705	5.030	6.306
	15	150	1.233	1.822	3.685	5.021	6.269
	21	210	1.232	1.815	3.676	5.017	6.254
FSM (4 DOF) {8 strips, $r=1$} †		16	1.263	2.469	—	5.577	—
FEM (12 DOF) {mesh : 8×8}		240	1.240	1.805	3.612		
Spline Element Method ††		256	1.231	1.794	3.650	5.005	6.212
45°	1	10	1.818	4.081	—	9.188	—
	3	30	1.728	2.464	4.538	7.130	9.520
	9	90	1.685	2.207	4.174	6.301	8.242
	15	150	1.678	2.157	4.117	6.208	8.148
	21	210	1.673	2.121	4.075	6.143	8.086
FSM (4 DOF) {8 strips, $r=1$} †		10	1.820	4.056	—	9.193	—
FEM (12 DOF) {mesh : 8×8}		240	1.704	2.114	3.954		
Spline Element Method ††		256	1.663	2.068	4.017	6.046	7.986

† The values obtained by the FSM are in [13] and †† the results obtained by Spline element method are in [21].

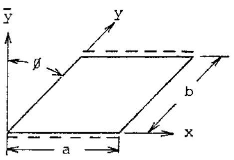
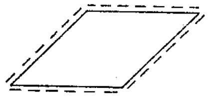
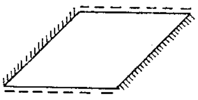
メーターの収束性に与える帯板要素の数の影響が示されている．ただし，$k-1=5$ とし，級数の項数は $r=1$ と 9 の場合を考え，また M_x は 2 から 14 まで変化させている．これより，用いる級数項に関係なく，帯板要素の数を 8 にとれば，一定値に収束している．

Table 6 では，相対する 2 辺がそれぞれ自由と単純支持された斜板の振動数パラメーターに与える級数項の影響について示した．ここで，$k-1=6$, $M_x=4$, 斜角は $\phi=0°$, 30°, 45° とした．また，級数項は 1 から 21 まで変化させている．この **Table** には，Finite Strip Method を用いた Thangam Babu らによる数値[13]，平行四辺形要素を用いた有限要素法による値，および Spline 要素法による結果[21]も示してある．

これより，級数の項数を多くとることにより，高次の振動数に対しても一様な収束状態が得られている．従来の Finite Strip Method による数値と比較して，同じ要素の数であれば，少ない未知数でよい結果が示された．また，有限要素法や Spline 要素法による数値解と比較を行っても，よく一致した結果が得られた．

最後に，**Table 7** には，種々の境界条件と辺長比を

Table 7 Natural frequency parameters, μ of skew plate with different boundary conditions and aspect ratios; $k-1=5$, $M_x=8$ and $r=21$.

Boundary conditions	Skew angles ϕ	Aspect ratios λ	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th
	0°	0.5	0.2410	0.6971	0.9759	1.635	2.211
		1.0	0.9759	1.635	3.721	3.946	4.736
		2.0	0.9865	2.788	4.000	6.539	9.000
	30°	0.5	0.2952	0.6673	1.326	1.552	2.693
		1.0	1.232	1.810	3.670	5.015	6.246
		2.0	5.092	5.731	8.168	12.07	17.20
	45°	0.5	0.3836	0.6866	1.615	1.830	2.755
		1.0	1.673	2.120	4.073	6.140	8.080
		2.0	7.090	7.436	10.28	14.22	19.37
	0°	0.5	1.250	2.000	3.250	4.250	5.000
		1.0	2.000 (2.000)	5.000 (5.000)	5.000 (5.000)	8.000	10.00
		2.0	5.000	8.000	13.00	17.00	20.00
	30°	0.5	1.616	2.439	3.745	5.347	5.745
		1.0	2.544 (2.530)	5.347 (5.330)	7.311 (7.288)	8.529	12.47
		2.0	6.466	9.759	14.99	21.39	23.00
	45°	0.5	2.344	3.298	4.727	6.483	8.367
		1.0	3.638 (3.585)	6.762 (6.715)	10.27 (10.18)	11.08	14.39
		2.0	9.399	13.23	18.95	25.99	33.55
	0°	0.5	2.413 [2.413]	2.933 [2.934]	3.961 [3.962]	5.547 [5.552]	6.437 [6.437]
		1.0	2.933 [2.934]	5.547 [5.548]	7.024 [7.024]	9.583 [9.586]	10.36 [10.36]
		2.0	5.547	9.583	15.68	17.26	20.94
	30°	0.5	3.175 [3.183]	3.714 [3.740]	4.768 [4.816]	6.363 [6.432]	8.334 [8.426]
		1.0	3.757 [3.797]	6.530 [6.598]	9.447 [9.539]	10.24 [10.30]	13.99 [14.10]
		2.0	7.092	11.59	17.97	22.63	25.90
	45°	0.5	4.697 [4.721]	5.262 [5.343]	6.358 [6.507]	8.016 [8.204]	10.10 [10.38]
		1.0	5.367 [5.510]	8.532 [8.740]	12.59 [12.90]	14.03 [14.40]	17.14 [17.80]
		2.0	10.11	15.44	22.62	30.33	34.57

( ) is results obtained by Spline element method [21], [ ] is values calculated by Rayleigh-Ritz method [20].
———— is free edge, ======= is simple supported edge and /////////// is clamped edge.

もつ斜板の振動数パラメーターが示されている．また，比較のために，Rayleigh-Ritz 法[20]と Spline 要素法[21]により得られた結果が示してある．これより，種々の境界条件，辺長比に対して，Spline 帯板法による値は，Rayleigh-Ritz 法，Spline 要素法による数値解とよく一致した結果が得られた．

斜角が 45° をこえる場合はここでは示していないが，斜角が 60° の場合でも一定値へ収束することを確かめている．

4. あとがき

本論文では，B-Spline 関数と Fourier 級数を基底関数に用いた有限帯板法（Spline 帯板法）について定式化を行い，斜板の曲げおよび自由振動解析への適用について述べ，本手法の数値安定性，精度および有用性について検討を行った．得られた結論のおもなものを示すと，次のとおりである．

（1） Spline 次数を任意に変えることができるので，容易に高次の帯板要素を作り出すことができる．

（2） 斜板の数値解に与える Spline 次数の影響は，さほど顕著にみられないが，この次数を高めることにより安定した精度が示された．

（3） 帯板要素の数による影響についても検討を行っているが，要素数を増大することにより，一様な収束性が得られた．

（4） また，解に与える級数の項数の影響について解析を行っているが，一般に振動問題では，級数項を高めることにより，高次の振動数に対しても安定した収束状態が得られている．しかしながら，曲げ問題では，斜角の増大とともに，一様な収束性が得られない場合もみられるが，これは座標関数として用いたはりの固有関数の

性質によるものと思われる．

（5） 種々の境界条件，辺長比および斜角をもつ場合について検討を行っているが，他の数値解析法による解とよく一致した結果が得られており，Spline 帯板法の有用性が示された．

今後，Spline 帯板法の数値安定性および経済性を考慮して，斜板の非線形解析や斜め箱桁解析への応用について検討を行っていきたい．なお，本数値計算には名古屋大学大型計算機センター FACOM M 200 を用いた．

参考文献

1) Cheung, Y.K. : Finite strip method in structural analysis, Pergamon Press, 1976.
2) Cusens, A.R. and R.P. Pama : Bridge deck analysis, John Wiley & Sons, pp. 232～256, 1979.
3) Bucco, D., J. Mazumdar and G. Sved : Application of the finite strip method combined with the deflection contour method to plate bending problems, Compt. Struct., Vol. 10, pp. 827～830, 1979.
4) Cheung, Y.K., S.C. Fan and C.Q. Wu : Spline finite strip in structural analysis, Proc. of Int. Conf. on Finite Element Methods, 2～6 August, Shanghai, China, pp. 704～709, 1982.
5) Distefano, N. and J. Schujman : Solutions of elastic plates by invariant imbedding, J. of Eng. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol. 97, pp. 1349～1361, 1971.
6) Sundararajan, C. and D.V. Reddy : Finite strip-difference calculus technique for plate vibration problems, Int. J. Solids Structures, Vol. 11, pp. 425～434, 1975.
7) Dokainish, M.A. : A new approach for plate vibration-combination of transfer matrix and finite element technique, J. Appl. Mech., Vol. 39, pp. 526～530, 1972.
8) 大坪英臣・北野公夫 ： 固有関数を用いた有限要素による補強平板の曲げ及び座屈解析，日本造船学会論文集，No. 134, pp. 241～251, 1973.
9) Zuwu, Z. : Equilibrium method of finite strip for plates, Proc. of Int. Conf. on Finite Element Methods, 2～6 August, Shanghai, China, pp. 841～844, 1982.
10) Cheung, Y.K. and L.G. Tham : Mixed formulation of finite strip method, J. Eng. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol. 108, pp. 452～456, 1982.
11) Brown, T.G. and A. Ghali : Semi-analytic solution of skew plates in bending, Proc. of Instn Civ. Engrs, Part 2, Vol. 57, pp. 165～175, 1974.
12) Mukhopadhyay, M. : Finite strip method of analysis of clamped skew plates in bending, Proc. Instn Civ. Engrs, Part 2, Vol. 61, pp. 189～195, 1976.
13) Thangam Babu, P.V. and D.V. Reddy : Frequency analysis of skew orthotropic plates by the finite strip method, J. Sound Vib., Vol. 18, pp. 465～474, 1971.
14) Srinivasan, R.S. and K. Munaswamy : Frequency analysis of skew orthotropic point supported plates J. Sound Vib., Vol. 39, pp. 207～216, 1975.
15) Thangam Babu, P.V. and D.V. Reddy : Stability analysis of skew orthotropic plates by the finite strip method, Compt. Struct., Vol. 8, pp. 599～607, 1978.
16) 水澤富作・梶田建夫・成岡昌夫：B-Spline 関数を用いた斜板の自由振動解析について，土木学会論文報告集，No. 272, pp. 131～134, 1978.
17) Mizusawa, T. and T. Kajita : Analysis of skew plates in bending using B-Spline functions, Memoirs of Daido Inst. Tech., Vol. 14, pp. 85～91, 1979.
18) Mizusawa, T., T. Kajita and M. Naruoka : Buckling of skew plate structures using B-Spline functions, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 15, pp. 87～96, 1980.
19) Leissa, A.W. : The free vibration of rectangular plates, J. Sound Vib., Vol. 31, pp. 257～293, 1973.
20) Nair, P.S. and S. Durvasula : Vibration of skew plates, J. Sound Vib., Vol. 26, pp. 1～19, 1973.
21) Mizusawa, T., T. Kajita and M. Naruoka : Vibration of skew plates by using B-Spline functions, J. Sound Vib., Vol. 62, pp. 301～308, 1979.

（1983.6.6・受付）