

弾性地盤上の構造物の動的解析における 地盤の柔性マトリックス*

FLEXIBILITY MATRICES OF GROUND FOR DYNAMIC ANALYSES OF STRUCTURES ON ELASTIC GROUND MEDIA

北村 泰 寿**・桜 井 春 輔***

By Yasutoshi KITAMURA and Shunsuke SAKURAI

1. ま え が き

弾性地盤上の構造物の動的相互作用問題において、地盤を波動伝播媒体として取り扱う理論的研究は 1936 年の Reissner による円形フーチングの振動問題に始まり¹⁾、以来数多くの研究がなされてきている。これらの研究を大別すると、

- 1) 分布加振による応答問題（応力境界値問題）
- 2) 剛体加振による応答問題（混合境界値問題）
- 3) 構造物の柔性を考慮した地盤との連成応答問題

に分けられる。

上記いずれの場合においても、構造物と地盤の接触面における変位と接触圧の関係は Green 関数を用いて積分表示できる。この場合、2)、3)の問題においては、接触圧を未知量とする積分方程式の形となり、解析的に解を得ることはできない。このため、一つの数値解法として、接触面を有限個の要素に分割し、影響係数の概念を用いて、各要素の未知接触圧に関する連立一次方程式に離散化する手法が利用されている。この数値解法においては、分割した各要素の接触圧による各要素の変位で構成される地盤の柔性マトリックスを求める方法と接触面の分割数が問題となる。

本論文では、上記の 2)、3)の問題に関して、従来の研究における地盤の柔性マトリックスの取り扱いについて調べる。その調査結果をふまえて、層状の弾性地盤に対する柔性マトリックスの誘導における基本的な問題について検討を行い、合わせて接触面の分割数に対する検討を加える。

2. 従来の研究と本論文の関連

動的問題において、接触面を有限個の要素に分割する数値解法を最初に用いたのは、接触面を同心リング要素に分割して剛円盤の振動を解析した 1965 年の Lysmer の論文であろう¹⁾。これ以後の研究を整理すると、研究内容の概要とともに表-1 のようにまとめられる。なお、同表において、ほとんどの研究が分割要素として正方形要素を採用し、また接触面形状は矩形を対象としている。

いま、図-1 に示すように接触面を有限個の要素に分割し、地盤の柔性マトリックスを対角要素となる載荷要素（要素 i ）の変位と非対角要素となる載荷要素以外の要素（要素 j 、以下非載荷要素とよぶ）の変位に分

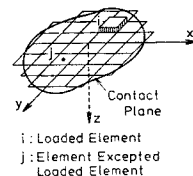


図-1 接触面の分割モデル

けて取り扱う。このとき、表-1 に示す研究における柔性マトリックスの求め方を分類すると次の 3 つに大別される。

- 1) 載荷要素、非載荷要素ともに等分布加振による変位として計算する。
- 2) 載荷要素については等分布加振による変位とし、非載荷要素の変位は合力が等しい集中加振による変位で代用する。
- 3) 載荷要素、非載荷要素ともに集中加振による変位で代用する。

なお、上記 1)、2)においては、正方形の分割要素と面積が等価な円形面に作用する等分布加振（以下、円形加振と略す）による変位で代用する考え方も含まれる。また、上記の分類を表-1 に併記しておく。

まず、分類 1) で正方形要素に作用する等分布加振（以下、正方形加振と略す）による各要素の変位を求め

* 第 38 回年次学術講演会において一部発表

** 正会員 工博 神戸大学助教授 工学部土地造成工学研究施設

*** 正会員 Ph.D. 工博 神戸大学教授 工学部土木工学科

表—1 接触面を有限個の要素に分割する数値解法を用いた従来の研究

研究者	年	分類	地盤モデル化	研究内容の概要
Elorduy (ほか ²⁾)	1967	(3)	半無限弾性体	複素剛性 (Relaxed Case)
Wong (ほか ³⁾)	1976	(1)	"	複素剛性 (Relaxed Case)
Wong (ほか ⁴⁾)	1977	"	"	実構造物の応答への適用 (Relaxed Case)
Savidis (ほか ⁵⁾)	"	"	"	近接剛構造物間の相互作用 (Relaxed Case)
Gaul ⁶⁾	"	"	半無限粘弾性体	複素剛性 (Relaxed Case)
Wong (ほか ⁷⁾)	1978	"	半無限弾性体	斜入射波動による剛基礎の応答 (Bonded Case)
Kitamura (ほか ⁸⁾)	1979	(2)	"	複素剛性 (Relaxed Case)
Savidis (ほか ⁹⁾)	"	(1)	"	上載荷重を受ける板 (FEM) の応答
北村 (ほか ¹⁰⁾)	"	(2)	"	複素剛性 (Bonded Case)
北村 (ほか ¹¹⁾)	1980	"	"	上載荷重を受ける板の応答
Iguchi (ほか ¹²⁾)	1981	(1)	"	剛な部分を持つ板 (FEM) の複素剛性
小林 ¹³⁾	"	(2)	"	上載荷重および地震力を受ける原子炉建屋 (FEM) の応答
Hamidzadeh-Eraghi (ほか ¹⁴⁾)	"	(3)	"	剛構造物の応答倍率 (Relaxed Case)
Adeli (ほか ¹⁵⁾)	"	(1)	"	複素剛性 (Relaxed Case)
Whittaker (ほか ¹⁶⁾)	1982	"	"	上載荷重を受ける板 (FEM) の応答
Whittaker (ほか ¹⁷⁾)	"	"	"	斜入射波動による板 (FEM) の応答
Kitamura (ほか ¹⁸⁾)	"	(2)	"	上載荷重を受ける直方体構造物 (FEM) の応答
Rücker ¹⁹⁾	"	"	半無限弾性体, 粘弾性体, 非等質弾性体	複素剛性 (Relaxed Case)
Kawase (ほか ²⁰⁾)	"	"	二層弾性体	複素剛性 (Relaxed Case)
高崎 (ほか ²¹⁾)	"	(3)	5層粘弾性体	上載荷重を受ける板 (FEM) の応答 (Case Study)

たものは、柔性マトリックスを厳密に取り扱ったものとして評価できる。しかし、正方形加振による変位式は、粘弾性体に対する解析⁹⁾を除けば、特異点を含む無限二重積分の形となる。このため、演算コストの面から実務での利用において必ずしも有用であるとは限らない。この点を考慮して、分類 1) で円形加振による変位で代用する方法¹⁵⁾および分類 2) の方法は、柔性マトリックスの演算コストの軽減を意図した次善の方法といえる。一方、分類 3) の方法では、柔性マトリックスで最も大きな値となる載荷要素の変位を精度よく求めていない点が問題となる。

ところで、表—1 に示す研究において、ほとんどのものが地盤を半無限弾性体にモデル化している。最近のように構造物が重要かつ巨大化する傾向に対しては、構造物の大きさと比較して地盤の多層性を無視することは妥当ではない。したがって、今後地盤を層状弾性体と考えた構造物—地盤系の動的相互作用問題に対する研究がますます重要となる。

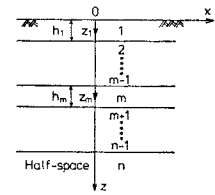
このような状況を考慮して、本論文では層状弾性体に対する柔性マトリックス誘導における基本的な問題として、以下のような事項について検討を行う。まず、層状弾性体の表面加振による表面変位式を矩形加振 (本論文では、正方形加振も含めた総称とする)、円形加振および集中加振に対して求めて、変位式間の対応関係について調べる。この関係をふまえて、先に述べた半無限弾性体に対する柔性マトリックス計算の近似化が層状弾性体の場合にも拡張し得ることを論じる。また、接触面の分割数に関して、分割要素内の変位分布から分割要素の大きさについて検討を加える。

3. 基礎式

層状弾性体における変位式誘導の概要を説明する便宜上、図—2 に示す多層弾性体の第 m 層の変位、応力を次式のようにマトリックス記号で表わす。

$$\{V_m\} = [D_m]\{C_m\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\{V_m\}$ は変位・応力ベクトル、 $\{C_m\}$ は未知係数ベクトルである。また、 $[D_m]$ は変位、応力の上昇、下降波成分を表わすマトリックスである。



図—2 多層弾性体モデル

たとえば、直交座標系 (x, y, z_m) に対して、式 (1) を

具体的に書き表わすと次式のようなになる²²⁾。なお、本論文では調和振動を対象としているため、以下の記述においては時間項の表示を省略する。

$$\frac{1}{\exp\{i(\xi_1 x + \xi_2 y)\}} \left\{ -\frac{u_x}{i\xi_1}, -\frac{u_y}{i\xi_2}, u_z, \frac{\tau_{zx}}{i\xi_1}, \frac{\tau_{zy}}{i\xi_2}, -\sigma_z \right\}_m^T = [D_m]\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}_m^T \dots\dots\dots (2)$$

ただし、

$$[D_m] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 \\ \alpha_m A_1 & -\alpha_m A_2 \\ 2\alpha_m \mu_m A_1 & -2\alpha_m \mu_m A_2 \\ 2\alpha_m \mu_m A_1 & -2\alpha_m \mu_m A_2 \\ (\kappa^2 + \beta_m^2) \mu_m A_1 & (\kappa^2 + \beta_m^2) \mu_m A_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}
 \beta_m B_1 & -\beta_m B_2 \\
 0 & 0 \\
 \xi_1^2 B_1 & \xi_2^2 B_2 \\
 (\xi_1^2 + \beta_m^2) \mu_m B_1 & (\xi_1^2 + \beta_m^2) \mu_m B_2 \\
 \xi_1^2 \mu_m B_1 & \xi_1^2 \mu_m B_2 \\
 2 \xi_1^2 \beta_m \mu_m B_1 & -2 \xi_1^2 \beta_m \mu_m B_2 \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 0 & 0 \\
 \beta_m B_1 & -\beta_m B_2 \\
 \xi_2^2 B_1 & \xi_2^2 B_2 \\
 \xi_2^2 \mu_m B_1 & \xi_2^2 \mu_m B_2 \\
 (\xi_2^2 + \beta_m^2) \mu_m B_1 & (\xi_2^2 + \beta_m^2) \mu_m B_2 \\
 2 \xi_2^2 \beta_m \mu_m B_1 & -2 \xi_2^2 \beta_m \mu_m B_2 \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots
 \end{array} \quad (3)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \exp(-\alpha_m z_m), \quad A_2 = \exp(\alpha_m z_m), \\
 B_1 &= \exp(-\beta_m z_m), \quad B_2 = \exp(\beta_m z_m), \\
 \alpha_m &= \sqrt{\kappa^2 - \kappa_{\rho m}^2}, \quad \beta_m = \sqrt{\kappa^2 - \kappa_{sm}^2}, \\
 \kappa^2 &= \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad \kappa_{\rho m} = \omega / V_{\rho m}, \quad \kappa_{sm} = \omega / V_{sm}
 \end{aligned}$$

また、 $i = \sqrt{-1}$ 、 u_x, u_y, u_z は x, y, z 方向の変位、 ξ_1, ξ_2 は波数の次元をもつ変数、 $\mu_m, V_{\rho m}, V_{sm}$ はそれぞれ第 m 層のせん断弾性係数、縦波速度、横波速度、 ω は波動の円振動数、 $C_1 \sim C_6$ は未知係数である。

式 (3) のマトリックス $[D_m]$ は小堀ら²³⁾によっても与えられているが、本論文では小堀らとは若干違った表わし方となっている。ところで、 $[D_m]$ は 6×6 の次数となっているが、上下加振問題で軸対称加振のような場合には、 z 方向の回転が 0 となることを考慮して、

$$\frac{u_x}{\xi_1} = \frac{u_y}{\xi_2}, \quad \frac{\tau_{zx}}{\xi_1} = -\frac{\tau_{zy}}{\xi_2}$$

なる関係を用いれば、 $[D_m]$ は 4×4 の次数に縮小できる。さらに、 $\xi_1^2 = \xi_2^2 = \kappa^2/2$ なる置き換えを行えば、変位・応力ベクトルの表示に対する若干の変形は必要であるが、円筒座標系における $[D_m]$ が得られる²⁴⁾。なお、これらの詳細については、紙数の都合上文献 22), 24) に譲る。

いま、第 m 層の上端 ($z_m=0$) および下端 ($z_m=h_m$) での $[D_m]$ を次のマトリックス記号で表わしておく。

$$[E_m] = [D_m]_{z_m=0}, \quad [F_m] = [D_m]_{z_m=h_m} \dots\dots (4)$$

図-2 の多層弾性体において、最下層 (第 n 層) の未知係数 $\{C_n\}$ と表面境界における変位・応力ベクトル $\{V_0\}$ は、各層境界での連続条件 (各層は層境界で密着しているとする) を考慮することによって次式のように関係づけられる²⁵⁾。

$$\{C_n\} = [J] \{V_0\} \dots\dots\dots (5)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 [J] &= [E_n]^{-1} [F_{n-1}] [E_{n-1}]^{-1} \dots [F_1] [E_1]^{-1} \\
 \{V_0\} &= \{\delta_0, \sigma_0\}^T
 \end{aligned}$$

また、本論文で取り扱うような問題の場合、 $\{\delta_0\}$ は未知

変位ベクトル、 $\{\sigma_0\}$ は既知応力ベクトルとなる。

次に、式 (5) の $\{C_n\}$ を上昇波に対する係数 $\{C_n^+\}$ と下降波に対する係数 $\{C_n^-\}$ に分ける。このとき、最下層では上昇波成分が存在しないこと (放射条件) から $\{C_n^+\} = 0$ となり、式 (5) はマトリックスの要素の入れ替えを行って、次式のように書き直される。

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ C_n^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11} & \tilde{J}_{12} \\ \tilde{J}_{21} & \tilde{J}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_0 \\ \sigma_0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\tilde{J}_{11}, \tilde{J}_{12}, \dots$ はマトリックス積 $[J]$ の 2×2 (上下加振問題)、あるいは 3×3 (水平加振問題) のサブ・マトリックスである。式 (6) から、表面の未知変位 $\{\delta_0\}$ と既知応力 $\{\sigma_0\}$ の関係は次式のように求められる。

$$\{\delta_0\} = -[\tilde{J}_{11}]^{-1} [\tilde{J}_{12}] \{\sigma_0\} \dots\dots\dots (7)$$

いま、弾性体表面において、図-3 に示すような矩形載荷面を考えると、上下方向の矩形加振に対して $\{\delta_0\}$ および $\{\sigma_0\}$ は次式のように与えられる²²⁾。

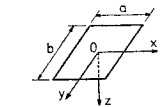


図-3 矩形載荷面と座標系

$$\begin{aligned}
 \{\delta_0\} &= \frac{1}{\exp\{i(\xi_1 x + \xi_2 y)\}} \left\{ -\frac{u_x}{i\xi_1}, u_z \right\}^T \\
 \{\sigma_0\} &= \left\{ 0, \frac{q_z}{\pi^2} \frac{\sin(a\xi_1/2) \sin(b\xi_2/2)}{\xi_1 \xi_2} \right\}^T \\
 \dots\dots\dots &\dots\dots\dots (8)
 \end{aligned}$$

ここで、 a, b は x, y 方向の載荷面の幅、 q_z は等分布加振力の荷重振幅である。なお、上式においては先に述べたマトリックスの縮小が考慮されている。また、 $\{\sigma_0\}$ は表面の応力境界条件に二重 Fourier 積分公式を用いて得られる次式、

$$\begin{aligned}
 \tau_{zx} &= 0, \quad (\tau_{zy} = 0) \\
 \sigma_z &= -\frac{abq_z}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\xi_1/2) \sin(b\xi_2/2)}{ab\xi_1^2 \xi_2} \\
 &\quad \cdot \exp\{i(\xi_1 x + \xi_2 y)\} d\xi_1 d\xi_2
 \end{aligned}$$

において、積分記号 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2$ を省略したものである。したがって、表面変位式は式 (7) から得られる $\{\delta_0\}$ に $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2$ なる演算を施すことによって求まる²⁶⁾。水平方向の矩形加振についても、まったく同様の取り扱いによって変位式を誘導することができると^{22), 23)}。

一方、円形加振および集中加振による変位式についても、表面の応力境界条件に Fourier-Bessel 積分公式を用いて、矩形加振の場合と同様の定式化ができる。なお、集中加振による変位式は文献 24) に与えられており、円形加振による変位式は集中加振による変位式の誘導過程で得られる²⁷⁾。ここでは、紙数の都合上、これらの詳細については文献 24), 26), 27) に譲る。

4. 二層地盤への適用

本論文では、矩形加振、等価な面積の円形加振および合力が等しい集中加振による変位式間の対応関係を調べることが目的の一つである。しかるに、式(7)のマトリックス表示では変位式間の対応を明確にできない。このため、多層弾性体の最も簡単な場合として、本章では式(7)のマトリックス積の分解が可能な二層弾性体に対する変位式を示す。なお、マトリックス積の分解は代数式の単純な変形操作であるため、その詳細は省略して変形後の結果のみを示す。また、特別な場合として、半無限弾性体および第2層が剛基盤の場合も含めて変位式を示す。

(1) 矩形加振の場合

式(7)のマトリックス積を分解して得られる変位式に、

$$\xi_1 = \kappa \cos \theta, \quad \xi_2 = \kappa \sin \theta$$

なる変数変換を導入し、 θ の積分範囲の縮小とともに変数の無次元化を行う。このとき、上下加振による上下変位 u_z および水平 x 方向加振による水平変位 u_x はそれぞれ次式のように求められる²²⁾。

$$u_z = -\frac{4aq_z}{\pi^2\mu_1 a_0} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\tilde{\alpha}_1 W(\zeta)}{\zeta F(\zeta)} \cdot \frac{T(\zeta, \theta)}{\cos \theta \sin \theta} d\theta d\zeta \dots\dots\dots (9)$$

$$u_x = -\frac{4aq_x}{\pi^2\mu_1 a_0} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{\tilde{\beta}_1 U(\zeta)}{\zeta F(\zeta)} \cos^2 \theta + \frac{H(\zeta)}{\zeta G(\zeta)} \sin^2 \theta \right\} \frac{T(\zeta, \theta)}{\cos \theta \sin \theta} d\theta d\zeta \dots\dots (10)$$

ここで、

$$T(\zeta, \theta) = \cos(\zeta X a_0 \cos \theta) \cos(\zeta Y a_0 \sin \theta) \cdot \sin(\zeta a_0 \cos \theta/2) \sin(\zeta b_0 \sin \theta/2)$$

$$a_0 = \omega a / V_{s1}, \quad b_0 = (b/a) a_0, \quad X = x/a, \quad Y = y/a,$$

$$\kappa = \zeta \omega / V_{s1}, \quad \tilde{\alpha}_1 = \sqrt{\zeta^2 - \tilde{\nu}_1^2}, \quad \tilde{\beta}_1 = \sqrt{\zeta^2 - 1},$$

$$\tilde{\nu}_1 = \sqrt{(1 - 2\nu_1) / (2 - \nu_1)}$$

また、 μ_1, ν_1, V_{s1} はそれぞれ表層(第1層)のせん断弾性係数、ポアソン比、横波速度、 q_x は等分布加振力の荷重振幅である。なお、 $F(\zeta), W(\zeta), U(\zeta), G(\zeta), H(\zeta)$ 等の記号の詳細は付録に示す。

(2) 矩形加振と等価な面積の円形加振の場合

前節での記号を用いて、変位式は次式のように求められる²⁴⁾。

$$u_z = -\frac{aR_0 q_z}{\mu_1} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_1 W(\zeta)}{F(\zeta)}$$

$$\cdot J_0(Ra_0\zeta) J_1(R_0a_0\zeta) d\zeta \dots\dots\dots (11)$$

$$u_x = -\frac{aR_0 q_x}{2\mu_1} \int_0^{\infty} \left[\frac{\tilde{\beta}_1 U(\zeta)}{F(\zeta)} \left\{ J_0(Ra_0\zeta) - \left(\frac{X^2 - Y^2}{R^2} \right) J_2(Ra_0\zeta) \right\} + \frac{H(\zeta)}{G(\zeta)} \left\{ J_0(Ra_0\zeta) + \left(\frac{X^2 - Y^2}{R^2} \right) J_2(Ra_0\zeta) \right\} \right] J_1(R_0a_0\zeta) d\zeta \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $R=r/a, R_0=r_0/a, r=\sqrt{x^2+y^2}, r_0=\sqrt{ab}/\pi$ (等価半径)、 $J_0(\quad), J_1(\quad), J_2(\quad)$ は第0次、第1次、第2次の Bessel 関数である。

(3) 矩形加振と合力が等しい集中加振の場合

集中加振力の荷重振幅を abq_z (上下加振)、 abq_x (水平 x 方向加振) と置いて、変位式は次式のように求められる²⁴⁾。

$$u_z = -\frac{ba_0 q_z}{2\pi\mu_1} \int_0^{\infty} \frac{\zeta \tilde{\alpha}_1 W(\zeta)}{F(\zeta)} J_0(Ra_0\zeta) d\zeta \dots\dots (13)$$

$$u_x = -\frac{ba_0 q_x}{4\pi\mu_1} \int_0^{\infty} \left[\frac{\zeta \tilde{\beta}_1 U(\zeta)}{F(\zeta)} \left\{ J_0(Ra_0\zeta) - \left(\frac{X^2 - Y^2}{R^2} \right) J_2(Ra_0\zeta) \right\} + \frac{\zeta H(\zeta)}{G(\zeta)} \left\{ J_0(Ra_0\zeta) + \left(\frac{X^2 - Y^2}{R^2} \right) J_2(Ra_0\zeta) \right\} \right] d\zeta \dots\dots\dots (14)$$

(4) 各載荷状態に対する変位式間の関係

式(9),(11),(13)に得られている上下加振による上下変位式において、被積分関数の $\zeta \tilde{\alpha}_1 W(\zeta)/F(\zeta)$ は各式に共通して現われている。いま、共通する係数として $-a/2\pi\mu_1$ を省き、かつ各式に共通する $\int_0^{\infty} \zeta \tilde{\alpha}_1 W(\zeta)/F(\zeta) d\zeta$ なる部分を除いて残る部分を比較すると、積分変数に依存する形であるが表-2のように対応している。同様に、水平加振による水平変位式、式(10),(12),(14)についても、第1項と第2項に分けて対応する項を取り出すと表-2のようにまとめられる。

同表より、それぞれの対応項は無次元振動数 a_0 、振源

表-2 各載荷状態に対する変位式間の対応項

	矩形加振	円形加振	集中加振
上下加振による上下変位	$\frac{8}{\pi a_0^2} \int_0^{\pi/2} \frac{T(\zeta, \theta)}{\cos \theta \sin \theta} d\theta$	$\frac{2\pi R_0}{\zeta} J_0(Ra_0\zeta) J_1(R_0a_0\zeta)$	$\frac{ba_0}{a} J_0(Ra_0\zeta)$
水平加振による水平変位	$\frac{8}{\pi a_0^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta T(\zeta, \theta)}{\sin \theta} d\theta$	$\frac{\pi R_0}{\zeta} D(Ra_0\zeta) J_1(R_0a_0\zeta)$	$\frac{ba_0}{2a} D(Ra_0\zeta)$
	$\frac{8}{\pi a_0^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta T(\zeta, \theta)}{\cos \theta} d\theta$	$\frac{\pi R_0}{\zeta} E(Ra_0\zeta) J_1(R_0a_0\zeta)$	$\frac{ba_0}{2a} E(Ra_0\zeta)$

注) $D(Ra_0\zeta) = J_0(Ra_0\zeta) - \left(\frac{X^2 - Y^2}{R^2} \right) J_2(Ra_0\zeta), E(Ra_0\zeta) = J_0(Ra_0\zeta) + \left(\frac{X^2 - Y^2}{R^2} \right) J_2(Ra_0\zeta)$

距離 x/a , y/a , 載荷面形状 b/a 等には関係しているが, 層剛性比 μ_2/μ_1 , 層厚 h_1/a 等には依存していない。つまり, 半無限弾性体に対して矩形加振, 円形加振および集中加振による変位を比較して得られる結論は, 層状弾性体に拡張しても成り立つものと考えられる。なお, これらの推論は次章以降において数値的に確かめられる。

5. 柔性マトリックス計算の近似化

2. で述べたように, 地盤の柔性マトリックスを対角要素となる載荷要素の変位と非対角要素となる非載荷要素の変位に分けて取り扱う。表-1 の従来の研究において, 分割要素の無次元振動数 $a_0(=\omega a/V_{s1})$ の値は $a_0=0.125\sim 1.25$ 程度の範囲となっている注1)。したがって, 本章では $a_0 \leq 1.0$ の範囲について, 柔性マトリックス計算の近似化を検討する。

図-4 は, 半無限弾性体の場合について, 載荷状態による載荷要素の中央変位を矩形載荷面の辺長比 b/a を変えて比較したものである。載荷面が正方形 ($b/a=1$) の場合, 正方形加振による変位と等価な面積の円形加振による変位はほとんど差異がない。この結果は, すでに

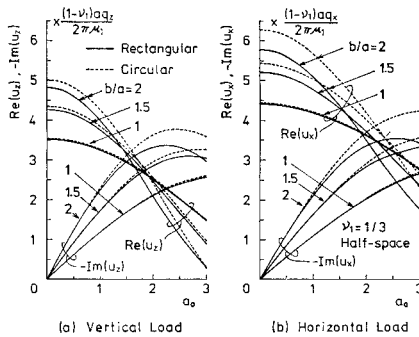


図-4 載荷状態が載荷要素の中央変位に及ぼす影響

表-3 各載荷状態に対する載荷要素の中央変位の比較 ($a_0=0.5, \nu_1=\nu_2=1/3$)

	μ_2/μ_1	h_1/a	正方形加振		円形加振	
			実部	虚部	実部	虚部
$\frac{2\pi\mu_1 u_z}{(1-\nu_1)aq_z}$	2	5	3.5967	-0.6890	3.6169	-0.6892
		10	4.2243	-0.5417	4.2845	-0.5418
		∞	1	2.2547	0.0000	2.2669
	5	5	4.0708	-0.0738	4.0924	-0.0738
		10	3.3717	-0.5574	3.4082	-0.5576
		∞	1	4.2863	-0.5894	4.3125
$\frac{2\pi\mu_1 u_x}{(1-\nu_1)aq_x}$	2	5	4.3557	-0.5915	4.3816	-0.5916
		10	4.3320	-0.5760	4.3770	-0.5762
		∞	1	3.6597	0.0000	3.6789
	5	5	4.2863	-0.5894	4.3125	-0.5895
		10	4.3551	-0.6930	4.3886	-0.6932
		∞	1	4.2863	-0.5894	4.3125

Thomson ら²⁸⁾によっても指摘されていることである。

表-3 は, 層状弾性体の場合について, 層剛性比 μ_2/μ_1 および層厚 h_1/a を変えて, 載荷状態による載荷要素の中央変位を比較したものである。なお, 同表および以後の図表において, $\mu_2/\mu_1 = \infty$ は剛基盤上の弾性体, また $\mu_2/\mu_1 = 1$ あるいは $h_1/a = \infty$ は半無限弾性体を意味する。正方形加振と円形加振による変位の虚部はほとんど一致しており, 実部においても 0.5~1.4% の差異しか生じていない。同表は $a_0=0.5$ の場合のみについて調べたものであるが, $a_0=0.5$ 以外の a_0 の値について比較した結果においても, 同様の傾向となっている。つまり, 分割要素に正方形を用いれば層剛性比, 層厚等に関係なく, 載荷要素の中央変位は等価な面積の円形加振による変位で代用してよいといえる。

次に, 表-4 は, 半無限弾性体の場合について, 各載荷状態による非載荷要素の中央変位を比較したものである。正方形加振と円形加振による変位については, 実部には差異があるものの虚部はよく一致している。一方, 正方形加振と集中加振による変位の比較では, a_0 の増加とともに実部, 虚部ともに差異が大きくなる傾向にあ

表-4 各載荷状態に対する非載荷要素の中央変位の比較に及ぼす a_0 の影響 (半無限弾性体, $\nu_1=1/3$)

	a_0	加振源	$x/a=1$		$x/a=2$		$x/a=3$		$x/a=5$	
			実部	虚部	実部	虚部	実部	虚部	実部	虚部
$\frac{2\pi\mu_1 u_z}{(1-\nu_1)aq_z}$	0.5	正方形加振	0.8554	-0.5745	0.1797	-0.4779	-0.0849	-0.3375	-0.2214	-0.0317
		円形加振	0.8172	-0.5748	0.1740	-0.4781	-0.0872	-0.3377	-0.2225	-0.0317
		集中加振	0.8228	-0.5800	0.1745	-0.4823	-0.0889	-0.3404	-0.2249	-0.0314
	1.0	正方形加振	0.3835	-0.9297	-0.3830	-0.3518	-0.3391	0.1545	0.2278	0.1149
		円形加振	0.3453	-0.9312	-0.3900	-0.3522	-0.3425	0.1550	0.2268	0.1151
		集中加振	0.3489	-0.9647	-0.4100	-0.3613	-0.3565	0.1662	0.2391	0.1196
$\frac{2\pi\mu_1 u_x}{(1-\nu_1)aq_x}$	0.5	正方形加振	1.3793	-0.5454	0.5246	-0.4925	0.1951	-0.4134	-0.0675	-0.2249
		円形加振	1.2931	-0.5456	0.5121	-0.4926	0.1909	-0.4135	-0.0690	-0.2250
		集中加振	1.3807	-0.5507	0.5255	-0.4971	0.1953	-0.4171	-0.0687	-0.2264
	1.0	正方形加振	1.0385	-0.9663	0.0505	-0.6303	-0.2021	-0.2792	-0.0983	0.0047
		円形加振	0.9527	-0.9674	0.0372	-0.6309	-0.2073	-0.2793	-0.1002	0.0047
		集中加振	1.0509	-0.9942	0.0437	-0.6449	-0.2111	-0.2812	-0.0985	0.0071

注 1) 一般には, 接触面の分割数は加振振動数が変化しても変更しない, すなわち分割要素幅 a は一定である。したがって, 本論文で示す a_0 は $a_0 = \omega a / V_{s1}$ なる関係より, 取り扱っている最大の加振振動数に対する分割要素の a_0 を意味している。

表一五 各載荷状態に対する非載荷要素の中央変位の比較に及ぼす層剛性比の影響 ($a_0=0.5, \nu_1=\nu_2=1/3, h_1/a=5$)

	μ_2/μ_1	振源距離	正方形加振		円形加振		集中加振	
			実部	虚部	実部	虚部	実部	虚部
$\frac{2\pi\mu_1 u_z}{(1-\nu_1) a q_z}$	2	$x/a=1$	0.9874	-0.6588	0.9494	-0.6591	0.9584	-0.6640
		$x/a=5$	-0.2467	-0.1302	-0.2475	-0.1302	-0.2498	-0.1309
	10	$x/a=1$	1.6041	-0.5344	1.6062	-0.5345	1.6148	-0.5356
		$x/a=5$	0.0682	-0.3736	0.1074	-0.3736	0.1071	-0.3744
	∞	$x/a=1$	1.4611	-0.0728	1.4245	-0.0728	1.4315	-0.0730
		$x/a=5$	0.1147	-0.0519	0.1152	-0.0519	0.1145	-0.0520
$\frac{2\pi\mu_1 u_x}{(1-\nu_1) a q_x}$	2	$x/a=1$	1.3799	-0.5747	1.2951	-0.5748	1.3804	-0.5782
		$x/a=5$	-0.1105	-0.2623	-0.1106	-0.2624	-0.1118	-0.2635
	10	$x/a=1$	1.3559	-0.5647	1.2900	-0.5649	1.3766	-0.5679
		$x/a=5$	-0.1700	-0.3311	-0.1511	-0.3312	-0.1511	-0.3330
	∞	$x/a=1$	1.3119	-0.5783	1.2274	-0.5784	1.3138	-0.5814
		$x/a=5$	-0.1869	-0.3468	-0.1866	-0.3469	-0.1865	-0.3487

る。この点については、集中加振による変位は矩形加振による変位に比して過大評価となることを指摘している Holzöhner²⁹⁾ の報告とも一致している。

表一五は、 $a_0=0.5$ の場合について、層剛性比が各載荷状態による非載荷要素の中央変位の比較に及ぼす影響を調べたものである。各載荷状態による変位の差異は、層剛性比に関係なく、表一四中の $a_0=0.5$ の場合と同程度の差異となっている。

ところで、表一四および表一五の値より求められる非載荷要素の変位振幅(絶対値)は、それぞれ図一四の $a_0=0.5, 1.0$ における変位の値および表一三の値より求まる載荷要素の変位振幅(絶対値)に比べて相当小さくなっている。しかも、表一四から、非載荷要素の変位振幅(絶対値)は載荷要素からの距離とともに減少していることがわかる。したがって、柔性マトリックスとしては、対角要素となる載荷要素の中央変位を精度よく求めれば、非対角要素となる非載荷要素の中央変位の精度は多少悪くても許されるであろう。つまり、非載荷要素の中央変位を円形加振もしくは集中加振による変位として求めても、柔性マトリックスとしてそれほど大きな問題は生じないものと判断できる。このような考え方のもとで、半無限弾性体に対するものであるが、2. に述べた分類 2) の方法で求めた複素剛性は、分類 1) の方法で計算した Wong ら³⁾の結果とよく一致している^{8),10)}。

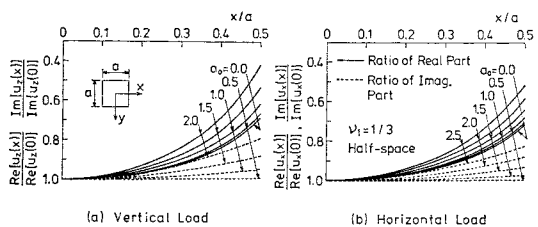
6. 分割要素の大きさ

表一に示す従来の研究によれば、複素剛性を計算する場合の a_0 として Wong ら³⁾は $a_0=1.0$ の値を用いており、以後の研究においてもこの値が参照されている。これに対して、著者らは $a_0=0.5$ としたときの複素剛性は収束値に対して約 10% 程度の誤差が生じることが報告した^{8),10)}。一方、半無限弾性体上の板の振動に

ついて、著者らは a_0 の値を $a_0=0.2$ まで小さくした場合を計算した¹¹⁾。その結果、構造物の柔性を考慮する場合の a_0 の値は、複素剛性の計算に対する a_0 の値より小さくする必要があることがわかった。また、Iguchi ら¹²⁾も板構造物の振動解析において同様の指摘を行っており、 $a_0=0.67$ としている。

以上のように、分割要素の大きさに対する明確な基準は得られておらず、個々の問題について既往の研究を参照するか、あるいは単に分割数による差異を比較するに止まっている。ところで、接触面を有限個の要素に分割する数値解法においては、通常各要素の変位は要素中央点の変位で代表させている。したがって、要素内の変位分布を調べ、各要素の変位を中央変位で代表できるかどうか検討することが、分割要素の大きさを決定する際の一つの判断基準になるものと考えられる。

図一五は、半無限弾性体において、 a_0 の変化による正方形載荷要素内の変位分布の変化を調べたものである。 a_0 の増加とともに、 $a_0=0$ (静的な場合)の変位分布から離れる度合いが大きくなっている。一方、非載荷要素の変位については、円形加振もしくは集中加振による変位で代用してよいことを前章で述べた。このことをふまえて、半無限弾性体において、 a_0 の変化による非載荷要素内の変位分布の変化を集中加振による場合について図示したものが図一六である。 a_0 の増加とともに波



図一五 a_0 の変化による載荷要素内の変位分布の変化 (正方形加振)

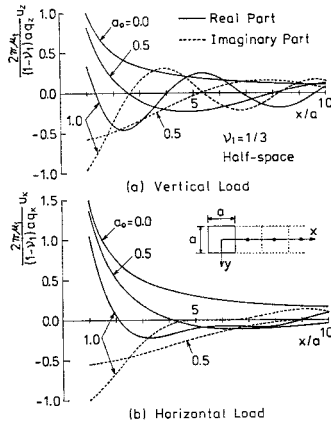


図-6 a_0 の変化による非載荷要素内の変位分布の変化 (集中加振)

長が短くなり、各分割要素の中央変位のみでは振源距離 x/a に対する変位分布を正確に表わし得なくなる状況がわかる。

静的剛性を厳密解と比較した結果¹⁹⁾によれば、相当粗い分割数でも精度の低下はみられない。しかし、静的な解析で用いた分割数を動的な問題にそのまま流用できないことは文献(8), (10)において示されている。この原因の1つとして、図-5, 6 に示した結果より、 a_0 の増加とともに各要素の変位を中央変位で代表し得なくなることが考えられる。従来の研究に対する考察と図-5, 6 の変位分布より、接触面の分割数は分割要素の a_0 ができるだけ小さくなるように決めるべきである。特に、前章で述べたように、柔性マトリックスの対角要素となる載荷要素の中央変位に高い精度が要求される。このことから、図-5 において $a_0=0$ の変位分布とそれほど差異のない $a_0=0.5$ 程度以下とすることが、分割要素の大きさを決定する際の一応の判断基準となろう。

次に、半無限弾性体に対する結果をふまえて、 $a_0=0.5$ として層剛性比および層厚が載荷要素内の変位分布に及ぼす影響を調べたものが図-7 である。同様に、層剛性比および層厚が非載荷要素内の変位分布に及ぼす影響を集中加振の場合について調べたものが図-8, 9 である。図-7 より、層剛性比の変化によって載荷要素内の変位分布はほとんど影響を受けていないが、層厚の変化は変位分布に多少影響を及ぼしている。しかし、同図に示したものは $\mu_2/\mu_1=\infty$ の場合における層厚の影響で、 $\mu_2/\mu_1=1$ に近づくとともに層厚の影響は順次小さくなるものと考えられる。一方、図-8, 9 においては、非載荷要素内の変位分布は層剛性比および層厚の影響を受けていることがわかる。しかし、これらの結果においても、図-7 の載荷要素内の変位分布が、 $\mu_2/\mu_1=\infty$ で h_1/a が小さい場合を除いて、半無限弾性体の $a_0=0.5$ にお

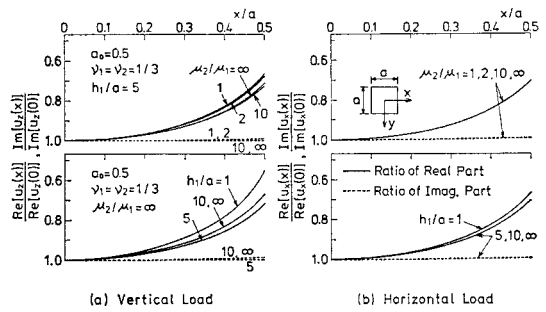


図-7 層剛性比および層厚が載荷要素内の変位分布に及ぼす影響 (正方形加振)

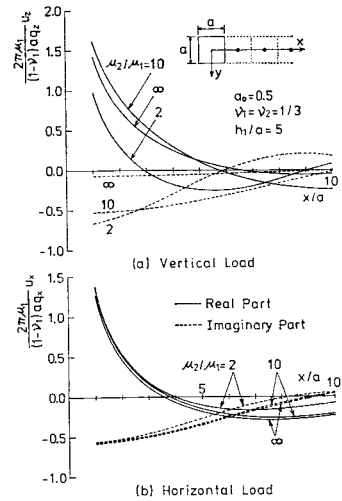


図-8 層剛性比が非載荷要素内の変位分布に及ぼす影響 (集中加振)

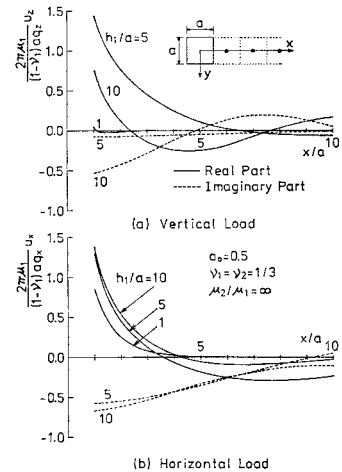


図-9 層厚が非載荷要素内の変位分布に及ぼす影響 (集中加振)

る変位分布(図-5)と大差ないことから判断して、先に述べた半無限弾性体に対する結論を大きく変えるものではないと考えられる。

7. あとがき

本論文は、弾性地盤上の構造物の動的相互作用解析において必要となる地盤の柔性マトリックスについて、いくつかの基本的な問題に対する検討を行ったものである。まず、矩形加振、等価な面積の円形加振および合力が等しい集中加振による変位式間の対応関係を調べ、各載荷状態に対する変位式間の違いは無次元振動数 a_0 、振源距離 x/a , y/a , 載荷面形状 b/a 等に関するが²、層剛性比 μ_2/μ_1 、層厚 h_1/a 等には依存していないことを示した。

ついで、接触面の分割要素に正方形を用いる場合について、正方形加振の代わりに載荷要素に対しては等価な面積の円形加振、非載荷要素に対しては等価な面積の円形加振もしくは集中加振による変位として柔性マトリックスを求めてよいことを明らかにした。また、接触面の分割数を決定する際の一応の判断基準として、分割要素の無次元振動数 a_0 を 0.5 程度以下にすればよいことを示した。これらの結果は二層弾性体の層剛性比、層厚等に関係なくいえることであり、多層弾性地盤の解析においても通用することができる。

付 録

各変位式に共通する $F(\zeta)$, $W(\zeta)$, $U(\zeta)$, $G(\zeta)$, $H(\zeta)$ 等はそれぞれ以下のように与えられる。

a) 半無限弾性体の場合¹⁾

$$F(\zeta) = (2\zeta^2 - 1)^2 - 4\zeta^2 \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1, \quad W(\zeta) = U(\zeta) = 1 \\ G(\zeta) = \tilde{\beta}_1, \quad H(\zeta) = -1$$

b) 二層弾性体の場合^{2), 24)}

$$F(\zeta) = 16 \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1 \zeta^2 (2\zeta^2 - 1) C \\ - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1 \{4\zeta^2 A + (2\zeta^2 - 1)^2 B\} PS \\ + \{4 \tilde{\alpha}_1^2 \tilde{\beta}_1^2 \zeta^2 B + (2\zeta^2 - 1)^2 A\} QT \\ - \eta^2 \mu \tilde{\alpha}_1 \{4 \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_1^2 \zeta^2 - \tilde{\beta}_2 (2\zeta^2 - 1)^2\} PT \\ - \eta^2 \mu \tilde{\beta}_1 \{4 \tilde{\alpha}_1^2 \tilde{\beta}_2 \zeta^2 - \tilde{\alpha}_2 (2\zeta^2 - 1)^2\} QS \\ W(\zeta) = (\tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1 BQS - APT) \\ - \eta^2 \mu (\tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2 QT + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_1 PS) \\ U(\zeta) = (\tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1 BPT - AQS) \\ - \eta^2 \mu (\tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2 PS + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_1 QT) \\ G(\zeta) = \tilde{\beta}_1 (\tilde{\beta}_2 \mu S - \tilde{\beta}_1 T), \quad H(\zeta) = \tilde{\beta}_2 \mu T - \tilde{\beta}_1 S$$

ただし、

$$A = \zeta^2 \mu^2 \Phi - 2\zeta^2 (2\zeta^2 - 1) \mu \Psi + (2\zeta^2 - 1)^2 \Theta \\ B = \mu^2 \Phi - 4\zeta^2 \mu \Psi + 4\zeta^2 \Theta \\ C = \mu^2 \Phi - (4\zeta^2 - 1) \mu \Psi + 2(2\zeta^2 - 1) \Theta \\ \Phi = (2\zeta^2 - \eta^2)^2 - 4\zeta^2 \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2, \quad \Psi = (2\zeta^2 - \eta^2) - 2\tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2$$

$$\Theta = \zeta^2 - \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2, \quad P = \exp(-\tilde{\alpha}_1 h a_0) + \exp(\tilde{\alpha}_1 h a_0) \\ Q = \exp(-\tilde{\alpha}_1 h a_0) - \exp(\tilde{\alpha}_1 h a_0) \\ S = \exp(-\tilde{\beta}_1 h a_0) + \exp(\tilde{\beta}_1 h a_0) \\ T = \exp(-\tilde{\beta}_1 h a_0) - \exp(\tilde{\beta}_1 h a_0) \\ \tilde{\alpha}_2 = \sqrt{\zeta^2 - \lambda^2 r_1^2}, \quad \tilde{\beta}_2 = \sqrt{\zeta^2 - \eta^2}, \quad \mu = \mu_2/\mu_1 \\ h = h_1/a, \quad \eta = V_{s1}/V_{s2}, \quad \lambda = (r_2/r_1)\eta \\ r_2 = \sqrt{(1-2\nu_2)/2(1-\nu_2)}$$

また、 h_1 は表層厚、 μ_2 , ν_2 , V_{s2} はそれぞれ下層 (第2層) のせん断弾性係数、ポアソン比、横波速度である。

c) 剛基盤上の弾性体の場合^{注2)}

$$F(\zeta) = 16 \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1 \zeta^2 (2\zeta^2 - 1) \\ - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1 \{4\zeta^4 + (2\zeta^2 - 1)^2\} PS \\ + \zeta^2 \{4 \tilde{\alpha}_1^2 \tilde{\beta}_1^2 + (2\zeta^2 - 1)^2\} QT \\ W(\zeta) = \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1 QS - \zeta^2 PT \\ U(\zeta) = \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1 PT - \zeta^2 QS, \quad G(\zeta) = \beta_1 S, \quad H(\zeta) = T$$

参 考 文 献

- 1) Richart, F.E., J.R. Hall and R.D. Woods (岩崎敏男・嶋津晃臣共訳) : 土と基礎の振動, 鹿島出版会, pp. 210~254, 1975.
- 2) Elorduy, J., J.A. Nieto and E.M. Szekely : Dynamic Response of Bases of Arbitrary Shape Subjected to Periodic Vertical Loading, Proc. Int. Symp. on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Albuquerque, pp. 105~121, 1967.
- 3) Wong, H.L. and J.E. Luco : Dynamic Response of Rigid Foundations of Arbitrary Shape, Int. J. Earthquake Engng Struct. Dynamics, Vol. 4, pp. 579~587, 1976.
- 4) Wong, H.L., J.E. Luco and M.D. Trifunac : Contact Stresses and Ground Motion Generated by Soil-Structure Interaction, Int. J. Earthquake Engng Struct. Dynamics, Vol. 5, pp. 67~79, 1977.
- 5) Savidis, S.A. and T. Richter : Dynamic Interaction of Rigid Foundations, Proc. 9th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engng, Tokyo, Vol. 2, pp. 369~374, 1977.
- 6) Gaul, L. : Dynamische Wechselwirkung eines Fundamentes mit dem Viskoelastischen Halbraum, Ingenieur-Archiv, Vol. 46, pp. 401~422, 1977.
- 7) Wong, H.L. and J.E. Luco : Dynamic Response of Rectangular Foundations to Obliquely Incident Seismic Waves, Int. J. Earthquake Engng Struct. Dynamics, Vol. 6, pp. 3~16, 1978.
- 8) Kitamura, Y. and S. Sakurai : Dynamic Stiffness for Rectangular Rigid Foundations on a Semi-Infinite Elastic Medium, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol. 3, pp. 159~171, 1979.
- 9) Savidis, S.A. and T. Richter : Dynamic Response of

注2) この場合、本文の式(6)の誘導に際して用いた放射条件の代わりに、図-2の第 n 層を剛基盤とし、第 $n-1$ 層下端の境界条件を与えることによって定式化できる²⁵⁾。また、b) において $\mu \rightarrow \infty$ の極限を考えることによっても求めることができる。すなわち、 μ の高次の項のみを残し、 $W(\zeta)/F(\zeta)$, $U(\zeta)/F(\zeta)$ および $H(\zeta)/G(\zeta)$ の分子、分母から共通因子を消去すれば得られる。

- Elastic Plates on the Surface of the Half-Space, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol. 3, pp. 245~254, 1979.
- 10) 北村泰寿・桜井春輔：剛基礎底面の複素剛性に関する一解析法，土木学会論文報告集，第 290 号，pp. 43~52, 1979.
 - 11) 北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性地盤上にある 4 辺自由板の振動解析，土木学会論文報告集，第 297 号，pp. 59~69, 1980.
 - 12) Iguchi, M. and J.E. Luco: Dynamic Response of Flexible Rectangular Foundations on an Elastic Half-Space, Int. J. Earthquake Engng Struct. Dynamics, Vol. 9, pp. 239~249, 1981.
 - 13) 小林俊夫：Green 関数の離散化手法を用いた建屋と地盤の動的相互作用の研究，日本建築学会論文報告集，第 302 号，pp. 21~27, 1981.
 - 14) Hamidzadeh-Eraghi, H.R. and P. Grootenhuys: The Dynamics of a Rigid Foundation on the Surface of an Elastic Half-Space, Int. J. Earthquake Engng Struct. Dynamics, Vol. 9, pp. 501~515, 1981.
 - 15) Adeli, H., M.S. Hejazi, L.M. Keer and S. Nemat-Nasser: Dynamic Response of Foundation with Arbitrary Geometries, Proc. ASCE, Vol. 107, EM 5, pp. 953~967, 1981.
 - 16) Whittaker, W.L. and P. Christiano: Dynamic Response of Plate on Elastic Half-Space, Proc. ASCE, Vol. 108, EM 1, pp. 133~154, 1982.
 - 17) Whittaker, W.L. and P. Christiano: Response of a Plate and Elastic Half-Space to Harmonic Waves, Int. J. Earthquake Engng Struct. Dynamics, Vol. 10, pp. 255~266, 1982.
 - 18) Kitamura, Y., S. Sakurai and T. Takatani: Interaction between Foundation Structure and Elastic Ground Medium under Harmonic Periodical Load, Memo. Fac. Engng, Kobe Univ., No. 29, pp. 27~41, 1982.
 - 19) Rucker, W.: Dynamic Behaviour of Rigid Foundations of Arbitrary Shape on a Half-Space, Int. J. Earthquake Engng Struct. Dynamics, Vol. 10, pp. 675~690, 1982.
 - 20) Kawase, H., K. Yoshida, S. Nakai and Y. Koyanagi: Dynamic Response of a Structure on a Layered Medium—A Dipping Layer and a Flat Layer—, 第 6 回日本地震工学シンポジウム，pp. 1641~1648, 1982.
 - 21) 高崎芳夫・平澤光春：粘弾性多層地盤上の構造物と地盤との動的相互作用について，第 6 回日本地震工学シンポジウム，pp. 1649~1656, 1982.
 - 22) 北村泰寿・桜井春輔・富士田 潔：矩形等分布加振力による二層弾性体表面の振動，建設工学研究所報告，第 22 号，pp. 167~186, 1980.
 - 23) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有：成層構造をもつ基礎地盤の動特性，京大防災研究所年報，第 19 号 B, pp. 167~217, 1976.
 - 24) 北村泰寿・桜井春輔・陳 徳生：二層弾性体表面の点加振力による表面変位の解析，建設工学研究所報告，第 22 号，pp. 145~166, 1980.
 - 25) Thrower, E.N.: The Computation of the Dispersion of Elastic Waves in Layered Media, J. Sound Vib., Vol. 2, No. 3, pp. 210~226, 1965.
 - 26) 本多弘吉：地震波動，岩波書店，pp. 38~45, 1954.
 - 27) 田治見 宏：建物と地盤の相互作用（分担執筆），地震工学（金井 清他 3 名共著），彰国社，pp. 91~105, 1968.
 - 28) Thomson, W.T. and T. Kobori: Dynamic Compliance of Rectangular Foundations on an Elastic Half-Space, J. Appl. Mech., Vol. 30, Trans. ASME, Vol. 85, pp. 579~584, 1963.
 - 29) Holzlöhner, U.: Vibrations of the Elastic Half-Space due to Vertical Surface Loads, Int. J. Earthquake Engng Struct. Dynamics, Vol. 8, pp. 405~414, 1980.